ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1464–1473

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

 А. В. Равчеев

Пусть $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ – класс n-мерных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, $n \geqslant 2$, а $\Lambda(A)$ – спектр показателей Ляпунова системы $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ $(\Lambda(A) \in \overline{\mathbb{R}}^n$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty, \infty\})$. Для заданных метрического пространства M, функции $\Theta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ и каждой системы $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ рассматривается класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ таких параметрических возмущений $Q \in C(\mathbb{R}_+ \times M, \mathbb{R}^{n\times n})$ матрицы коэффициентов системы A, которые удовлетворяют оценке $\sup\{\|Q(t,\mu)\| : \mu \in M\} \leqslant C_Q \exp(-\Theta(t)t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, C_Q – постоянная (своя для каждой функции Q), и не уменьшают показатели Ляпунова системы A. Спектр $\Lambda(A+Q)$ показателей Ляпунова возмущённой системы является функцией $M \to \overline{\mathbb{R}}^n$ параметра μ. Получено полное описание класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(A+Q))$, когда A пробегает класс $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$. Показано, в частности, что классы таких пар совпадают между собой, т.е. не зависят от выбора функции Θ.

DOI: 10.31857/S0374064121110042

Для заданного натурального $n \geqslant 2$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $\mathcal{M}^n$ – его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Кроме того, через $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $C\mathcal{M}^n$ будем обозначать подмножества в $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ соответственно, образованные системами с непрерывными коэффициентами. Далее мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A(\cdot)$ и пишем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и т.п.

Напомним, что *характеристическим показателем* вектор-функции $f : P \to \mathbb{R}^n$, заданной на неограниченном подмножестве P полуоси $\mathbb{R}_+$, называется величина (полагаем $\ln 0 = -\infty$)

$$\lambda[f] = \varlimsup_{P \ni t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|f(t)\|,$$

а *показателями Ляпунова* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ – величины [1]

$$\lambda_i(A) = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{x \in L} \lambda[x], \quad i = \overline{1, n},$$

где $S(A)$ – векторное пространство решений системы (1), а $G_i(S(A))$ – множество его i-мерных подпространств. В наших обозначениях показатели Ляпунова нумеруются, в отличие от [1], в порядке неубывания. Набор $\Lambda(A) \equiv (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ называется *спектром показателей Ляпунова* системы (1).

Так как мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$, их показатели Ляпунова могут, вообще говоря, принимать несобственные значения, т.е. являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty, +\infty\}$, которую наделим стандартным порядком и порядковой топологией. Если все показатели Ляпунова системы (1) конечны (что заведомо имеет место, если $A \in \mathcal{M}^n$), то они совпадают с величинами, определёнными в [2, § 3.1.3; 3, гл. III, § 4].

В работе [4] О. Перрон построил пример системы $A \in C\mathcal{M}^2$ и такой её непрерывной 2×2-матрицы-возмущения Q, экспоненциально убывающей к нулю на бесконечности, что каждый из показателей Ляпунова возмущённой системы $A + \mu Q$ при всех $\mu \neq 0$ принимает одно и то же значение, большее значения соответствующего показателя исходной системы A. Таким образом, в примере Перрона показатели Ляпунова являются ступенчатыми функциями параметра.

О. Перроном построен также [5] пример системы $A \in C\mathcal{M}^2$ с отрицательными показателями Ляпунова и такого её непрерывного возмущения $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^2$ (G – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$) высшего порядка малости (т.е. $\|f(t,x)\|/\|x\| \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$), что характеристический показатель любого имеющего в начальный момент $t = 0$ ненулевую первую компоненту решения возмущённой системы $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ больше некоторого положительного числа, а характеристические показатели остальных решений совпадают со старшим показателем Ляпунова невозмущённой линейной системы.

Эти примеры Перрона послужили отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов линейных и нелинейных возмущений на показатели Ляпунова систем из $\mathcal{M}^n$, а результаты, полученные в этом направлении, составляют существенную часть современной теории показателей Ляпунова. Эффект скачкообразного изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}^n$ при тех или иных "малых" её возмущениях назван в монографии [6, гл. 4] *эффектом Перрона*. Позднее, начиная с работы [7], это название – эффект Перрона – стало использоваться только применительно к ситуации (её, формально говоря, и рассмотрел О. Перрон), при которой возмущения не уменьшают показатели Ляпунова исходной системы (этой терминологии мы и следуем в дальнейшем). В отличие от [6, 7], в которых эффект Перрона, как в работе [5], рассматривался при возмущениях высшего порядка малости, мы в соответствии с работой [4] рассматриваем линейные убывающие (в частности, экспоненциально) к нулю возмущения матриц коэффициентов систем из $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и в этом случае называем, следуя работе [8], эффект Перрона *линейным*.

