ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1450–1457

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО ВСЕМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И РЕШЕНИЯМИ

© 2021 г. **Н. А. Изобов, А. В. Ильин**

Доказано существование n-мерных линейных дифференциальных систем с первым приближением, имеющим все положительные характеристические показатели, экспоненциально убывающими возмущениями и ровно $n-1$ линейно независимыми решениями с отрицательными показателями Ляпунова. Тем самым в линейном случае получен антиперроновский вариант – вариант, противоположный известному эффекту Перрона смены значений отрицательных показателей линейного приближения на положительные у решений дифференциальной системы с возмущением высшего порядка малости в окрестности начала координат и допустимого роста вне её.

DOI: 10.31857/S0374064121110029

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_n(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $n \times n$-матрицами-возмущениями Q, удовлетворяющими оценке

$$\|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad C_Q = \mathrm{const}, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательным показателем Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением $f(t, y)$:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad C_f = \mathrm{const}, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). Действительно, согласно принципу линейного включения [1, с. 159], всякое бесконечно продолжимое вправо решение $y_0(t) \neq 0$ системы (4) с отрицательным показателем является и решением системы (2) с экспоненциально убывающим возмущением $Q_{y_0}(t)$, удовлетворяющим условию

$$\|Q_{y_0}(t)\| \leqslant C_f \|y_0(t)\|^{m-1}, \quad t \geqslant t_0.$$

Поэтому в случае допустимого отрицательного решения первой задачи следует и такое же решение второй.

Отметим, что в эффекте Перрона [2; 3, с. 50–51] смены значений отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные показатели решений системы (4) в работах [4, 5] получено окончательное полное описание множеств как всех положительных, так и всех отрицательных (в том числе и при отсутствии последних) показателей решений системы (4), у которой все нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и имеют ограниченные конечные показатели.

Положительному решению первой задачи и посвящена настоящая работа. Справедлива следующая

Теорема 1. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее удовлетворяющее оценке (3) возмущение $Q(t)$

такие, что возмущённая линейная система (2) имеет единственное (среди всех её линейно независимых) решение $y(t)$ *с отрицательным показателем Ляпунова, равным*

$$\lambda_0 = \frac{\theta\sigma - \theta\lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

Доказательство. Сначала докажем теорему в более простом варианте системы (1) с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов $A(t)$. Затем по ней построим уже бесконечно дифференцируемую матрицу $B(t)$, отличающуюся от матрицы $A(t)$ на таких столь коротких промежутках времени, содержащих её точки разрыва, что будет выполнено условие

$$J_M(B - A) \equiv \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(\tau) - A(\tau)\| e^{M\tau}\, d\tau < +\infty$$

с достаточно большой постоянной $M > 0$ (например, большей коэффициента неправильности Гробмана системы (1)). Это интегральное условие обеспечит [6] совпадение характеристических показателей как у систем (1) и $\dot{x} = B(t)x$, так и у систем (2) и $\dot{y} = B(t)y + Q(t)y$ с одной и той же матрицей $Q(t)$.

1°. Построение системы первого приближения. По числу $\theta > 1$ и моментам $t_k = \theta^k$, $k \in \mathbb{N}$, определим коэффициенты

$$a_i(t) = (-1)^i \times \begin{cases} -\alpha_i, & t \in [t_{2k-1}, t_{2k}), \quad i = 1, 2, \\ \alpha_i, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

линейной диагональной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_1 = \theta, \tag{6}$$

с кусочно-постоянной матрицей $A(t)$ и определяемыми ниже постоянными $\alpha_2 \geqslant \alpha_1 > 0$.

