ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1443–1449

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. М. М. Васьковский

Доказываются теоремы об устойчивости решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0374064121110017

Введение. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,dX_t, \quad t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty), \tag{1}$$

где X_t – случайный процесс, имеющий п.н. непрерывные по Гёльдеру порядка $\alpha \in (0,1)$ траектории, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – детерминированная функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $m \in \{0,\ldots,[1/\alpha]+1\}$. Стохастические дифференциальные уравнения (1), вообще говоря, не могут быть исследованы в рамках как классической теории стохастических дифференциальных уравнений Ито [1], так и теорий Лайонса и Губинелли потраекторного интегрирования по грубым траекториям [2, 3]. В работе [4] разработан функциональный вариант теории интегрирования по грубым траекториям с произвольным показателем Гёльдера и с помощью этой теории доказаны теоремы существования и единственности решений, а также формула замены переменных.

В настоящей работе доказывается, что условия, обеспечивающие существование и единственность решений уравнений (1), гарантируют также непрерывную зависимость решений от начальных данных на любом конечном отрезке; исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (1) на основании устойчивости нулевого решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $dZ_t = f(Z_t)\,dt$. При этом под *решением* уравнения (1) понимается решение стохастического дифференциального уравнения, слабо управляемого соответствующей грубой траекторией [4].

Для определения решений нам понадобится ряд понятий, введённых в статье [4].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T>0$ и $\alpha \in (0,1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0,T],V)$ и $C_2^\alpha([0,T],V)$ обозначим множества функций $f : [0,T] \to V$ и $g : [0,T]^2 \to V$ соответственно, для которых величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g\|_{\alpha,2} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|g_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

конечны. Далее, как и в [5, гл. 2], для функции двух переменных $g_{s,t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha,2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s,t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для целого неотрицательного k и конечномерных евклидовых пространств V и W через $C_b^k(V,W)$ обозначаем множество функций $h : V \to W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^{k} \|D^i h\|_\infty$$

конечна, где $\|D^i h\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} |D^i h_t|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ множество α-непрерывных по Гёльдеру *грубых траекторий,* т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0,T], V^{\bigotimes i})$ для любого $i = \overline{1,n}$, и для любых $s,u,t \in [0,T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t}$, в котором

$$(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{X}_{s,u}^j \bigotimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} V^{\bigotimes i}$, где $V^{\bigotimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0,T]^2 \to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t \in [0,T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической,* если

$$\mathrm{Sym}\,(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!}(\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\bigotimes i} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий обозначаем через $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ является *грубой траекторией* над $X \in C^\alpha([0,T],V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0,T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0,T],W)$ *слабо управляется* грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V,W)$, … …, $Y^{(n-1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V^{\bigotimes (n-1)}, W)$ такие, что

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, \quad Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad Y_{s,t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, \quad Y_{s,t}^{(n-1)} = R_{s,t}^{Y,1};$$

а величина $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$ конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y,i}$, $i = \overline{1,n}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y.

Определим банахово пространство

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W) = \left\{ (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) : Y \in C^\alpha([0,T],W), \ \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

с полунормой

$$\|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha}.$$

Норма элемента $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W)$ определяется равенством

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y \in C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(V,W))$, $(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathcal{L}(V,W))$. Возьмём некоторые $s,t \in [0,T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$ точками, а через $|\mathcal{P}|$ – его диаметр.

Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$ точками):

$$\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}\sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)}\mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Определение грубых траекторий на полуоси. Пусть $\beta\in(1/(n+1),1/n]$, $X\in C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, т.е. при любом $T>0$ сужение $X|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $C^\beta([0,T],\mathbb{R})$. Для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ определим $\mathbf{X}_{s,t}^i := (X_{s,t})^i/i!$, $s,t\in\mathbb{R}_+$.

Элемент $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n):\mathbb{R}_+^2\to T^{(n)}(\mathbb{R})$ будем называть *геометрической грубой траекторией* над X. Множество геометрических грубых траекторий $\mathbf{X}$ над X по всем $X\in C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Если $\mathbf{X}\in\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, то $\mathbf{X}|_{[0,T]^2}\in\mathscr{C}_g^\beta([0,T],\mathbb{R})$ для любого $T>0$.