Перейдём к более общей ситуации. Пусть M – метрическое пространство. Рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом $\mu \in M$ система (2) имеет непрерывные коэффициенты. Зафиксировав $i = \overline{1,n}$ и поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие i-й показатель Ляпунова системы (2), получим функцию $\lambda_i(\cdot\,;A) : M \to \overline{\mathbb{R}}$, которая называется i-м *показателем Ляпунова семейства* (2). Функция $\Lambda(\cdot\,;A) \equiv (\lambda_1(\cdot\,;A),\ldots,\lambda_n(\cdot\,;A))$ называется *спектром показателей Ляпунова* того же семейства.

Вопрос о возможном характере зависимости показателей Ляпунова от параметра поставлен В.М. Миллионщиковым в работе [9]. В этой же работе установлено, что если отображение $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывно, то каждый из показателей Ляпунова семейства (2) принадлежит классу функций, представимых в виде поточечного предела убывающей последовательности функций первого класса Бэра. В монографии [10, § 37] установлено, что указанный класс функций допускает и другое описание: это в точности те функции $M \to \overline{\mathbb{R}}$, для которых прообраз любого луча $[r,+\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, является G_δ-множеством (отметим, что в [10] рассматриваются только $\mathbb{R}$-значные функции; к таким функциям при помощи сохраняющего порядок гомеоморфизма $\overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ сводится рассматриваемая нами ситуация $\overline{\mathbb{R}}$-значных функций, см. [11]). Следуя [10], будем обозначать этот класс функций $({}^*,G_\delta)$.

В работе [12] для каждого метрического пространства M получено полное описание спектров показателей Ляпунова $\Lambda(\cdot\,;A)$, отвечающих семействам (2) с непрерывной функцией $A(\cdot\,,\cdot)$, которая ограничена при каждом $\mu \in M$, а в работе [11] аналогичное описание получено для семейств с произвольной непрерывной функцией $A(\cdot\,,\cdot)$, именно, доказано, что функция $F = (f_1,\ldots,f_n) : M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ является спектром показателей Ляпунова некоторого семейства (2) с непрерывной функцией $A(\cdot,\cdot)$ тогда и только тогда, когда её компоненты удовлетворяют условию $f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n$ и принадлежат классу $({}^*, G_\delta)$. Условимся обозначать класс всех таких функций F через $\mathfrak{G}^n(M)$.

Для заданной функции $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ через $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$ обозначим класс непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, каждая из которых для некоторого числа $C_Q > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q e^{-\Theta(t)t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В работе [13] для каждых метрического пространства M и $i \in \{1,\ldots,n\}$ получено полное описание класса

$$\Big\{\lambda_i(\cdot\,; A+Q) : A \in C\mathcal{M}^n, \;\; Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma](M)\Big\},$$

а в работе [14] – класса

$$\Big\{\Lambda(\cdot\,; A+Q) : A \in C\mathcal{M}^n, \;\; Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma](M)\Big\}.$$

Последний состоит из всех ограниченных функций $F \in \mathfrak{G}^n(M)$. Отметим, что в силу теоремы Богданова–Гробмана [15, 16] для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n$ существует такое число $\sigma_0 > 0$, что при всех $\sigma > \sigma_0$ и $\mu \in M$ спектры показателей Ляпунова систем $A(\cdot)$ и $A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)$, если $Q \in \mathcal{Q}^n[\sigma](M)$, совпадают между собой. Для систем с неограниченными коэффициентами это уже не имеет места – в работе [17] построена такая система $A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, что для любого метрического пространства M класс $\{\Lambda(\cdot\,; A+Q) : Q \in \mathcal{Q}^n[3^{-1}\ln t](M)\}$ совпадает с классом $\mathfrak{G}^n(M)$, т.е. на таких – убывающих быстрее всякой экспоненты – параметрических возмущениях реализуется любой возможный для семейства (2) с непрерывными коэффициентами спектр показателей Ляпунова.

Для каждой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ через $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ обозначим подкласс класса $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$, состоящий из тех возмущений, которые не уменьшают её показателей Ляпунова, т.е. для любых системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и её возмущения $Q \in \mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ при всех $i = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$ выполняется неравенство $\lambda_i(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_i(A)$. Очевидно, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$ не пуст, поскольку ему принадлежит тождественно нулевая матрица.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q))$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы A и функции $\Lambda(\cdot\,; A+Q)$, когда A пробегает множество $C\widetilde{\mathcal{M}}^n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)$, т.е. класса

$$\Pi^n[\Theta](M) = \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)) : A \in C\widetilde{\mathcal{M}}^n, \;\; Q \in \mathcal{Q}^n[\Theta, A](M)\}.$$

Другими словами, требуется получить описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях систем с неограниченными коэффициентами. Отметим, что полное описание линейного эффекта Перрона для систем с ограниченными коэффициентами, т.е. описание класса пар

$$\Big\{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)) : A \in C\mathcal{M}^n, \;\; Q \in \bigcup_{\sigma\in(0,+\infty)} \mathcal{Q}^n[\sigma, A](M)\Big\},$$

составленного из спектра исходной системы с ограниченными непрерывными коэффициентами и спектра возмущённой системы с параметрическим возмущением, экспоненциально убывающим к нулю на бесконечности и не уменьшающим значений показателей Ляпунова исходной системы, получено в работе [8].

