ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1458–1463

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ

© 2021 г. **А. П. Крищенко, К. Е. Старков**

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными правыми частями, для которых неотрицательный ортант положительно инвариантен, найдены достаточные условия существования нетривиальных локализирующих множеств, соответствующих координатным функциям. Установлены условия существования у таких систем аттрактора и исследовано его положение. Для систем, представляющих собой модели популяционной динамики, указана связь полученных результатов с условиями вымирания или выживания популяций.

DOI: 10.31857/S0374064121110030

Введение. Через $\mathbb{R}^n_{+,0}$ обозначим неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. ортант, образованный точками с неотрицательными координатами: $\mathbb{R}^n_{+,0}=\{x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}: x_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,n}\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x),\quad x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^n,\quad f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))^{\mathrm{т}}. \tag{1}$$

Далее считаем, что каждая функция $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, является дробно-рациональной, причём такой, что она представима в виде отношения двух многочленов со знаменателем, не имеющим нулей в $\mathbb{R}^n_{+,0}$. Раскладывая в этом представлении функции $f_i(x)$ числитель по степеням x_i, получаем, что

$$f_i(x)=x_i^{m_i}\frac{p_i(x)}{q_i(x)},\quad p_i(x)=\sum_{j=0}^{n_i}p_{ij}(\hat{x}_i)x_i^j,\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где m_i – целое неотрицательное число, $q_i(x)$ – многочлен, принимающий положительные значения при $x\in\mathbb{R}^n_{+,0}$, а $p_i(x)$ – многочлен n_i-й степени по переменной x_i, коэффициенты которого $p_{ij}(\hat{x}_i)$, $j=\overline{0,n_i}$, являются многочленами переменной $\hat{x}_i=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}$ и свободный член $p_{i0}(\hat{x}_i)$ ненулевой. Введём удобное в дальнейшем обозначение для отношения k-го и m-го коэффициентов многочлена $p_i(x)$: именно, положим $P^i_{km}(\hat{x}_i)\equiv p_{ik}(\hat{x}_i)/p_{im}(\hat{x}_i)$, $0\leqslant k,m\leqslant n_i$.

Будем предполагать, что для системы (1) множество $\mathbb{R}^n_{+,0}$ положительно инвариантно. Для функций (2) это приводит к условию

$$f_i(x)|_{\{x_i=0\}\bigcap\mathbb{R}^n_{+,0}}\geqslant 0. \tag{3}$$

Поэтому в (2) для каждого значения i выполняется одно из двух условий: либо $m_i>0$, либо $p_{i0}(\hat{x}_i)\geqslant 0$ при $\hat{x}_i\geqslant 0$, если $m_i=0$.

К виду (1), (2) преобразуются математические модели роста раковой опухоли с учётом реакции иммунной системы [1, 2], развития рака поджелудочной железы [3, 4], динамики экологических систем [5], взаимодействия иммунной системы и раковых клеток [6–8], развития связанного со спидом рака [9], роста меланомы [10] и многие другие модели популяционной динамики.

В данной работе получены достаточные условия существования локализирующих множеств вида $\bigcap_{i=1}^n\{0\leqslant x_i\leqslant a_i\}$ для инвариантных компактов и аттрактора системы (1)–(3).

1. Обозначения и определения. Все компактные инвариантные множества системы
$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{4}$$
содержащиеся в подмножестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, лежат в *локализирующем множестве* $\Omega(\phi, Q)$ [11], соответствующем функции $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ (*локализирующей функции*) и множеству $Q \subset \mathbb{R}^n$ и определяемом равенством
$$\Omega(\phi, Q) = \{x \in Q : \phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\}, \tag{5}$$
здесь
$$\phi_{\inf}(Q) = \inf\{\phi(x) : x \in S(\phi) \bigcap Q\}, \quad \phi_{\sup}(Q) = \sup\{\phi(x) : x \in S(\phi) \bigcap Q\},$$
а $S(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : L_F\phi(x) = 0\}$ – *универсальное сечение функции* ϕ, $L_F\phi$ – производная Ли от функции $\phi(x)$ по направлению векторного поля системы (4). Очевидно, что производная $L_F\phi$ не имеет нулей в $Q \setminus \Omega(\phi, Q)$.

Локализирующие множества системы (4), построенные по множеству Q и функции $\phi(x)$, имеют следующие свойства [12–14].