Пусть $\alpha,\beta\in(1/(n+1),1/n]$, $\alpha<\beta$. Будем говорить, что функция $Y\in C^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ *слабо управляется* геометрической грубой траекторией $\mathbf{X}\in\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, если существуют $Y^{(i)}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, такие, что величины $\|R^{Y,i}|_{[0,T]^2}\|_{i\alpha}$ конечны при любом $T>0$ для каждого остаточного члена $R^{Y,i}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, где

$$R_{s,t}^{Y,i} = Y_{s,t}^{(n-i)} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_s^{(n-i+j)}\mathbf{X}_{s,t}^j.$$

Скажем, что вектор-функция $\mathbf{Y}=(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, если при любом $T>0$ её сужение $\mathbf{Y}|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$.

Стохастические дифференциальные уравнения, слабо управляемые грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t\in\mathbb{R}_+$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\beta\in(1/(n+1),1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot=(1,\mathbf{X}_{0,\cdot}^1,\ldots,\mathbf{X}_{0,\cdot}^n)$ как случайную величину, принимающую значения в $\mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ п.н., где $\mathbf{X}_{s,t}^i=(X_{s,t})^i/i!$. Выберем и зафиксируем произвольное $\alpha\in(0,\beta)$.

Пусть $Y\in C^\alpha([0,T],\mathbb{R})$, $(Y,Y^{(1)},Y^{(2)},\ldots,Y^{(n-1)})\in\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$; $f\in C_b^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Определим $Z_t=f(Y_t)$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно положим

$$Z^{(k)} = \sum_{j=1}^k D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)},\ldots,Y^{(k-j+1)}),\quad k=\overline{1,n-1},\tag{2}$$

где $B_{k,j}(x_1,\ldots,x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [6].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,d\mathbf{X}_t,\quad t\in\mathbb{R}_+.\tag{3}$$

Определение 1. Пусть $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением* уравнения (3) с начальным условием $Y_0=\xi$ будем называть $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbf{Y}=(Y,Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ со значениями в $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ п.н. такую, что случайный процесс $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным и п.н. для всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)\,d\mathbf{X}_s,$$

где грубые производные от функции $f(Y)$, участвующие в определении интеграла в правой части, определяются по формулам (2). Решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём *единственным,* если для любых двух решений $\mathbf{Y}$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$.

Рассмотрим ОДУ

$$dZ_t = f(Z_t)\,dt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, порождённый уравнением (4), т.е. $Z_t = S_t Z_0$. В работе [4] доказано

Предложение. *Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ существует единственное решение $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$ и п.н. выполняются равенства*

$$Y_t = S_{X_{0,t}}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $(D_f h)(z) = f(z) Dh(z)$.

Непрерывная зависимость решений от начальных данных. Наряду с уравнением (3) рассмотрим возмущённое уравнение

$$dY_t = \widetilde{f}(Y_t)\,d\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $p \geqslant 1$, $T > 0$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н., $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина; $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Если $\mathbb{E}\|X\|_{\alpha,[0,T]}^p < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ такое, что для любых функции $\widetilde{f} \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\widetilde{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых $\|\widetilde{f} - f\|_{C_b^{n+1}} + \mathbb{E}|\widetilde{\xi} - \xi|^p \leqslant \delta$, выполняется неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|\widetilde{Y}^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]}^p \leqslant \varepsilon,$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$, $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{Y}^{(n-1)})$ – решение уравнения (5) с начальным условием $Y_0 = \widetilde{\xi}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого при любом $\delta_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, существуют $f_k \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ такие, что $\|f_k - f\|_{C_b^{n+1}} + \mathbb{E}|\xi_k - \xi|^p \leqslant \delta_k$, и выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]}^p \geqslant \varepsilon_0,$$

здесь $\mathbf{Y}_k = (Y_k, Y_k^{(1)}, \ldots, Y_k^{(n-1)})$ – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi_k$. Пусть $S_{k,t}$ – поток, порождённый уравнением (4). Согласно предложению 1 имеем

$$Y_t = S_{X_t - X_0}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t),$$

$$Y_{k,t} = S_{k, X_t - X_0}\xi_k, \quad Y_{k,t}^{(i)} = D_{f_k}^{i-1} f_k(Y_{k,t}).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $X_0 = 0$. Обозначим $g(\tau) = S_\tau \xi$, $g_k(\tau) = S_{k,\tau}\xi_k$, $\psi_k(\tau) = g_k(\tau) - g(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} = \sup_{s \neq t} \frac{|\psi_k(X_t) - \psi_k(X_s)|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{s \neq t} \frac{|(X_t - X_s) D\psi_k(X_s + \theta_k(X_t - X_s))|}{|t-s|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|X\|_{\alpha,[0,T]} \|D\psi_k\|_\infty.$$

Так как $\mathbb{E}\|X\|^p_{\alpha,[0,T]} < \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\|Y_k - Y\|^p_{\alpha,[0,T]} = 0$.