Решение поставленной выше задачи содержит

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 2$, M *– метрическое пространство, а* $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция. Пара* $(l, F(\cdot))$, *где* $l = (l_1, \ldots, l_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ *и* $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)) : M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$, *тогда и только тогда принадлежит классу* $\Pi^n[\Theta](M)$, *когда выполняются следующие условия: 1)* $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, *2)* $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1,n}$, *3) функция* $F(\cdot)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{G}^n(M)$.

Для доказательства теоремы нам потребуются четыре леммы, первые три из которых хорошо известны и легко доказываются (см. [17]), а четвёртая установлена в работе [18, лемма 2].

Лемма 1. *Пусть система (1) на полуинтервале* $[c, d) \subset (0, +\infty)$ *диагональна и имеет постоянные коэффициенты. Тогда для каждого* $i = \overline{1,n}$ *и любого решения* $x(\cdot)$ *этой системы функция* $\chi_i^x : [c, d] \to \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty\}$, *задаваемая равенством* $\chi_i^x(t) = t^{-1} \ln |x_i(t)|$, $t \in [c, d]$, *монотонна (вообще говоря, нестрого).*

Лемма 2. *Пусть* $P \subset \mathbb{R}_+$ *– неограниченное множество. Тогда для любой вектор-функции* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{т}} : P \to \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство* $\lambda[x] = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda[x_i]$.

Следуя [19, глава IV, § 2], скажем, что системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *слабо ляпуновски эквивалентны*, если существуют фундаментальные матрицы $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ этих систем, удовлетворяющие условию
$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\|) < \infty, \quad \text{где} \quad L(t) = Y(t)X^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$
Нетрудно убедиться, что введённое отношение (слабой ляпуновской эквивалентности) является отношением эквивалентности на $\widetilde{\mathcal{M}}^n$. Отметим, что на множестве $\mathcal{M}^n$ отношения классической ляпуновской эквивалентности [2, § 18.2] и слабой ляпуновской эквивалентности совпадают между собой: если выполнено условие (3) и коэффициенты одной из рассматриваемых систем ограничены, то дополнительное условие $\sup\{\|\dot{L}(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$ (производная вычисляется в тех точках, где она определена) равносильно [2, § 18.2] ограниченности коэффициентов другой системы. Заметим также, что в работе [20] используется другое, не равносильное нашему, определение слабой ляпуновской эквивалентности.

Лемма 3. *Если системы* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *и* $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *слабо ляпуновски эквивалентны, то их одноимённые показатели Ляпунова одинаковы:* $\lambda_i(A) = \lambda_i(B)$, $i = \overline{1,n}$.

Лемма 4. *Пусть системы* $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *удовлетворяют условию*
$$\max\{\|A(t)\|, \|B(t)\|\} \leqslant f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
где $f : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ *– непрерывная функция, для которой интеграл* $\int_0^{+\infty} f(s)\, ds$ *расходится. Тогда если величина*
$$\left\| \int\limits_t^{+\infty} (B(s) - A(s))\; ds \right\| \exp\biggl(3 \int\limits_0^t f(s)\, ds\biggr), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
ограничена, то системы A *и* B *слабо ляпуновски эквивалентны.*

Доказательство теоремы. 1. Установим сначала необходимость условий теоремы. Условия 1), 2) вытекают непосредственно из определений, а условие 3) – из [9, леммы 6–9] (см. также [11, следствие 1]).

2. Для доказательства достаточности воспользуемся подходящей модификацией построения, предложенного в работе [8]. Без ограничения общности можно считать, что функция Θ положительна, возрастает и не ограничена сверху (в противном случае заменим её функцией $t \mapsto e^t + \max\limits_{s \in [0,t]} |\Theta(s)|$, $t \in \mathbb{R}_+$).

Определим последовательность T_m^j, $m \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$, $j = \overline{0,6}$, целых неотрицательных чисел рекуррентно равенствами $T_0^0 = 0$ и
$$T_{m+1}^0 = T_m^6, \quad T_m^j = T_m^{j-1} + \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; j = 2, 5, \\ 2^{m+1}, & \text{если} \;\; j = 1, 3, 4, 6, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}_0, \qquad j = \overline{1,6}.$$

Нетрудно убедиться, что $T_m^0 = 4(2^{m+1}-2)+2m,\ m \in \mathbb{N}_0$.

