ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1474–1482

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1:517.951

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. I

© 2021 г. В. И. Елкин

Рассматривается вопрос о применении дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: 10.31857/S0374064121110054

Введение. После приведения системы дифференциальных уравнений с частными производными к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u),$$

открывается возможность применения некоторых дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др.

1. Динамические системы с управлением и недоопределённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$h^k(t, y, dy/dt) = 0, \quad k = \overline{1, q}, \tag{1}$$

где h^k, $k = \overline{1, q}$, – заданные гладкие функции, $t \in \mathbb{R}^1$, $y = (y^1, \ldots, y^n)^{\text{т}} \in M$ (M – область в $\mathbb{R}^n$), $dy/dt = (dy^1/dt, \ldots, dy^n/dt)^{\text{т}}$. *Решением* системы (1) называется непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющая равенствам (1) всюду в точках её дифференцируемости. Система (1) называется *недоопределённой*, если $q < n$. Далее считаем это неравенство для системы (1) выполненным.

Динамической системой с управлением называется система уравнений вида

$$\dot{y}^i = f^i(t, y, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in [t_0, t_1] \times M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{2}$$

где $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы. Будем предполагать, что функции f^i, $\partial f^i/\partial y^j$, $\partial f^i/\partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y *фазовыми переменными* (*состояниями*), u – *управлениями* (*внешними воздействиями*). Множество M, называемое *фазовым пространством*, и множество U являются областями. Управления могут быть кусочно-непрерывными вектор-функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются *допустимыми*. *Решением* системы (2) называется непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что вектор-функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (2).

Недоопределённые системы являются более сложными математическими объектами, чем системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$dy^i/dt = f^i(t, y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^1 \times M. \tag{3}$$

Это проявляется, например, в том, что для систем (1) не верно утверждение о единственности решения, проходящего через заданную начальную точку (независимо от гладкости функций h^k).

Рассмотрим связь систем (2) и (1) между собой. Число уравнений в системе (1) меньше числа переменных. Поэтому все производные нельзя выразить из уравнений (1) через переменные y. Однако (по крайней мере локально) это можно сделать за счёт введения новых переменных. Пусть ранг якобиевой матрицы от функций h^k относительно производных dy^i/dt постоянен и равен q. Тогда по теореме о неявной функции некоторые q производных, соответствующих расположению главного минора в указанной матрице, (локально) выражаются через y и остальные $n-q$ производных, которые принимаются за новые параметрические переменные u. В результате соотношения (1) перейдут в соотношения (2). Обратно, аналогичным образом используя теорему о неявной функции и предположение о постоянстве ранга якобиевой матрицы от функций f^i относительно переменных u, можно перейти от системы (2) к двойственной системе (1) исключением переменных u (т.е. выражением их через y, dy/dt из одних уравнений и подстановкой в другие уравнения).

Отношение к уравнениям (2) именно как к системам с управлением сформировалось в прошлом веке, когда выяснилось, что некоторые реальные системы описываются такими соотношениями, причём функции $u(t)$ трактуются как внешние воздействия (управления). Оказалось, что некоторые задачи можно эффективно решать с помощью некоторых дифференциально-геометрических методов, использующих такие объекты как группа диффеоморфизмов, алгебра Ли векторных полей, распределение, кораспределение (система Пфаффа) и др. Указанные объекты связываются с системами (2) как некоторые ассоциированные с ними объекты и определяются правыми частями этих систем, а их классические свойства определяют управленческие свойства системы (2). Например, транзитивность ассоциированной группы связана с управляемостью (свойством достижимости), свойство допускать декомпозицию – с импримитивностью группы, вопрос о классификации аффинных систем с управлением связан с классическим вопросом классификации систем Пфаффа и т.д. [1–4].