Утверждение 1. *Если множество Q компактно и положительно инвариантно, то и локализирующее множество (5) компактно и положительно инвариантно.*

Утверждение 2. *Пусть множество Q положительно инвариантно и выполнены неравенства $L_F\phi > 0$ в $Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < \phi_{\inf}(Q)\}$ и $L_F\phi < 0$ в $Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) > \phi_{\sup}(Q)\}$. Тогда любое расширение*
$$\Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+) = \{x \in Q : \phi_{\inf}(Q) - \varepsilon_- \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+\}, \quad \varepsilon_-, \varepsilon_+ > 0, \tag{6}$$
локализирующего множества (5) положительно инвариантно.

Утверждение 3. *Пусть выполняются следующие условия: множество Q положительно инвариантно; начинающиеся в Q траектории системы определены на неограниченном вправо временнóм интервале; для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $L_F\phi(x) < -\delta$ при $x \in Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+ \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) + \varepsilon_+ + \varepsilon\}$; для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $L_F\phi(x) > \delta$ при $x \in Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\inf}(Q) - \varepsilon_- - \varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q) - \varepsilon_-\}$. Тогда начинающиеся в $Q \setminus \Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+)$ траектории системы (4) попадают в множество $\Omega(\phi, Q, \varepsilon_-, \varepsilon_+)$ (см. определение (6)) за конечное время.*

Последовательности $h_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, локализирующих функций соответствуют итерационные последовательности локализирующих множеств вида (5)
$$K_0 = Q, \quad K_1 = \Omega(h_1, K_0), \quad \ldots, \quad K_i = \Omega(h_i, K_{i-1}), \quad \ldots \tag{7}$$
и расширенных локализирующих множеств
$$K_0' = Q, \quad K_1' = \Omega(h_1, K_0', \varepsilon_{1-}, \varepsilon_{1+}), \quad \ldots, \quad K_i' = \Omega(h_i, K_{i-1}', \varepsilon_{i-}, \varepsilon_{i+}), \quad \ldots \tag{8}$$
Множества (7), (8) содержат все компактные инвариантные множества, лежащие в множестве Q, и множества (8) положительно инвариантны, если положительно инвариантно множество Q.

2. Предварительные результаты. Обозначим через $S(\phi, Q)$ пересечение $S(\phi) \bigcap Q$, называемое универсальным сечением функции ϕ, соответствующим множеству Q.

Рассмотрим i-е уравнение системы (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n_{+,0}$ и старший коэффициент $p_{in_i}(\hat{x}_i)$ многочлена $p_i(x)$ не имеет нулей в Q. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n_i = 0$, $m_i = 0$ или $n_i = 0$, $m_i > 0$ и $\{x_i = 0\} \bigcap Q = \varnothing$, то система не имеет инвариантных компактов, содержащихся в Q.

2. Если $n_i = 0$, $m_i > 0$ и $\{x_i = 0\} \bigcap Q \neq \varnothing$, то все инвариантные компакты, принадлежащие множеству Q, содержатся в множестве $\{x_i = 0\} \bigcap Q$.

3. Если $n_i > 0$ и $A_i < +\infty$, где
$$A_i = \sup_{x \in Q} \max_{j=\overline{0, n_i - 1}} |P^i_{jn_i}(\hat{x}_i)|, \tag{9}$$

то все инвариантные компакты, принадлежащие множеству Q, содержатся в множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant A_i + 1\} \bigcap Q. \tag{10}$$

Доказательство. Локализирующей функции $h = x_i$ и множеству Q соответствует универсальное сечение

$$S(h,Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^{m_i} \sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0\right\} \bigcap Q.$$

Если $S(h,Q) = \varnothing$, то система не имеет инвариантных компактов, содержащихся в Q. Именно этот случай реализуется при выполнении условий утверждения 1 теоремы.

В условиях утверждения 2 получаем, что $S(h,Q) = \{x_i = 0\} \bigcap Q \neq \varnothing$, $h_{\inf}(Q) = h_{\sup}(Q) = 0$ и все инвариантные компакты из Q содержатся в множестве $\Omega(h,Q)$, совпадающем с множеством $S(h,Q)$.