Пусть функция $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ и набор $l = (l_1, \ldots, l_n)$ удовлетворяют условиям 1)–3), причём l не имеет конечных отрицательных компонент, т.е. для любого $i = \overline{1,n}$ имеем либо $l_i \geqslant 0$, либо $l_i = -\infty$. В силу [21] (см. также [11, следствие 2]) для каждого $i = \overline{1,n}$ существует последовательность непрерывных функций $f_m^i : M \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$, такая, что справедливо представление

$$f_i(\mu) = \varlimsup_{m\to\infty} f_m^i(\mu), \quad \mu \in M.$$

Для каждых $m \in \mathbb{N}_0$ и $i = \overline{1,n}$ положим $\Theta_m = \Theta(T_{m+1}^0)$, $l_i^m = \min\{\max\{l_i, -\Theta_m\}, \Theta_m\}$ и $L_i^m = \sum_{k=0}^{m-1} l_i^k (T_{k+1}^0 - T_k^0)$. Так как $\Theta_m \to +\infty$ при $m \to \infty$, то, заменяя в случае необходимости функцию f_m^i функцией $\min\{f_m^i, \Theta_m\}$, можно считать, что $f_m^i(\mu) \leqslant \Theta_m$ при всех $m \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$. Определим функцию $\sigma_m : M \to \mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_m(\mu) = (L_{\theta(m)}^m + 35\Theta_m 2^{m+1} - f_{\max\{q,0\}}^{\theta(m)}(\mu) T_m^3)/T_m^2, \quad \mu \in M,$$

где $q = (m - \theta(m))/n$, а функция $\theta : \mathbb{N}_0 \to \{1, \ldots, n\}$ задаётся условием $\theta(m) \equiv m \pmod n$.

3. Для упрощения дальнейшей записи через Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$, условимся обозначать полуинтервал $[T_m^{j-1}, T_m^j)$, через Δ_m – полуинтервал $[T_m^0, T_{m+1}^0)$, а через $\bar\Delta_m^j$ и $\bar\Delta_m$ – соответствующие отрезки.

Следуя [8], для каждой тройки чисел $\alpha = (a,b,c)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^3$ определим на отрезке $\bar\Delta_m$ матричнозначную функцию $A[\alpha; m]$ при помощи равенства

$$A[\alpha;m](t) = \begin{cases} \operatorname{diag}[-c, -2c] & \text{при } \ t \in \Delta_m^1 \bigsqcup \Delta_m^4, \\ O_2 & \text{при } \ t \in \Delta_m^2 \bigsqcup \Delta_m^5, \\ \operatorname{diag}[c, 2c] & \text{при } \ t \in \Delta_m^3, \\ \operatorname{diag}[a+c, b+2c] & \text{при } \ t \in \bar\Delta_m^6. \end{cases}$$

Для матрицы Коши $X_{A[\alpha;m]}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы

$$\dot x = A[\alpha;m](t)x, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \bar\Delta_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$X_{A[\alpha;m]}(T_m^1, T_m^0) = X_{A[\alpha;m]}(T_m^2, T_m^0) = X_{A[\alpha;m]}(T_m^4, T_m^0) = X_{A[\alpha;m]}(T_m^5, T_m^0) = \operatorname{diag}[e^{-cd_m}, e^{-2cd_m}],$$

$$X_{A[\alpha;m]}(T_m^3, T_m^0) = E_2, \quad X_{A[\alpha;m]}(T_m^6, T_m^0) = \operatorname{diag}[e^{ad_m}, e^{bd_m}], \tag{4}$$

где обозначено $d_m = 2^{m+1}$, а E_2 – единичная 2×2-матрица.

Для всякого $\sigma > 0$ определим на отрезке $\bar\Delta_m$ матричнозначную функцию $Q[\sigma; m]$ при помощи равенства

$$Q[\sigma;m](t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^j e^{-\sigma T_m^2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } \ t \in \Delta_m^j, \quad j \in \{2,5\}, \\ O_2 & \text{при остальных } \ t \in \bar\Delta_m, \end{cases}$$

где O_2 – нулевая 2×2-матрица. Положим $C[\alpha,\sigma;m] = A[\alpha;m] + Q[\sigma;m]$. Тогда для матрицы Коши $X_{C[\alpha,\sigma;m]}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы

$$\dot x = C[\alpha,\sigma;m](t)x, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \bar\Delta_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^1, T_m^0) = X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^5, T_m^0) = \operatorname{diag}[e^{-cd_m}, e^{-2cd_m}],$$

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^2,T_m^0)=X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^4,T_m^0)=\begin{pmatrix} e^{cd_m} & 0\\ e^{-\sigma T_m^2-cd_m} & e^{-2cd_m}\end{pmatrix},$$

$$X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^3,T_m^0)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ e^{cd_m-\sigma T_m^2} & 1\end{pmatrix},\quad X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^6,T_m^0)=\operatorname{diag}[e^{ad_m},e^{bd_m}]. \tag{5}$$

4. Построим кусочно-постоянную матричнозначную функцию $\widetilde{A}(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и семейство кусочно-постоянных матричнозначных функций $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$, $\mu\in M$, со следующими свойствами: 1) функция $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ принадлежит классу $\mathcal{Q}^n[\Theta](M)$; 2) все точки разрыва функций $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$, $\mu\in M$, содержатся в множестве $\{T_m^j: m\in\mathbb{N}_0,\ \ j=\overline{1,6}\}$; 3) спектр $\Lambda(\widetilde{A})$ показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с набором l; 4) спектр $\Lambda(\cdot\,;\widetilde{A}+\widetilde{Q})$ показателей Ляпунова семейства $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ совпадает с функцией $F(\cdot)$.