Рассмотрим некоторые из ассоциированных объектов. Введём оператор полного дифференцирования по времени в силу системы (2):

$$X(u) := \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4}$$

(здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющемуся верхнему и нижнему индексам). Рассмотрим $X(u)$ как семейство операторов с параметром u. Придавая управлению u различные постоянные допустимые значения $u\in U$, получаем различные операторы (векторные поля) в области M, которые образуют семейство полей в M, которое назовём *ассоциированным.* Выделим в этом семействе базисное подсемейство, т.е. укажем такие допустимые значения $u_1,\ldots,u_p\in U$, что операторы

$$X_j := \frac{\partial}{\partial t} + f^i_j(t,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j=\overline{1,p}, \tag{5}$$

где $f^i_j(t,y)=f^i(t,y,u_j)$, линейно несвязаны, т.е. линейно независимы в каждой точке (t,y) (см. [1, определение 2.2]), а подстановка в (4) любого допустимого значения u приводит к оператору, который линейно связанно выражается через операторы $X_1,\ \ldots,\ X_p$:

$$X(u) = \varphi^j(t,y,u)X_j. \tag{6}$$

Таким образом, при любом допустимом управлении $u(t)$ оператор $X(u(t))$ линейно выражается через конечное число операторов X_j, не зависящих от управления.

После выделения базисного семейства $X_1,\ \ldots,\ X_p$ оно пополняется. Шаг классической процедуры пополнения заключается в вычислении коммутаторов $[X_j,X_k]$, $j,k=\overline{1,p}$. Если коммутатор линейно несвязан с операторами семейства, то он добавляется к нему; в противном случае он отбрасывается. Шаг повторяется для семейства, расширенного за счёт добавленных коммутаторов. Если на очередном шаге все вновь вычисленные коммутаторы отброшены, то процедура завершается. В частности, процедура завершится, если после очередного шага количество операторов в семействе сравняется с размерностью n пространства состояний. Итак, в результате пополнения получается полное семейство, состоящее из полей $X_1, \ldots, X_p$ и некоторых полей

$$X_k = \varphi_k^i(t,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad k = \overline{p+1,m}. \tag{7}$$

Поля (7) получены в результате вычисления коммутаторов полей (5), поэтому них отсутствует дифференцирование по независимой переменной t. В более общем смысле можно говорить о переходе от ассоциированного семейства к минимальной алгебре Ли, содержащей это семейство. Процедура пополнения составляет только часть такого перехода и заключается в построении базисного семейства этой алгебры, т.е. максимального числа линейно несвязанных полей алгебры. Не следует путать базисное семейство с базисом, который состоит из максимального числа линейно независимых полей алгебры, если размерность алгебры конечна [5, с. 90]. Заметим, что число полей в базисном семействе конечно и не превышает число переменных (в данном случае $n+1$). Также в более общем и современном смысле это число равно рангу распределения, порождаемого алгеброй (подробности см. в [3, с. 62]). Для целей данной работы достаточно иметь дело с базисным семейством, которое получается в результате классического процесса пополнения [6, с. 14; 5, с. 70–72].

1.1. Первые интегралы и управляемость. Напомним, что *первым интегралом системы* (3) называется такая функция $\Phi(t,y)$, которая на любом решении $y(t)$ системы (3) принимает постоянное значение

$$\Phi(t,y(t)) = \mathrm{const}.$$

Дифференцируемая функция $\Phi(t,y)$ является первым интегралом системы (3), если и только если она удовлетворяет следующему тождеству:

$$\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t} + f^i(t,y)\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y^i} = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in\mathbb{R}^1\times M \quad \text{и} \quad u\in U, \tag{8}$$

т.е. действие оператора полного дифференцирования по времени в силу системы (3) должно равняться нулю. *Первым интегралом системы с управлением* (2) естественно назвать функцию, принимающую постоянное значение на любых решениях, которые соответствуют произвольным допустимым управлениям $u(t)$. Таким образом, для таких функций $\Phi(t,y)$ должны выполняться соотношения

$$\frac{d\Phi(t,y(t))}{dt} = X(u(t))\Phi(t,y(t)) = \frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial t} + f^i(t,y,u(t))\frac{\partial\Phi(t,y(t))}{\partial y^i} = 0. \tag{9}$$