Пусть выполнены условия утверждения 3 теоремы и $m_i > 0$. Тогда $S(h,Q) = (\{x_i = 0\} \bigcup \{\sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0\}) \bigcap Q \neq \varnothing$. Поэтому $h_{\inf}(Q) \geqslant 0$, а $h_{\sup}(Q) \leqslant \max\{0, \sup P_i\}$, где $P_i = \{x_i : \sum_{j=0}^{n_i} p_{ij}(\hat{x}_i) x_i^j = 0,\ x \in Q\}$. Множество P_i содержится в множестве неотрицательных корней многочлена

$$\sum_{j=0}^{n_i - 1} \frac{p_{ij}(\hat{x}_i)}{p_{in_i}(\hat{x}_i)} x_i^j + x_i^{n_i}$$

относительно переменной x_i, а значит, $\sup P_i \leqslant A_i + 1$. Следовательно, справедливо включение $\Omega(h,Q) \subset \{0 \leqslant x_i \leqslant A_i + 1\} \bigcap Q$, которое выполнено и в случаях $m_i = 0$, $n_i > 0$ и пустого множества $S(h,Q)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если при $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$ для каждого $i = \overline{1,n}$ выполнено утверждение 2 или 3 теоремы 1, то все инвариантные компакты системы содержатся в параллелотопе*

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{i=n} \{0 \leqslant x_i \leqslant s_i\},$$

где $s_i = A_i + 1$ или $s_i = 0$.

Уточним утверждение 3 теоремы 1 при $n_i = 1, 2$, $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$ и отсутствии нулей в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$ у старшего коэффициента $p_{in_i}(\hat{x}_i)$ многочлена $p_i(x)$. В случае $m_i = 0$ согласно условию (3) в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$ выполнено неравенство $p_{i0}(\hat{x}_i) \geqslant 0$. Фиксируем локализирующую функцию $h = x_i$.

Рассмотрим случай $m_i = 0$, $n_i = 1$.

Если $p_{i1}(\hat{x}_i) > 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то для функции $h = x_i$ универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ совпадает с множеством $\{x_i = 0\} \bigcap \{p_{i0}(\hat{x}_i) = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ и оказывается, что все инвариантные компакты содержатся в этом же множестве.

Если $p_{i1}(\hat{x}_i) < 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ имеет вид

$$\{x \in \mathbb{R}^n_{+,0} : x_i = \psi_i(\hat{x}_i)\}, \quad \psi_i(\hat{x}_i) = -P^i_{01}(\hat{x}_i) \geqslant 0$$

и поэтому

$$h_{\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \inf_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i), \quad h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i).$$

Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в локализирующем множестве

$$\Omega(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i) \leqslant x_i \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{11}$$

Рассмотрим случай $m_i > 0$, $n_i = 1$. Универсальное сечение $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0})$ совпадает с множеством $\{x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0} \bigcup H$, где $H = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i) x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$. Несложно заметить, что в этом случае

$$h_{\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = 0, \quad h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \geqslant 0$$

и, более того, $h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = \max\{0, \sup\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\}$. Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в локализирующем множестве

$$\Omega(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{0, \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \psi_i(\hat{x}_i)\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{12}$$

В случае $m_i = 0$, $n_i = 2$ универсальное сечение функции h имеет вид

$$S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) = p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i)x_i + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i^2 = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}.$$

Если $p_{i2}(\hat{x}_i) > 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то в $\mathbb{R}^n_{+,0}$ выполняется неравенство

$$p_i(x) \geqslant x_i(p_{i1}(\hat{x}_i) + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i) > 0$$

для $x_i > \max\{0, -P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$. Поэтому при

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i) < 0$$

находим, что $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i0}(\hat{x}_i) = 0; x_i = 0\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ и, если $S(h, \mathbb{R}^n_{+,0}) \neq \varnothing$, то имеет место равенство $h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) = 0$, а при

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i) \geqslant 0$$

выполнено неравенство

$$h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i).$$

Следовательно, все инвариантные компакты содержатся в множестве

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{\sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} -P^i_{12}(\hat{x}_i), 0\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{13}$$

Если $p_{i2}(\hat{x}_i) < 0$ в $\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}$, то в $\{x_i \geqslant 1\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$ справедливо неравенство

$$p_i(x) \leqslant x_i(p_{i0}(\hat{x}_i) + p_{i1}(\hat{x}_i) + p_{i2}(\hat{x}_i)x_i) < 0$$

для $x_i > \max\{1, -P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$. Поэтому

$$h_{\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} \max\{1, -P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i)\}$$

и все инвариантные компакты содержатся в множестве

$$\left\{0 \leqslant x_i \leqslant \max\left\{1, \sup_{\mathbb{R}^{n-1}_{+,0}} (-P^i_{02}(\hat{x}_i) - P^i_{12}(\hat{x}_i))\right\}\right\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}. \tag{14}$$