Выберем произвольно $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Обозначим $h(y) = D_f^{i-1}f(y)$, $h_k(y) = D_{f_k}^{i-1}f_k(y)$, $\varphi_k(y) = h_k(y) - h(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда будем иметь

$$\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]} = \sup_{s\neq t} \frac{|h_k(Y_{k,t}) - h_k(Y_{k,s}) - h(Y_t) + h(Y_s)|}{|t-s|^\alpha} =$$

$$= \sup_{s\neq t} \frac{|(Y_{k,t} - Y_{k,s})D\varphi_k(Y_{k,s} + \theta_k(Y_{k,t} - Y_{k,s}))|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{s\neq t} \frac{|h(Y_{k,t}) - h(Y_{k,s}) - h(Y_t) + h(Y_s)|}{|t-s|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]}\|D\varphi_k\|_\infty + \|Dh\|_\infty\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} + C\|D^2h\|_\infty(\|Y_k - Y\|_{\alpha,[0,T]} + |\xi_k - \xi|).$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|^p_{\alpha,[0,T]} = 0$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\|Y_k^{(i)} - Y^{(i)}\|_{\alpha,[0,T]} = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Устойчивость по Ляпунову решений на полуоси. Перейдём к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3) в предположении, что $f(0) = 0$. Дополнительно предположим, что функция $f \in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такова, что любое решение Z_t, $t \geqslant 0$, уравнения (4) не имеет взрывов.

Далее под нулевым решением уравнения (3) понимаем решение $\mathbf{Y} \equiv 0$ уравнения (3) с нулевым начальным условием $Y_0 = 0$.

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (3) *устойчиво по вероятности,* если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > 0$ такое, что для каждой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство

$$P\biggl(\sup_{t\geqslant 0} |Y_t| \geqslant \varepsilon_1\biggr) \leqslant \varepsilon_2,$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)},\ldots,Y^{(n-1)})$ – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$. Скажем, что нулевое решение уравнения (3) *асимптотически устойчиво по вероятности,* если оно устойчиво по вероятности и существует $\Delta > 0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \Delta$ п.н., имеет место сходимость по вероятности $Y_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} 0$. Пусть $p \geqslant 1$; будем говорить, что нулевое решение уравнения (3) является *p-устойчивым,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|Y_t|^p \leqslant \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть* $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} +\infty$ *и для любого* $T > 0$ *величина* $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,T]} |X_t|)$ *конечна. Если нулевое решение уравнения (4) устойчиво по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчиво) при* $t \geqslant 0$, *то нулевое решение уравнения (3) устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво по вероятности).*

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $X_0 = 0$. Пусть Z_t – решение уравнения (4) с начальным условием $Z_0 = \xi$, тогда $Y_t = Z_{X_t}$. Зафиксируем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Так как $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}} +\infty$, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon_2) > 0$, при котором

$$P(X_t \geqslant 0 \text{ для всех } t > \tau) \geqslant 1 - \varepsilon_2/2.$$

Так как величина $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,\tau]}|X_t|)$ конечна, то в силу неравенства Чебышёва найдётся постоянная $M=M(\tau,\varepsilon_2)>0$ такая, что

$$P(|X_t|\leqslant M \ \text{для всех}\ t\in[0,\tau])\geqslant 1-\varepsilon_2/2.$$

Предположим, что нулевое решение уравнения (4) устойчиво по Ляпунову при $t\geqslant 0$. Тогда найдётся $\delta=\delta(\varepsilon_1,M)>0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$, $|\xi|\leqslant\delta$ п.н., выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant -M}|Z_t|\leqslant\varepsilon_1$ п.н.

Таким образом, имеем

$$P\bigg(\sup_{t\geqslant 0}|Y_t|>\varepsilon_1\bigg)=P\bigg(\sup_{t\geqslant 0}|Z_{X_t}|>\varepsilon_1\bigg)\leqslant P(\,\text{существует}\ t\geqslant 0\ \text{такое, что}\ X_t<-M)\leqslant$$

$$\leqslant P(\,\text{существует}\ t\in[0,\tau]\ \text{такое, что}\ X_t<-M)+P(\,\text{существует}\ t>\tau\ \text{такое, что}\ X_t<0)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_2/2+\varepsilon_2/2=\varepsilon_2.$$

Таким образом, нулевое решение уравнения (3) устойчиво по вероятности.