В силу представлений (5) коэффициентов $a_i(t)$ диагональной системы (6) справедливы равенства

$$\int\limits_{t_{2k-i+1}}^{t_{2k-i+3}} a_i(\tau)\, d\tau = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1}(t_{2k-i+3} - t_{2k-i+1}), \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

из которых следуют представления

$$\lambda_i(A) = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1}, \quad i = 1, 2, \tag{7_1}$$

характеристических показателей системы (6). Из них для постоянных α_i в силу условия теоремы 1 получаем представления для постоянных α_i:

$$\alpha_i = \frac{\theta + 1}{\theta - 1}\lambda_i, \quad \theta > 1, \quad i = 1, 2. \tag{7_2}$$

2°. Одновременное построение экспоненциально убывающих возмущения и решения. Предположим, что на отрезке $[t_1, t_{2k-1}]$ с произвольно фиксированным $k \in \mathbb{N}$ построены необходимые возмущение (3) и решение $y(t)$ с положительными компонентами. При этом для нормы этого решения в момент $t = t_{2k-1}$ и угла $\gamma_{2k-1} = \sphericalangle\{y(t_{2k-1}, Ox_2)\}$ выполнены условия

$$2^{1-2k} \leqslant \|y(t_{2k-1})\| e^{-\lambda_0 t_{2k-1}} \leqslant 2^{2k-1} \tag{8}$$

с определённым в теореме числом λ_0, имеющим в силу (7) представление

$$\lambda_0 = \frac{\theta\sigma}{\theta - 1} - \frac{\theta\alpha_1 + \alpha_2}{\theta + 1};$$

$$\operatorname{tg}\gamma_{2k-1} = \exp(-\beta t_{2k-1}), \quad \beta = -\theta\sigma + (\theta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) > 0. \tag{9}$$

Продолжим построение 2×2-возмущения $Q(t)$ и решения $y(t)$ на следующем промежутке $(t_{2k-1}, t_{2k+1}]$. На первой его части $(t_{2k-1}, t_{2k}]$ элементы матрицы $Q(t) = (q_{ij}(t))$ определим следующим образом:

$$q_{ij}(t) = q_{22}(t) \equiv 0, \quad i = 1, \quad j = 1, 2, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}],$$

$$q_{21}(t) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k-1}, \tau_1(t_{2k})], \quad \tau_1(t_{2k}) \equiv t_{2k} - 1 - 2\varepsilon(t_{2k}).$$

При этом используемая здесь и ниже при определении матрицы $B(t)$ величина $\varepsilon(t)$ имеет значение $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$.

На оставшемся промежутке $(\tau_1(t_{2k}), t_{2k}]$ бесконечно дифференцируемый и равномерно ограниченный по k элемент $q_{21}(t)$ имеет представление

$$q_{21}(t) = d_{2k} e^{-\sigma t} \times \begin{cases} e_{01}(t, \tau_1, \tau_2), & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ 1, & t \in [\tau_2, \tau_3), \\ e_{10}(t, \tau_3, \tau_4), & t \in [\tau_3, \tau_4], \end{cases}$$

с некоторой определённой ниже постоянной d_{2k} и моментами $\tau_l \equiv \tau_l(t_{2k})$:

$$\tau_2 = \tau_1 + \varepsilon(t_{2k}), \quad \tau_3 = \tau_2 + 1, \quad \tau_4 = t_{2k}.$$

Функция же $e_{\alpha\beta}(\eta, \eta_1, \eta_2)$ является бесконечно дифференцируемой монотонной функцией Гелбаума–Олмстеда [4]

$$e_{\alpha\beta}(\eta, \eta_1 \eta_2) = \alpha + (\beta - \alpha)\exp\{-(\eta - \eta_1)^{-2}\exp[-(\eta - \eta_2)^{-2}]\},$$

определённой на интервале с концами $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ (не обязательно соответственно левым и правым) и принимающей на них значения

$$e_{\alpha\beta}(\eta_1, \eta_1, \eta_2) = \alpha, \quad e_{\alpha\beta}(\eta_2, \eta_1, \eta_2) = \beta$$

и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

В результате возмущённая система (2) на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$ состоит из двух уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_1(t)y_1, \quad \dot{y}_2 = a_2(t)y_2 + q_{21}(t)y_1. \tag{2_1}$$