3. Существование ограниченного локализирующего множества. Для существования ограниченного локализирующего множества в виде параллелотопа

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^n \{0 \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

достаточно выполнения условий следствия. Эти условия содержат требование конечности точных верхних граней вида (9) при $Q = \mathbb{R}^n_{+,0}$. Аналогичное требование конечности точных верхних граней должно выполняться и в случае использования для некоторых значений i локализирующих множеств (11)–(14) вместо (10). Построение итерационной последовательности локализирующих множеств с использованием координатных локализирующих функций позволяет ослабить это требование. Действительно, при нахождении первого члена $K_1 = \Omega(h_1, K_0)$ итерационной последовательности для системы (1) экстремальные значения координатной локализирующей функции h_1 находятся на пересечении её универсального сечения с исходным множеством $K_0 = Q$, которое для системы (1) равно $\mathbb{R}^n_{+,0}$. В результате $K_1 = \Omega(h_1, K_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant h_{1\inf}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \leqslant h_1(x) \leqslant h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0})\} \bigcap \mathbb{R}^n_{+,0}$, и пусть функция h_1 такая, что $h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0}) \in \mathbb{R}$, т.е. для первой функции h_1 выполняется требование конечности величины $h_{1\sup}(\mathbb{R}^n_{+,0})$. При нахождении k-го члена этой последовательности $K_k = \Omega(h_k, K_{k-1})$, $k > 1$, экстремальные значения локализирующей функции h_k находятся на пересечении её универсального сечения с предыдущим локализирующим множеством $K_{k-1} = \Omega(h_{k-1}, K_{k-2})$. Поэтому достаточно выполнения более слабого условия $h_{k\sup}(K_{k-1}) \in \mathbb{R}$. Пусть при каждом $k = \overline{2, n}$ координатная функция h_k такая, что все функции $h_1, \ldots, h_k$ попарно различны и $h_{k\sup}(K_{k-1}) \in \mathbb{R}$. Тогда приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) существует такой упорядоченный набор из n попарно различных координатных локализирующих функций*

$$h_1 = x_{i_1}, \quad \ldots, \quad h_n = x_{i_n}, \tag{16}$$

что все экстремальные значения $h_{i\sup}(K_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, конечны, где $K_0 = \mathbb{R}^n_{+,0}$, $K_i = \Omega(h_i, K_{i-1})$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда все инвариантные компакты системы, содержащиеся в K_0, лежат в ограниченном множестве $K_n = \Omega(h_n, K_{n-1})$.

В качестве примера укажем систему, рассмотренную в работе [15]. Она преобразуется к системе четвёртого порядка вида (1)–(3), где все $n_i = 1$, $m_2 = 1$, а остальные $m_i = 0$. Для этой системы условия теоремы 2 выполнены при $h_1 = x_2$, $h_2 = x_4$, $h_3 = x_1$ и $h_4 = x_3$.

4. Существование аттрактора. Теорема 2 утверждает существование ограниченного локализирующего множества для всех инвариантных компактов системы, которое имеет вид (15), но для существования в системе аттрактора необходимо ещё свойство ограниченности положительных полутраекторий системы. Установить это свойство можно с помощью проверки выполнения условий утверждения 3. Для этого локализирующим функциям (16) поставим в соответствие расширенные локализирующие множества вида (8), полагая

$$K'_0 = \mathbb{R}^n_{+,0}, \quad K'_k = \Omega(h_{i_k}, K'_{k-1}, 0, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Приходим к следующему следствию теоремы 2 и утверждения 3.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия: начинающиеся в $\mathbb{R}^n_{+,0}$ траектории системы (1)–(3) определены на неограниченном вправо временнóм интервале; существует такой упорядоченный набор из n попарно различных координатных локализирующих функций (16) и такие достаточно малые положительные ε_k, $k = \overline{1, n}$, что все экстремальные значения $h_{k\sup}(K'_{k-1})$, $k = \overline{1, n}$, конечны и для любого $k = \overline{1, n}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\dot{h}_k(x) < -\delta < 0$ при $x \in K'_{k-1} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : h_{k\sup}(K'_{k-1}) + \varepsilon_k \leqslant h_k(x) \leqslant h_{k\sup}(K'_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon\}$. Тогда все траектории системы попадают в ограниченное положительно инвариантное множество $\Omega(h_n, K'_{n-1}, 0, \varepsilon_n)$ за конечное время и не выходят из него.*