4.1. Для каждого $m\in\mathbb{N}_0$ определим на полуинтервале Δ_m систему $\widetilde{A}(\cdot)$ равенствами

$$\dot{x}_j=l_j^m x_j,\quad \text{если}\quad j\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}, \tag{6}$$

$$\dot{y}=A[((4+2^{-m})l_{\theta(m)}^m,(4+2^{-m})l_{\theta(m+1)}^m,35\Theta_m)^{\mathrm{T}};m](t)y, \tag{7}$$

а систему $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$ при всяком $\mu\in M$ – равенствами

$$\dot{x}_j=0,\quad \text{если}\quad j\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}, \tag{8}$$

$$\dot{y}=Q[\sigma_m(\mu);m](t)y. \tag{9}$$

В равенствах (7) и (9) обозначено $y=(x_{\theta(m)},x_{\theta(m+1)})^{\mathrm{T}}$. Так как $\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}_0}\Delta_m=\mathbb{R}_+$, то системы $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$, $\mu\in M$, заданы на всей временно́й полуоси.

Для доказательства свойства 1) заметим, что при всех $m\in\mathbb{N}_0$ и $\mu\in M$ справедливы неравенства $4T_m^2>T_{m+1}^0$ и $\sigma_m(\mu)>4\Theta_m$. Поэтому если $t\in\bar{\Delta}_m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}_0$, то

$$\|Q(t,\mu)\|\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)T_m^2}\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)tT_m^2/T_{m+1}^0}\leqslant e^{-\sigma_m(\mu)t/4}\leqslant e^{-\Theta_m t}\leqslant e^{-\Theta(t)t},\quad \mu\in M.$$

Свойство 2) выполнено по построению.

4.2. Зафиксируем $\mu\in M$ и вычислим показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\,\cdot\,,\mu)\equiv\widetilde{A}(\cdot)+{}$ $+\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\mu)$. С этой целью для каждого $i=\overline{1,n}$ найдём характеристический показатель решения $x^i(\cdot)$ этой системы, задаваемого начальным условием $x^i(0)=e^i$, где e^i – i-й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Если $j\in\{1,\ldots,n\}$ не совпадает ни с одним из чисел i и $\theta(i+1)$, то из задания систем (6)–(9) вытекает, что j-я координата решения $x^i(\cdot)$ тождественно равна нулю. Таким образом, имеем $\|x^i(t)\|=\|z^i(t)\|\equiv\|(x_i^i(t),x_{\theta(i+1)}^i(t))^{\mathrm{T}}\|$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$ и, стало быть, справедливо равенство $\lambda[x^i]=\lambda[z^i]$.

Зададим функции $\chi_k^i:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty\}$, $k=1,2$, равенством $\chi_k^i(t)=t^{-1}\ln|z_k^i(t)|$, $t>0$. Заметим, что если $i\neq\theta(m)$, то функция $z_2^i(\cdot)$ тождественно равна нулю на каждом из отрезков $\bar{\Delta}_m^2$ и $\bar{\Delta}_m^5$, а функция $\chi_1^i(\cdot)$ монотонна на них по лемме 1, поскольку функция $z_1^i(\cdot)$ удовлетворяет на соответствующих полуинтервалах автономному уравнению. Если же $i=\theta(m)$, то на каждом из промежутков Δ_m^2 и Δ_m^5 вектор-функция $z^i(\cdot)$ удовлетворяет системе (9), отсюда, учитывая, что $\|Q[\sigma_m(\mu);m](t)\|\leqslant 1$, $t\in\bar{\Delta}_m$, получаем двустороннюю оценку

$$\|z^i(T_m^{j-1})\|\exp(-(t-T_m^{j-1}))\leqslant\|z^i(t)\|\leqslant\|z^i(T_m^{j-1})\|\exp(t-T_m^{j-1}),\quad t\in\bar{\Delta}_m^j,\quad j=2,5.$$

Принимая во внимание, что каждый из отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $j=2,5$, имеет длину 1, приходим к выводу, что при вычислении характеристического показателя $\lambda[z^i]$ вместо отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $j={}$ $=2,5$, $m\in\mathbb{N}_0$, достаточно рассмотреть только их левые концы. Таким образом, справедливо равенство $\lambda[z^i]=\lambda[z^i|_{\mathrm{T}}]$, где $\mathrm{T}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}(\bar{\Delta}_m^1\bigcup\bar{\Delta}_m^3\bigcup\bar{\Delta}_m^4\bigcup\bar{\Delta}_m^6)$.