Последовательно интегрируя их, получаем следующие представления компонент $y_i(t)$ исследуемого решения $y(t)$:

$$y_1(t) = y_1(t_{2k-1})\exp[\alpha_1(t - t_{2k-1})], \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \tag{10}$$

$$y_2(t) = y_2(t_{2k-1})\exp[-\alpha_2(t - t_{2k-1})], \quad t \in [t_{2k-1}, \tau_1], \tag{11_1}$$

$$y_2(t) = y_2(\tau_1)e^{-\alpha_2(t-\tau_1)} + \int\limits_{\tau_1}^{t} q_{21}(\tau)y_1(\tau)e^{\alpha_2(\tau-t)}\,d\tau, \quad t \in [\tau_1, \tau_4]. \tag{11_2}$$

Если $d_{2k} = 0$, то вторая компонента $y_2(t)$ решения $y(t)$ имеет представление (11_1) для всех $t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$. И поэтому в силу равенств (9) для угла $\gamma_{2k} = \sphericalangle\{y(t_{2k}), Ox_1\}$ справедливы оценки

$$\operatorname{tg}\gamma_{2k} = \frac{y_2(t_{2k})}{y_1(t_{2k})} = \operatorname{ctg}\gamma_{2k-1}\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(t_{2k} - t_{2-1})] \overset{(9)}{\geqslant} \exp(-\sigma t_{2k}). \tag{12}$$

С другой стороны, при $d_{2k} = -d < 0$ у соответствующего решения $y(t)$ системы (2_1) первая компонента $y_1(t)$ имеет прежнее представление (10), а для второй $y_2(t)$, определяемой равенствами (11_1), (11_2), возникает вопрос: может ли она при некоторой равномерно ограниченной по $k \geqslant k_0$ постоянной $d_{2k} < 0$ обратится в нуль в момент $t = t_{2k}$. Установим это. С помощью представлений (10) и (11_1), (11_2) для значения $y_2(t_{2k})$ этой компоненты имеем оценки сверху:

$$y_2(t_{2k})\exp[\alpha_2(t_{2k} - \tau_1)] \leqslant y_2(\tau_1) - dy_1(\tau_1)\int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} e^{-\sigma\tau + (\alpha_1+\alpha_2)(\tau-\tau_1)}\,d\tau \leqslant y_2(\tau_1) - dy_1(\tau_1)e^{-\sigma\tau_1} \equiv R.$$

При этом последнее неравенство справедливо в силу оценки $\sigma < \alpha_1 + \alpha_2$, вытекающей из условия теоремы 1 изменения параметра σ и представлений (7) показателей системы (6).

В выражении для величины R заменим положительные значения $y_1(\tau_1)$ и $y_2(\tau_1)$ компонент рассматриваемого решения их представлениями (10) и (11_1), а также значением $\operatorname{tg}\gamma_{2k-1}$. В результате получим неравенства

$$\begin{gathered} Ry_1^{-1}(\tau_1) = \operatorname{ctg}\gamma_{2k-1} \times \exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(\tau_1 - t_{2k-1})] - de^{-\sigma\tau_1} \leqslant \\ \leqslant \exp[-\sigma t_{2k} + (\alpha_1+\alpha_2)(t_{2k} - \tau_1)] - de^{-\sigma\tau_1} = e^{-\sigma\tau_1}(\exp[(\alpha_1+\alpha_2-\sigma)(t_{2k}-\tau_1)] - d) \leqslant \\ \leqslant e^{-\sigma\tau_1}(\exp[\alpha_1+\alpha_2-\sigma] - d) < e^{-\sigma\tau_1}(\exp(\alpha_1+\alpha_2) - d) = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

для $d = \exp(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $k \geqslant k_0$. Поэтому в силу непрерывной зависимости тангенса угла γ_{2k} от постоянной d и оценок (12) и (13) существует такое значение d_{2k} этой постоянной, что будет выполнено равенство $\operatorname{tg}\gamma_{2k} = \exp(-\beta t_{2k})$ с прежним (9) числом β (в доказательстве теоремы 2 при таких треугольных и аналогичных им возмущениях эти углы в отдельные моменты становятся равными нулю). При этом компонента $y_2(t)$ остаётся положительной для всех $t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$, совпадает на отрезке $[t_{2k-1}, \tau_1]$ с аналогичной компонентой y_2^0 решения $y_0(t)$ (с тем же начальным значением в момент $t = t_{2k-1}$) линейной системы (6).