5. Вымирание и выживание популяций. Важное значение для приложений [1–9] имеют условия на параметры системы, при которых происходит вымирание популяций или сохранение их численности (объёма) большим некоторой положительной величины, например, с некоторого момента времени при всех ненулевых начальных состояниях. Пусть в системе (1) переменная x_i характеризует объём популяции и решение $x(t) = x(t, x_0)$ соответствует начальному условию $x_0 = x(0, x_0)$. Тогда вымирание популяции означает выполнение условия $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ для всех начальных условий с $x_i(0) > 0$, а выживание популяции – существование постоянной $c > 0$, для которой $\varliminf\limits_{t\to+\infty} x_i(t) > c$ при всех начальных условий с $x_i(0) > 0$.

Условие вымирания обычно находится с помощью доказательства асимптотической устойчивости в целом положения равновесия, принадлежащего множеству $\{x_i = 0\}$, или с помощью принципа инвариантности Ла-Салля. В последнем случае используется неположительность производной функции $V(x)$, например, $V(x) = x_i$, в положительно инвариантном множестве D, в которое все траектории системы попадают за конечное время. Для доказательства выживания достаточно установить существование такого $c > 0$, что любая траектория попадает за конечное время в множество $\{x_i > c\}$ и не выходит из него. В этом случае также часто используется положительно инвариантное множество D, в которое все траектории попадают за конечное время. При выполнении условий теоремы 3 в качестве D можно рассмотреть множество $\Omega(h_n, K'_{n-1}, 0, \varepsilon_n)$.

Заключение. Для изложения результатов использованы координатные локализирующие функции. Установлено, что возникающие локализирующие множества ограничены плоскостями, параллельными координатным плоскостям, что упрощает интерпретацию этих множеств.

Работа Крищенко А.П. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00296) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ku-Carrillo R.A., Delgadillo S.E., Chen-Charpentier B.M.* A mathematical model for the effect of obesity on cancer growth and on the immune system response // Appl Math. Model. 2016. V. 40. P. 4908–4920.
2. *Khajanchi S.* Uniform persistence and global stability for a brain tumor and immune system interaction // Biophys. Rev. and Lett. 2017. V. 12. № 4. P. 187–208.
3. *Louzoun Y., Xue C., Lesinski G.B, Friedman A.* A mathematical model for pancreatic cancer growth and treatments // J. Theor. Biol. 2014. V. 351. P. 74–82.
4. *Hu X., Ke G., Jang S. R.-J.* Modeling pancreatic cancer dynamics with immunotherapy // Bull. Math. Biol. 2019. V. 81. P. 1885–1915.
5. *Hastings A.* Transient dynamics and persistence of ecological systems // Ecology Lett. 2001. V. 4. P. 215–220.
6. *Kirschner D., Panetta J.C.* Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction // J. Math. Biol. 1998. V. 37. P. 235–252.
7. *De Pillis L.G., Radunskaya A.* The dynamics of an optimally controlled tumor model: a case study // Math. Comp. Model. 2003. V. 37. P. 1221–1244.
8. *Starkov K.E., Krishchenko A.P.* Ultimate dynamics of the Kirschner–Panetta model: Tumor eradication and related problems // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 3409–3416.
9. *Lou J., Ruggeri T., Ma Z.* Cycles and chaotic behavior in an AIDS-related cancer dynamic model in vivo // J. Biol. Systems. 2007. V. 15. P. 149–168.
10. *Kronik N., Kogan Y., Schlegel P.G., Wolfl M.* Improving T-cell immunotherapy for melanoma through a mathematically motivated strategy: efficacy in numbers? // J. Immunother. 2012. V. 35. P. 116–124.
11. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1597–1604.
12. *Крищенко А.П.* Поведение траекторий автономных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1445–1450.
13. *Крищенко А.П.* Локализация простой и сложной динамики в нелинейных системах // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1440–1447.
14. *Крищенко А.П.* Анализ асимптотической устойчивости автономных систем методом локализации инвариантных компактов // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 1. С. 17–20.
15. *Крищенко А.П., Тверская Е.С.* Поведение траекторий систем с неотрицательными переменными // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1439–1446.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Центр исследований и разработок
в области цифровых технологий (CITEDI)
Национального политехнического института,
г. Тихуана, Мексика

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.
После доработки 10.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.