Система $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$ является диагональной и имеет постоянные коэффициенты на каждом из промежутков Δ_m^j, $j=1,3,4,6$, $m\in\mathbb{N}_0$, значит, по лемме 1 функции χ_k^i, $k=1,2$, монотонны на соответствующих отрезках. Следовательно, при вычислении их верхних пределов при $t\to\to+\infty$ по множеству T, т.е. показателей $\lambda[z_k^i|_{\mathrm{T}}]$, $k=1,2$, достаточно ограничиться концами этих отрезков. Если $i\notin\{\theta(m),\theta(m+1)\}$, то функция $z_1^i(\cdot)$ на промежутке Δ_m удовлетворяет уравнению (6), поэтому по лемме 1 функция $\chi_1^i(\cdot)$ монотонна на отрезке $\bar{\Delta}_m$, а функция $\chi_2^i(\cdot)$ в силу (6)–(9) тождественно равна $-\infty$ на том же отрезке. Из сказанного выше следует, что при вычислении показателей $\lambda[z_k^i|_{\mathrm{T}}]$, $k=1,2$, достаточно рассмотреть множество $\widetilde{\mathrm{T}}$, состоящее из точек T_m^j, $j=0,1,3,4$, для тех $m\in\mathbb{N}_0$, для которых одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ кратно n, и точек T_m^0 для всех остальных значений m. Подытоживая предыдущие рассуждения и применяя лемму 2, получаем

$$\lambda[z^i]=\lambda[z^i|_{\mathrm{T}}]=\max\{\lambda[z_1^i|_{\mathrm{T}}],\lambda[z_2^i|_{\mathrm{T}}]\}=\max\{\lambda[z_1^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}],\lambda[z_2^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}]\}.$$

Из последнего равенства в (5) и задания систем (6)–(9) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m\in\mathbb{N}_0$ выполнено соотношение $x_i(T_{m+1}^0)=x_i(T_m^0)\exp(l_i^m(T_{m+1}^0-T_m^0))$, из которого следует, что

$$x_i(T_m^0)=\exp(L_i^m)x_i(0),\quad m\in\mathbb{N}_0. \tag{10}$$

В частности,

$$z^i(T_m^0)=\exp(L_i^m)(1,0)^{\mathrm{T}},\quad m\in\mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{m\to\infty}(1/T_m^0)\ln\|z^i(T_m^0)\|=\varlimsup_{m\to\infty}L_i^m/T_m^0=l_i.$$

Положим $m_q^i=qn+i$, $q\in\mathbb{N}_0$, $i=\overline{1,n}$. Из равенств (5), (11) и оценки $L_i^m\leqslant\Theta_mT_m^0$ вытекают соотношения

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i}^1)\ln\|z^i(T_{m_q^i}^1)\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}-35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1})/T_{m_q^i}^1=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i}^4)\ln|z_2^i(T_{m_q^i}^4)|\leqslant\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i}^4)\ln|z_1^i(T_{m_q^i}^4)|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}-35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1})/T_{m_q^i}^4=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i}^3)\ln|z_2^i(T_{m_q^i}^3)|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i}+35\Theta_{m_q^i}2^{m_q^i+1}-\sigma_{m_q^i}(\mu)T_{m_q^i}^2)/T_{m_q^i}^3=\varlimsup_{q\to\infty}f_q^i(\mu)=f_i(\mu),$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i}^3)\ln|z_1^i(T_{m_q^i}^3)|=\varlimsup_{q\to\infty}L_i^{m_q^i}/T_{m_q^i}^3\leqslant l_i,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i-1}^1)\ln\|z^i(T_{m_q^i-1}^1)\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i-1}-35\Theta_{m_q^i-1}2^{m_q^i+1})/T_{m_q^i-1}^1=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i-1}^4)\ln\|z^i(T_{m_q^i-1}^4)\|=\varlimsup_{q\to\infty}(L_i^{m_q^i-1}-35\Theta_{m_q^i-1}2^{m_q^i+1})/T_{m_q^i-1}^4=-\infty,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty}(1/T_{m_q^i-1}^3)\ln\|z^i(T_{m_q^i-1}^3)\|=\varlimsup_{q\to\infty}L_i^{m_q^i-1}/T_{m_q^i-1}^3\leqslant l_i.$$

В силу приведённых выше соотношений и неравенства $f_i(\mu)\geqslant l_i$ получаем, что $\lambda[z^i]=f_i(\mu)$. Таким образом, $\lambda[x^i]=f_i(\mu)$.

4.3. Для каждого $i=\overline{1,n}$ положим $\mathrm{S}_i=\{T_{m_q^i}^3:q\in\mathbb{N}_0\}$. В силу п. 4.2 справедливы равенства

$$\lambda[x^i]=\lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}]=f_i(\mu),\quad\lambda[x^k|_{\mathrm{S}_i}]\leqslant l_k,\quad k=\overline{1,n},\quad k\neq i.$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы работы [8], устанавливаем нормальность [22] базиса $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ решений системы $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$. Таким образом, $\lambda[x^i]$, $i=\overline{1,n}$, – показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$. С учётом п. 4.2 имеем равенство $\Lambda(\mu;\widetilde{C})=F(\mu)$.