Оценим на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$ норму решения $y(t)$ построенной системы (2_1). Так как выполнено неравенство $\lambda_0 > -\alpha_2$, справедливое в силу очевидного неравенства

$$\lambda_0 + \alpha_2 = \frac{\theta\sigma}{\theta - 1} + \frac{\theta(\alpha_2 - \alpha_1)}{\theta + 1} > 0,$$

то для второй компоненты имеем оценки

$$0 < y_2(t) \leqslant \|y(t_{2k-1})\| y_2(t_{2k-1}) \exp[-\alpha_2(t - t_{2k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2k-1} \exp[\lambda_0 t - (\lambda_0 + \alpha_2)(t - t_{2k-1})] < 2^{2k-1} \exp(\lambda_0 t), \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \qquad (14)$$

Для первой же компоненты $y_1(t)$, ведущей для решения $y(t)$ на отрезке $[t_{2k-1}, t_{2k}]$, функция

$$\lambda_1(t) \equiv t^{-1} \ln y_1(t) = t^{-1}[\ln y_1(t_{2k-1}) + \alpha_1(t - t_{2k-1})]$$

имеет положительную производную

$$\lambda_1'(t) = t^{-2}[\alpha_1 t_{2k-1} - \ln y_1(t_{2k-1})] > 0, \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}),$$

в силу неравенства $0 < y_1(t_{2k-1}) < 1$. Тем самым эта функция принимает наибольшее значение в момент $t = t_{2k}$. Поэтому справедливы оценки сверху

$$t^{-1} \ln y_1(t) \leqslant t_{2k}^{-1} \ln y_1(t_{2k}) \overset{(8)}{\leqslant} t_{2k}^{-1} \ln(2^{2k-1} \exp[\lambda_0 - \beta + (\theta - 1)\alpha_1] t_{2k-1}) =$$

$$= \lambda_0 - \frac{\theta - 1}{\theta + 1}(\alpha_2 - \alpha_1) + (2k - 1) t_{2k}^{-1} \ln 2 \equiv \lambda_{00} + (2k - 1) t_{2k}^{-1} \ln 2, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]. \qquad (15)$$

Аналогичным образом для первой компоненты в момент $t = t_{2k}$ устанавливаются также и оценки снизу

$$t_{2k}^{-1} \ln y_1(t_{2k}) \geqslant t_{2k}^{-1} \ln(2^{1-2k} \exp[\lambda_0 - \beta - (\theta - 1)\alpha_1] t_{2k-1}) \geqslant \lambda_0 + (1 - 2k) \ln 2. \qquad (16)$$

В результате из неравенств $0 < y_2(t_{2k}) < y_1(t_{2k})$ и (14)–(16) вытекают окончательные оценки

$$\|y(t)\| \leqslant 2^{2k} e^{\lambda_0 t}, \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}],$$

$$2^{-2k} \leqslant \|y(t_{2k})\| e^{-\lambda_{00} t_{2k}} \leqslant 2^{2k}.$$

На следующем отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$, на котором $a_1(t) = -\alpha_1$, $a_2(t) = \alpha_2$ и ведущей для решения $y(t)$ является её вторая компонента $y_2(t)$, осуществим аналогичные построения и рассуждения. В итоге получим оценки

$$0 < y_i(t) \leqslant 2^{2k} e^{\lambda_0 t}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}],$$

$$2^{-2k} e^{\lambda_0 t_{2k+1}} \leqslant y_2(t_{2k+1}),$$

следствием которых и неравенства $y_1(t_{2k+1}) < y_2(t_{2k+1})$ являются двусторонние оценки

$$2^{-2k-1} e^{\lambda_0 t_{2k+1}} \leqslant \|y(t_{2k+1})\|, \quad \|y(t)\| \leqslant 2^{2k+1} e^{\lambda_0 t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Методом математической индукции эти построения возмущённой системы (2) с бесконечно дифференцируемым 2×2-возмущением и необходимым решением $y(t)$ с показателем $\lambda[y] = \lambda_0 < 0$, но кусочно-постоянной матрицей $A(t)$, распространим на всю полуось $[t_{2k_0-1}, +\infty)$, положив $Q(t) \equiv 0$ на промежутке $[t_0, t_{2k_0-1})$.