Следовательно, нулевое решение уравнения (4) асимптотически устойчиво при $t\geqslant 0$. Тогда существует $\Delta>0$, при котором для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$, $|\xi|\leqslant\Delta$ п.н., решение Z_t уравнения (4) с начальным условием $Z_0=\xi$ обладает свойством: с вероятностью 1 имеет место сходимость $Z_t\to 0$ при $t\to+\infty$. Возьмём произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. Существует $\delta=\delta(\varepsilon_1)$ такое, что $P(|Z_t|\leqslant\varepsilon_1$ для всех $t\geqslant\delta)=1$.

Так как $X_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}+\infty$, то найдётся $\delta_1>0$, при котором

$$P(\,\text{существует}\ t\geqslant\delta_1\ \text{такое, что}\ X_t<\delta)\leqslant\varepsilon_2.$$

Таким образом,

$$P(|Y_t|\leqslant\varepsilon_1\ \text{для всех}\ t\geqslant\delta_1)=P(|Z_{X_t}|\leqslant\varepsilon_1\ \text{для всех}\ t\geqslant\delta_1)=$$
$$=1-P(\,\text{существует}\ t\geqslant\delta_1\ \text{такое, что}\ |Z_{X_t}|>\varepsilon_1)\geqslant$$
$$\geqslant 1-P(\,\text{существует}\ t\geqslant\delta_1\ \text{такое, что}\ X_t<\delta)\geqslant 1-\varepsilon_2.$$

Следовательно, $Y_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}0$, поэтому нулевое решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Пример. Пусть W_t и B_t^H – независимые одномерные соответственно стандартное броуновское движение и дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H\in(0,1/2)\bigcup(1/2,1)$. Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t=-Y_t\,dX_t,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{6}$$

где $X_t=at+bW_t+cB_t^H$, $a>0$, $b,c\in\mathbb{R}$.

Возьмём произвольные α, β, $0<\alpha<\beta<H$. Тогда почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^\beta(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Из предложения вытекает, что уравнение (6) с начальным условием $Y_0=x$ имеет единственное решение, определяемое формулой

$$Y_t=e^{-at-bW_t-cB_t^H}x,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2. Так как $\sup\limits_{t\in[0,T]}|X_t|\leqslant C\|X\|_{\beta,[0,T]}$, то, согласно лемме 7.4 [7], величина $\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,T]}|X_t|)$ конечна. Докажем, что $X_t\underset{t\to+\infty}{\overset{P}{\to}}+\infty$. Возьмём произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. Так как процессы W_t и B_t^H независимы, то процесс $\bar X_t=bW_t+cB_t^H$

имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, равной $b^2t+c^2t^{2H}$. Таким образом,

$$P(X_t > \varepsilon_1 \text{ для всех } t \geqslant \delta) = P(\bar{X}_t > \varepsilon_1 - at \text{ для всех } t \geqslant \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{M_t}^{\infty} e^{-s^2/2}\, ds,$$

где $M_t = (\varepsilon_1 - at)/\sqrt{b^2t+c^2t^{2H}}$. Так как $M_t \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$, то найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{M_\delta}^{\infty} e^{-s^2/2}\, ds \geqslant 1 - \varepsilon_2.$$

Таким образом, $X_t \overset{P}{\underset{t\to+\infty}{\to}} +\infty$. Следовательно, согласно теореме 2, нулевое решение уравнения (6) является асимптотически устойчивым по вероятности.

Пусть $p \geqslant 1$, исследуем p-устойчивость нулевого решения уравнения (6). Имеем

$$\mathbb{E}|Y_t|^p = \mathbb{E}|x|^p e^{t(-pa+p^2b^2/2)+t^{2H}p^2c^2/2}.$$

Таким образом, при $c \neq 0$ и $H > 1/2$ нулевое решение уравнения (6) не является p-устойчивым. Если $c = 0$ или $H \in (0, 1/2)$, то нулевое решение этого уравнения p-устойчиво тогда и только тогда, когда $a > pb^2/2$.

Замечание. Аналогичный результат об устойчивости нулевого решения уравнения (6) с $H > 1/2$ получен в статье [8]. Проблема устойчивости решений многомерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями, исследовалась в работах [8–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
3. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Funct. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
4. *Васьковский М.М.* Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.
5. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
6. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, 1974.
7. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Coll. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.
8. *Качан И.В.* Устойчивость линейных стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробными броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 590–606.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
10. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.