Первые интегралы совпадают с решениями системы уравнений, соответствующими всем ассоциированным операторам (4), т.е. системы

$$\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t} + f^i(t,y,u)\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial y^i} = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in[t_0,t_1]\times M \quad \text{и} \quad u\in U, \tag{10}$$

поскольку тождественное выполнение равенств (10) влечёт за собой и выполнение всех равенств (9).

С другой стороны, решения системы (10) совпадают с решениями полной системы дифференциальных уравнений, которая соответствует полям (6), (7):

$$X_j\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + f_j^i(t,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y^i} = 0, \quad j = \overline{1,p}, \tag{11}$$

$$X_k\Phi = \varphi_k^i(t,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y^i} = 0, \quad k = \overline{p+1,m}. \tag{12}$$

Согласно теории полных систем [5, с. 16; 4, с. 72] у такой системы имеется набор функционально независимых решений (интегральный базис) в количестве, равном разности между числом переменных и числом уравнений. Для системы (11), (12) таковым является некоторый набор функций $\Phi^1(t,y),\ \ldots,\ \Phi^{n-m}(t,y)$, для которого

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\Phi^k}{\partial y^i}\right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = m,$$

причём для любого интеграла $\Phi(y)$ справедливо представление

$$\Phi(y) = G(\Phi^1(y),\ldots,\Phi^m(y)),$$

где G – гладкая функция. Сделаем (локальную) замену координат

$$x^k = \Phi^k(t,y), \quad k=\overline{1,n}, \tag{13}$$

где $\Phi^k(t,y)$, $k=\overline{1,m}$, – полный набор интегралов, а $\Phi^k(t,y)$, $k=\overline{m+1,n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (13) являлась невырожденной. В новой системе координат система (2) приобретает вид

$$\dot x^k = 0, \quad k=\overline{1,m}, \tag{14}$$

$$\dot x^l = \overline{f}^l_0(t,x) + \overline{f}^l_\alpha(t,x)u^\alpha, \quad l=\overline{m+1,n}. \tag{15}$$

Система (2) называется *управляемой на интервале* $[t_0,t_1]$ [1, с. 63], если для любых двух состояний $y_0,y_1\in M$ существует её решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$. Связь понятия управляемости и первого интеграла заключается в следующем утверждении.

Теорема 1 [1, с. 63]. *Система (2) управляема на интервале* $[t_0,t_1]$ *только тогда, когда у неё отсутствуют нетривиальные (т.е. непостоянные) первые интегралы.*

Доказательство. Пусть система (2) управляема на интервале $[t_0,t_1]$. Фиксируем начальную точку (t_0,y_0). Для нетривиального первого интеграла $\Phi(t,y)$ (если он существует) по определению приходим к равенству

$$\Phi(t_0,y_0) = \Phi(t_1,y_1),$$

где $y_1 = y(t_1)$ – конечная точка некоторого решения $y(t)$. Так как точка y_1 может быть любой, то справедливы равенства

$$\frac{\partial\Phi(t_1,y)}{\partial y^i} = 0, \quad i=\overline{1,n},$$

что противоречит нетривиальности первого интеграла. Теорема доказана.

Следствие. *Система (2) управляема на интервале* $[t_0,t_1]$ *только тогда, когда число полей в полном семействе (6), (7) равно* $n+1$.

1.2. Автономные системы. Рассмотрим отдельно случай автономных систем, т.е. систем, в которые независимая переменная не входит явно. В нормальной форме такие системы с управлением имеют вид

$$\dot y^i = f^i(y,u), \quad i=\overline{1,n}, \quad y\in M\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{16}$$

В этом случае рассмотрение, в том числе введение сопутствующих дифференциально-геометрических понятий, естественно ведётся в фазовом пространстве M изменения фазовых переменных (состояний) y. Точнее, вводятся следующие ассоциированные объекты (подробности см. в [2, с. 124–126]).