4.4. Вычислим теперь показатели Ляпунова невозмущённой системы $\widetilde{A}$. Для каждого $i = \overline{1,n}$ обозначим через $x^i(\cdot)$ решение этой системы, выходящее в момент времени $t=0$ из вектора e^i. Так как система $\widetilde{A}$ является диагональной, то все компоненты решения $x^i(\cdot)$, кроме i-й, тождественно равны нулю. Таким образом, $\|x^i(t)\| = |x^i_i(t)|$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Зададим функцию $\chi^i : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty\}$ равенством $\chi^i(t) = t^{-1}\ln\|x^i(t)\|,\ t > 0$. Система $\widetilde{A}$ имеет постоянные коэффициенты на каждом из промежутков $\Delta^j_m,\ j = \overline{1,6},\ m \in \mathbb{N}_0$, поэтому по лемме 1 функция χ^i монотонна на соответствующих отрезках. Следовательно, при вычислении её верхнего предела при $t \to +\infty$, т.е. показателя $\lambda[x^i]$, можно ограничиться концами указанных промежутков. Так как функция $x^i(\cdot)$ постоянна на каждом из отрезков $\bar{\Delta}^j_m,\ j = 2,5,\ m \in \mathbb{N}_0$, и $\lim\limits_{m\to\infty} T^2_m/T^1_m = \lim\limits_{m\to\infty} T^5_m/T^4_m = 1$, то достаточно рассмотреть только левые их концы. Более того, если $i \notin \{\theta(m), \theta(m+1)\}$, то функция $x^i_i(\cdot)$ на промежутке Δ_m удовлетворяет автономному уравнению (6), поэтому функция $\chi^i(\cdot)$ монотонна на отрезке $\bar{\Delta}_m$. Из сказанного следует, что $\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}]$, где множество $\widetilde{\mathrm{T}}$ описано в п. 4.2.

Из последнего равенства в (4) и задания системы (6), (7) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство (10). Из равенств (4), (10) и оценки $L^m_i \leqslant \Theta_m T^0_m$ вытекают соотношения

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^j_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} (L_i^{m^i_q} - 35\Theta_{m^i_q} 2^{m^i_q+1})/T^j_{m^i_q} = -\infty, \quad j = 1,4,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^j_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} (L_i^{m^i_q-1} - 35\Theta_{m^i_q-1} 2^{m^i_q+1})/T^j_{m^i_q-1} = -\infty, \quad j = 1,4,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^3_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} L_i^{m^i_q}/T^3_{m^i_q} \leqslant l_i, \quad \varlimsup_{q\to\infty} \chi^i(T^3_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} L_i^{m^i_q-1}/T^3_{m^i_q-1} \leqslant l_i,$$

где обозначено $m^i_q = qn + i,\ q \in \mathbb{N}_0,\ i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\widetilde{\mathrm{T}}}] = l_i$. Так как система $\widetilde{A}$ диагональна, то базис $x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)$ является нормальным. Таким образом, спектр показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с набором l.

5. Построим теперь непрерывную матричнозначную функцию $A(\cdot)$ и семейство непрерывных матричнозначных функций $Q(\,\cdot\,,\mu),\ \mu \in M$, такие, что спектры показателей Ляпунова систем $\widetilde{A}$ и A, а также спектры показателей Ляпунова семейств $\widetilde{A} + \widetilde{Q}$ и $A + Q$ совпадают между собой и выполнены неравенства

$$\|A(t)\| \leqslant \|\widetilde{A}(t)\|, \quad \|Q(t,\mu)\| \leqslant \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M.$$

Выберем непрерывную возрастающую функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнялось неравенство $\|\widetilde{A}(t)\| + 1 \leqslant f(t)$. Тогда $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \leqslant f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in M$, поскольку $\|\widetilde{Q}(t,\mu)\| \leqslant 1$. Положим

$$T_{6m+j} = T^j_m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1,6}, \quad F(t) = 3\int\limits_0^t f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\delta_k = 2^{-k}\exp(-F(T_{k+1}))/f(T_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, выберем непрерывную (например, кусочно-линейную) функцию $s : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, которая тождественно равна нулю в окрестности каждой из точек T_k и тождественно равна единице на каждом из отрезков $[T_k + \delta_k, T_{k+1} - \delta_{k+1}],\ k \in \mathbb{N}$.

Положим $A(t) = s(t)\widetilde{A}(t),\ Q(t,\mu) = s(t)\widetilde{Q}(t,\mu),\ C(t,\mu) = s(t)\widetilde{C}(t,\mu),\ t \in \mathbb{R}_+,\ \mu \in M$. Так как матричнозначная функция $\widetilde{A}(\cdot)$ постоянна на каждом интервале $(T_k, T_{k+1}),\ k \in \mathbb{N}$, то матричнозначная функция $A(\cdot)$ непрерывна. Покажем, что матричнозначная функция $Q(\,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна. Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_0 \in M$. Если t_0 совпадает с одной из точек $T_k,\ k \in \mathbb{N}$, или лежит внутри одного из промежутков $\Delta^j_m,\ m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,3,4,6$, то по построению найдётся такая окрестность U точки t_0, что $Q(t,\mu)$ – нулевая матрица при всех $t\in U$ и $\mu\in M$. Если t_0 лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m\in\mathbb{N}_0$, $j=\overline{2,5}$, то $Q(\,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t_0,μ_0) как произведение постоянной по t в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывной по μ матричнозначной функции $\widetilde{Q}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и непрерывной функции $s(\cdot)$.