Для завершения доказательства теоремы 1 необходимо кусочно-постоянную диагональную матрицу $A(t)$ с элементами (5) и счётным числом точек разрыва $t = t_k$ заменить бесконечно дифференцируемой ограниченной матрицей $B(t)$, удовлетворяющей условию $J_M(B - A) < +\infty$ (с достаточно большим $M > 0$) и тем самым обеспечивающей совпадение показателей

$$\lambda_i(B) = \lambda_i(A), \quad \lambda_i(B + Q) = \lambda_i(A + Q), \quad i = 1, 2,$$

у построенных и “заменённых” линейных систем.

На отрезках $[\eta_1, \eta_2]$ с концами

$$\eta_1 = t_k, \quad \eta_2 = t_k + \varepsilon(t_k), \quad \varepsilon(t_k) \equiv \exp(-t_k^2), \quad k \geqslant k_0,$$

элементы $b_i(t)$ диагональной матрицы $B(t)$ определим равенствами $b_i(t) = e_{\delta_i \Delta_i}(\eta, \eta_1, \eta_2)$ через функции Гелбаума–Олмстеда со значениями

$$\delta_i = a_i(\eta_1), \quad \Delta_i = a_i(\eta_2), \quad i = 1, 2.$$

На остальных промежутках рассматриваемой полуоси функции $b_i(t)$ совпадают с элементами $a_i(t)$ матрицы $A(t)$. Эту операцию бесконечного сглаживания элементов $a_i(t)$ матрицы $A(t)$ осуществим для всех $k \geqslant k_0$. По свойствам функций Гелбаума–Олмстеда коэффициенты $b_i(t)$ уже являются бесконечно дифференцируемыми и для них выполнены соотношения

$$|b_i(t) - a_i(t)| \begin{cases} \leqslant 2\alpha_2, & t \in (t_k, t_k + \varepsilon(t_k)), \\ \equiv 0, & t \in [t_k + \varepsilon(t_k), t_{k+1}], \quad k \geqslant k_0. \end{cases}$$

Поэтому условие $J_M(B - A) < +\infty$ с любым числом $M > 0$, очевидно, оказывается выполненным:

$$J_M(B - A) \leqslant 2\alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\theta^{2k} + M\theta^{k+1}) < +\infty, \quad \theta > 1.$$

Единственность решения $y_0(t)$ построенной линейной возмущённой системы (2) с отрицательным показателем среди всех её линейно независимых решений очевидным образом следует из неравенства Ляпунова. Действительно, предположив противное – существование второго решения $y_1(t)$ с отрицательным показателем, линейно независимого с построенным $y_0(t)$ и тем самым составляющего с ним фундаментальную систему $Y(t) = [y_0(t), y_1(t)]$ решений возмущённой системы (2), имели бы в силу неравенства Ляпунова следующее противоречие:

$$0 > \lambda[y_0] + \lambda[y_1] \geqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp}[A(\tau) + Q(\tau)]\, d\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau = (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\theta - 1}{\theta + 1} \geqslant 0.$$

Из этих и аналогичных им неравенств следует используемое при доказательстве теоремы 2

Утверждение. *Для матрицы Коши $Y_2(t, \tau)$ построенной двумерной системы (2) и любых нечётных чисел $k(l)$, $l \in \mathbb{N}$, со свойством $k(l)/k(l+1) \to 0$ при $l \to \infty$ справедливо неравенство*

$$\lim_{l\to\infty} t_{k(l+1)}^{-1} \ln \|Y_2(t_{k(l+1)}, t_{k(l)})\| \geqslant -\lambda_0 > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Построение необходимых возмущения $Q(t)$ и решения $y(t)$ можно вместо использованного в работе треугольного способа осуществить соответствующими поворотами.