Через $\mathfrak{c}_0$ обозначим семейство гладких векторных полей, заданных в области M:

$$\xi_u = f^i(y,u)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad u \in U. \tag{17}$$

Каждое поле семейства $\mathfrak{c}_0$ получается, если фиксировать некоторое постоянное значение u из множества U. Поля (17) называются *ассоциированными полями* системы (16), а семейство $\mathfrak{c}_0$ – *ассоциированным семейством* системы (16). Минимальная алгебра Ли векторных полей, содержащая семейство $\mathfrak{c}_0$, называется *ассоциированной алгеброй Ли* системы (16) и обозначается через $\mathfrak{c}$.

Введём также распределение $\Delta_\mathfrak{c}$, порождаемое ассоциированной алгеброй $\mathfrak{c}$. Это распределение ставит в соответствие каждой точке $y \in M$ линейную оболочку векторов, определяемых полями алгебры $\mathfrak{c}$. Величина $\dim\Delta_\mathfrak{c}$ равна числу полей в базисном семействе алгебры $\mathfrak{c}$, которое получается в результате пополнения базисного подсемейства семейства $\mathfrak{c}_0$. Ещё раз отметим, что не следует путать базисное семейство и базис алгебры: базис состоит из максимального числа линейно независимых полей, а базисное семейство состоит из максимального числа линейно несвязанных, т.е. линейно независимых в каждой точке, полей. Поэтому, в частности, число полей в базисном семействе алгебры не превышает n и равно $\dim\Delta_\mathfrak{c}$. Для неавтономных систем (2) аналогичное семейство состоит из полей (5) и (7). Через S_u обозначим локальные однопараметрические группы, порождаемые полями (17) и называемые ассоциированными *однопараметрическими группами* системы (16).

Преобразования однопараметрической группы, которая порождается полем с фиксированным $u_0 \in U$, переводят точки области M в точки этой же области по решениям $y(t)$, которые соответствуют постоянному управлению $U(t) = u_0$. Локальная группа диффеоморфизмов области M, порождаемая семейством векторных полей $\mathfrak{c}_0$ и являющаяся минимальной локальной группой, содержащей однопараметрические группы S_u, $u \in U$, называется *локальной ассоциированной группой* системы (16) и обозначается через S (в дальнейшем слово “локальная” для краткости опускается). Преобразования ассоциированной группы определяются решениями $y(t)$ системы (16), соответствующими всевозможным кусочно-постоянным управлениям, если при этом разрешается движение от точки к точке как в положительном, так и в отрицательном направлении времени. Более подробно это означает следующее. Каждое преобразование $s \in S$ имеет вид $s = s_{u_l}^{t_l}\cdots s_{u_2}^{t_2}s_{u_1}^{t_1}$, где $s_{u_k}^{t_k} \in S_{u_k}$, $k = \overline{1,l}$. Равенство $s(y) = y'$ означает существование конечной последовательности точек $y = c_0$, c_1, $\ldots$, $c_l = y'$ области M, где $c_k = s_{u_k}^{t_k}\cdots s_{u_2}^{t_2}s_{u_1}^{t_1}(y)$. Это эквивалентно тому, что для каждого $k = \overline{1,l}$ существует решение $y(t) = s_{u_k}^{t_k}(c_{k-1})$ системы (16), соответствующее постоянному управлению $u(t) = u_k$, для которого $y(0) = c_{k-1}$, $y(t_k) = c_k$. При этом, если $t_k \geqslant 0$, то $y(t)$ определено на отрезке $[0,t_k]$, а если $t_k \leqslant 0$, то на отрезке $[t_k, 0]$.