Пусть для некоторых $k',k''\in\mathbb{N}$ выполнены включения $t'\in[T_{k'},T_{k'+1})$ и $t''\in[T_{k''},T_{k''+1})$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\int\limits_{t'}^{t''}\|s(\tau)\widetilde{C}(\tau,\mu)-\widetilde{C}(\tau,\mu)\|\,d\tau\leqslant\sum_{k=k'}^{k''+1}\int\limits_{T_k-\delta_k}^{T_k+\delta_k}f(\tau)\,d\tau\leqslant\sum_{k=k'}^{k''+1}2\delta_k f(T_{k+1})\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=k'}^{k''+1}2^{-k}\exp(-F(T_{k+1}))\leqslant 2\exp(-F(t')),$$

из которой следует, что интеграл $I(t,\mu)=\int_t^{+\infty}\|C(\tau,\mu)-\widetilde{C}(\tau,\mu)\|\,d\tau$ при всех $\mu\in M$ и $t\in\mathbb{R}_+$ сходится и удовлетворяет оценке $I(t,\mu)\exp F(t)\leqslant 2$. В силу леммы 4 системы $C(\cdot\,,\mu)$ и $\widetilde{C}(\cdot\,,\mu)$ слабо ляпуновски эквивалентны при каждом $\mu\in M$. Применяя лемму 3, заключаем, что спектры показателей Ляпунова этих систем совпадают между собой. Аналогичными рассуждениями устанавливается совпадение спектров показателей Ляпунова систем A и $\widetilde{A}$.

6. Пусть теперь заданы набор $l\in(\overline{\mathbb{R}})^n$ и функция $F:M\to(\overline{\mathbb{R}})^n$, удовлетворяющие условиям 1)–3) теоремы, причём l_{i_0}, $i_0=\overline{1,n}$, – первый слева конечный отрицательный элемент набора l. По доказанному существуют система $A_0\in C\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и семейство $Q\in\mathcal{Q}^n[\Theta,A_0](M)$, удовлетворяющие равенствам $\Lambda(A_0)=(l_1-l_{i_0},\ldots,l_n-l_{i_0})$ и $\Lambda(\cdot\,;A_0+Q)=(f_1-l_{i_0},\ldots,f_n-l_{i_0})$ (полагаем $-\infty-a=-\infty$ и $+\infty-a=+\infty$ для любого $a\in\mathbb{R}$).

Напомним следующее хорошо известное утверждение: показатели Ляпунова двух систем $\dot{x}=B(t)x$ и $\dot{y}=(B(t)+aE_n)y$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}_+$, где $a\in\mathbb{R}$, а E_n – единичная $n\times n$-матрица, связаны между собой равенством $\lambda_i(B+aE_n)=\lambda_i(B)+a$, $i=\overline{1,n}$, которое вытекает из того, что для решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ этих систем с одним и тем же начальным вектором $(x(0)=y(0))$ имеет место тождество $y(t)\equiv x(t)\exp(at)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Положим $A(\cdot)=A_0(\cdot)+l_{i_0}E_n$. Тогда вследствие выбора системы A_0 и сказанного выше получаем, что $\Lambda(A)=l$. По той же причине спектр $\Lambda(\cdot\,;A+Q)$ показателей Ляпунова семейства $A+Q$ с так определённой матричнозначной функцией $A(\cdot)$ совпадает с функцией $F(\cdot)$. Условие $Q\in\mathcal{Q}^n[\Theta,A](M)$ очевидно выполняется. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.В. Быкову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миллионщиков В.М.* Формулы для показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. Тбилиси, 1987. Т. 22. С. 150–178.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
4. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 31. Hf. 4. S. 748–766.
5. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728.
6. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М., Ижевск, 2006.
7. *Коровин С.К., Изобов Н.А.* Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550.

8. *Барабанов Е.А., Быков В.В.* Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.
9. *Миллионщиков В.М.* Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380.
10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937.
11. *Карпук М.В.* Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 2. С. 55–71.
12. *Карпук М.В.* Показатели Ляпунова обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1140–1141.
13. *Быков В.В.* Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.
14. *Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.
15. *Богданов Ю.С.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.
16. *Гробман Д.М.* Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
17. *Быков В.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 3–22.
18. *Залыгина В.И.* О ляпуновской эквивалентности линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1325–1331.
19. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
20. *Барабанов Е.А.* Обобщение теоремы Былова о приводимости и некоторые его применения // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 12. С. 1592–1596.
21. *Stepanoff W.* Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. 1928. V. 11. P. 264–274.
22. *Миллионщиков В.М.* Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. заметки. 1985. Т. 38. Вып. 5. С 691–708.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 16.09.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.