Замечание 2. Вместо последовательности $t_{k+1} = \theta t_k$, $\theta > 1$, $k \in \mathbb{N}$, можно использовать последовательность $\{t_k\}$ со свойством $t_k t_{k+1}^{-1} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Возникает вопрос, аналогичный вопросу в замечании 3.

Замечание 3. Справедливо ли утверждение:

$$\text{если } \lambda_i(A) > 0, \quad i = \overline{1, n}, \ \text{ то } \lambda_n(A + Q) > 0$$

для любых кусочно-непрерывных ограниченной $n \times n$-матрицы $A(t)$ и экспоненциально убывающего $n \times n$-возмущения $Q(t)$?

Возникает также вопрос о возможном числе линейно независимых решений с отрицательными показателями Ляпунова у n-мерной линейной возмущённой системы (2), у которой система первого приближения (1) имеет все положительные характеристические показатели, а возмущение $Q(t)$ является экспоненциально убывающим. Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любых параметров*

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0, \quad n \geqslant 3, \quad \theta > 1, \quad 0 < \sigma < \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2$$

существуют:

1) n-мерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее удовлетворяющее оценке (3) возмущение Q

такие, что n-мерная возмущённая система (2) имеет ровно $n-1$ линейно независимых решений

$$Y_1(t), \ \ldots, \ Y_{n-1}(t) \tag{17}$$

с отрицательными показателями

$$\lambda[Y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} \equiv \Lambda_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{18}$$

Схема доказательства основывается на утверждении теоремы 1 и её доказательстве. Для последовательности $\{k(l)\}$ нечётных чисел со свойством $k(l)/k(l+1) \to 0$ при $l \to \infty$ определим числа $T_l = t_{k(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, по моментам $t_k = \theta^k$, $\theta > 1$, $k \in \mathbb{N}$, из доказательства теоремы 1. По показателям $\lambda_i > 0$ зададим равенствами (7_2) при $i = \overline{1,n}$ числа $\alpha_n \geqslant \ldots$ $\ldots \geqslant \alpha_1 > 0$. По ним следующим образом определим кусочно-постоянные коэффициенты $a_1(t), \ \ldots, \ a_n(t)$ линейной n-мерной диагональной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), \ldots, a_n(t)]^{\mathrm{T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant T_1. \tag{19}$$

Коэффициент $a_1(t)$ определим на всём бесконечном промежутке $[T_1, +\infty]$ равенствами (5). Остальные коэффициенты $a_i(t)$ зададим равенствами

$$a_i(t) = -\alpha_i \operatorname{sign} a_1(t), \quad t \in [T_{i-1+k(n-1)}, T_{i+k(n-1)}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = \overline{2,n},$$

а вне указанных промежутков – равенствами

$$a_i(t) = -\alpha_i, \quad t \in [T_{i+k(n-1)}, T_{i-1+(k+1)(n-1)}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = \overline{2,n},$$

обеспечивающими выполнение неравенств $\Lambda_i > -\alpha_i$ и тем самым необходимых равенств (18).

На отрезке $[T_1, T_2]$ построениями из доказательства теоремы 1 в координатной плоскости x_1Ox_2 получим первое необходимое решение $Y_1(t) = (y(t), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ с двумерным вектором $y(t) \in \mathbb{R}^2$, реализующим "временной показатель" $\max t^{-1} \ln \|y(t)\| \approx \Lambda_1$ на отрезке $[T_1, T_2]$. Треугольным σ-возмущением (или соответствующим поворотом) в левосторонней окрестности момента $t = T_2$ (см. доказательство теоремы 1) решение $Y_1(t)$ к моменту $t = T_2$ "укладываем" в координатную ось Ox_2, т.е. получаем представление $Y_1(T_2) = \|Y_1(T_2)\| e_2$, где e_i – i-й координатный вектор n-мерного пространства. Далее это решение будет определяться равенством

$$Y_1(t) = \|Y_1(T_2)\| e^{-\alpha_2(t - T_2)} e_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [T_2, T_n],$$

до левосторонней окрестности момента $t = T_n$.