Для автономных систем (16) понятие управляемости обычно вводят следующим образом. Система (16) называется *управляемой*, если для любых двух состояний $y_0, y_1 \in M$ существует её решение $y(t)$, $t \in [t_0,t_1]$, удовлетворяющее условиям $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. Так же, как и для неавтономных систем, вопрос об управляемости тесно связан с существованием первых интегралов (по крайней мере локально). Вопрос о первых интегралах решается аналогично. По крайней мере локально дело сводится к процессу пополнения линейно несвязанных полей ассоциированного семейства (17). В результате пополнения возникает базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}$ и распределения $\Delta_\mathfrak{c}$:

$$X_l = \varphi_l^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = \overline{1,p}. \tag{18}$$

Здесь число p равно рангу распределения $\Delta_\mathfrak{c}$, т.е $\dim\Delta_\mathfrak{c}(y)$. При этом предполагается, что рассмотрение ведётся в окрестности точки y_0, где ранг постоянен и реализуем процесс пополнения. Пусть $p < n$. Тогда полная система дифференциальных уравнений

$$X_l\Phi(y) = \varphi_l^i(y)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y^i} = 0, \quad l = \overline{1,p}, \tag{19}$$

имеет в окрестности данной точки $m = n - p$ функционально независимых решений $\Phi^k(y)$, $k = \overline{1, m}$, для которых

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,m}} = m,$$

причём для любого интеграла $\Phi(y)$ справедливо представление

$$\Phi(y) = G(\Phi^1(y), \ldots, \Phi^m(y)),$$

где G – гладкая функция. В окрестности точки y_0 определено семейство локально инвариантных многообразий (т.е. преобразования групп не выводят точки из этих многообразий) размерности p:

$$\Phi^k(y) - c^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m = n - p, \tag{20}$$

где $c^k = \mathrm{const}$. Сделаем (локальную) замену координат

$$x^k = \Phi^k(y), \quad k = \overline{1, n}, \tag{21}$$

где $\Phi^k(y)$, $k = \overline{1, m}$, – полный набор интегралов, а $\Phi^k(y)$, $k = \overline{m+1, n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (21) являлась невырожденной. В новой системе координат семейство многообразий (20) запишется следующим образом:

$$x^k - c^k = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{22}$$

а система (16) приобретает вид

$$\dot{x}^k = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{23}$$

$$\dot{x}^l = \overline{f}^l_0(x) + \overline{f}^l_\alpha(x) u^\alpha, \quad l = \overline{m+1, n}. \tag{24}$$

Здесь полезна также интерпретация в терминах ассоциированной группы S. Если для любого $y \in M$ выполняется равенство $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y) = n$ и M – связная область, то, согласно теореме Рашевского–Чжоу [3, с. 89], группа диффеоморфизмов, порождаемая семейством, является транзитивной. Следовательно, из любой точки $y_0 \in M$ можно попасть в любую другую точку $y_1 \in M$, двигаясь по интегральным траекториям полей семейства, т.е. по решениям управляемой системы (16), соответствующим постоянным (точнее, кусочно-постоянным) управлениям. При этом разрешается движение как в положительном направлении времени, так и в отрицательном. В этом случае говорят, что система (16) обладает свойством *слабой управляемости*. По поводу разных определений управляемости см., например, [7]. Декомпозиция (23), (24) является частным случаем более общей декомпозиции

$$\dot{x}^k = g^k_0(x^1, \ldots, x^m) + g^k_\alpha(x^1, \ldots, x^m) u^\alpha, \quad k = \overline{1, m}, \tag{25}$$

$$\dot{x}^i = g^i_0(x^1, \ldots, x^n) + g^i_\alpha(x^1, \ldots, x^n) u^\alpha, \quad i = \overline{m+1, n}, \tag{26}$$

$$(x^1, \ldots, x^m) \in W \subset \mathbb{R}^m, \quad (x^{m+1}, \ldots, x^n) \in L \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad u \in \mathbb{R}^r.$$

Возможность приведения с помощью замены переменных системы (16) к такому виду связана с другим более общим свойством группы S – импримитивностью (см. [3. с. 127–130]).