Второе решение $Y_2(t)$ является решением системы (19), не подвергается возмущениям на промежутке $[T_1, T_2)$, расположено на оси Ox_3 и имеет на нём представление $Y_2(t) = e_3 e^{-\alpha_3(t - T_1)}$. На отрезке $[T_2, T_2 + 1]$ допустимым треугольным возмущением, действующим в плоскости x_1Ox_3, образуем к моменту $t = T_2 + 1$ необходимый угол $\sphericalangle\{Y_2(T_2+1), Ox_3\}$ в первой четверти координатной плоскости x_1Ox_3 с тангенсом этого угла, равным $\exp[-\beta(T_2 + 1)]$ с соответствующим числом $\beta > 0$ (см. доказательство теоремы 1). Построениями и рассуждениями из доказательства теоремы 1, действующими на отрезке $[T_2 + 1, T_3]$ и не затрагивающими на нём остальных решений $Y_i(t) = \|Y_i(t)\| e_i$, $i \neq 2$, реализуем "временной показатель"

$\max\{t^{-1}\ln\|Y_2(t)\|\} \approx \Lambda_2$. Это решение, достаточно близко приближающееся к оси Ox_3 на отрезке $[T_3-1,T_3]$, укладываем на нём к моменту $t=T_3$ на эту ось. Далее оно определяется равенством

$$Y_2(t)=\|Y_2(T_3)\|e_3e^{-\alpha_3(t-T_3)},\quad t\in[T_3,T_{n+1}].$$

Методом математической индукции аналогичным образом построим все необходимые и, очевидно, линейно независимые решения (17) возмущённой системы (2) с $n\times n$-возмущением (3).

Докажем теперь отсутствие у системы (2), уже имеющей $n-1$ построенных решений (17) с отрицательными показателями (18), какого-либо решения $Y_n(t)$ также с отрицательным (и даже неположительным) показателем и линейно независимого со всеми решениями (17). Предположим противное – такое решение $Y_n(t)$ у системы (2) есть. Тогда для её фундаментальной системы решений $Y(t)=[Y_1(t),\ldots,Y_n(t)]$ и моментов $\tau(l)=T_1+k(l)(n-1)$ с нечётными номерами $k(l)$, $l\in\mathbb{N}$, $k(l)/k(l+1)\to 0$ при $l\to\infty$, воспользуемся частным случаем оценки [7]:

$$\max_{j=\overline{1,n},}\|Y_j[\tau(l+1)]\|\times\prod_{j\neq p(l+1)}\|Y_j[\tau(l)]\|\geqslant$$
$$\geqslant C|\det Y[\tau(l)]|\times\|Y_2[\tau(l+1),\tau(l)]\|,\quad 0<C=\mathrm{const},\quad l\in\mathbb{N},\tag{20}$$

где $p(l+1)\in\{1,\ldots,n\}$ – номер, на котором реализуется максимум в последнем неравенстве, а $Y_2(t,\tau)$ – матрица Коши двумерной системы (см. утверждение в доказательстве теоремы 1). Вычислив логарифм от обеих частей неравенства (20), разделив их на $\tau(l+1)$ и затем перейдя к верхнему пределу от левой части при $l\to\infty$, на основании указанного утверждения и предположения получим противоречие $0\geqslant-\lambda_0>0$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось лишь применить изложенную в доказательстве теоремы 1 процедуру бесконечного сглаживания в точках разрыва матриц коэффициентов исходной и возмущённой систем с функцией $\varepsilon(t)=\exp(-t^2)$. Теорему 2 можно считать доказанной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф20Р-005) и Российского (проект 20-57-00001Бел_а) фондов фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728.
3. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
4. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.
6. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.
7. *Изобов Н.А.* Оценка снизу для минимального показателя линейной системы // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1576–1588.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 09.04.2021 г.