2. Системы дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = \overline{1, l}, \tag{27}$$

где $t = (t^1, \ldots, t^m)^{\mathrm{т}}$, $y = (y^1, \ldots, y^n)^{\mathrm{т}}$ и $p = (\ldots, \partial_k y^i, \ldots)$, где $\partial_k y^i = \partial y^i / \partial t^k$. В дальнейшем предполагаем для упрощения, что функции Λ_ν, а также все встречающиеся функции (в том числе решения) гладкие. Под гладкостью понимаем непрерывную бесконечную дифференцируемость. Считаем, что система (27) имеет максимальный ранг и $l \times mn$-матрица

Якоби производных от функций Λ_ν по p имеет ранг l всюду, где $\Lambda(t,y,p)=0$ (здесь и далее $\Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_l)^{\mathrm{T}}$). При этом условии соотношения (27) задают гладкое многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в пространстве переменных (t,y,p), или, иначе говоря, в пространстве 1-струй функций $y(t)$. Относительно системы (27) будем считать также, что она *локально разрешима*. Согласно [8, с. 212] система локально разрешима в точке $(t_0,y_0,p_0)\in\mathcal{S}_\Lambda$, если существует гладкое решение $y=f(t)$, определённое для t из некоторой окрестности точки t_0 и имеющее предписанные начальные условия $y_0=f(t_0)$, $p_0=(\partial f/\partial t)_{t=t_0}$. Система называется *локально разрешимой*, если она локально разрешима в каждой точке многообразия $\mathcal{S}_\Lambda$, а система, для которой одновременно выполняются свойства максимального ранга и локальной разрешимости называется *невырожденной* [8, с. 212].

2.1. Специальный вид и его трактовка с точки зрения теории управления. Уравнения (27) задают многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в неявном виде. Это многообразие можно (в силу невырожденности) представить и в параметрическом виде (в некоторой локальной карте) при помощи разрешения системы (27) относительно максимального числа производных, причём если остальные (параметрические) производные считать параметрическими переменными и составленный из них вектор обозначить через u, то получим локальное представление $\mathcal{S}_\Lambda$ в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных [8, с. 324]:

$$\partial_k y^i=f_k^i(t,y,u). \tag{28}$$

Выберем локальную карту таким образом, чтобы

$$t\in I\subset\mathbb{R}^m,\quad y\in M\subset\mathbb{R}^n,\quad u\in U\subset\mathbb{R}^s, \tag{29}$$

где I, M, U – некоторые области. Такое представление произвольной системы дифференциальных уравнений с частными производными известно как специальный вид [9, с. 324]. Данное представление встречается также в задаче оптимального управления систем с распределёнными параметрами для удобства вывода необходимых условий оптимальности [10, с. 30]. В (28) остальные (параметрические) производные обозначены через u как параметрические переменные, причём для параметрических производных соответствующее выражение имеет просто некоторый вид [9, с. 324]

$$\partial_\delta y^\beta=u^\gamma.$$

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^1}=\frac{\partial y^2}{\partial t^1}t^2,\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^2}=y^1y^2,$$
$$\frac{\partial y^1}{\partial t^2}=y^2(1-t^2y^1). \tag{30}$$

Полагая $\partial y^2/\partial t^1=u$, запишем эту систему в виде

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^1}=ut^2,\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^1}=u, \tag{31}$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial t^2}=y^2(1-t^2y^1),\quad \frac{\partial y^2}{\partial t^2}=y^1y^2. \tag{32}$$

Далее будем рассматривать системы уравнений в специальном виде и в карте (29). Условие локальной разрешимости в данном случае означает, что для любых точек $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ существует окрестность $V\subset L$ точки t_0, в которой определено такое гладкое решение $y(t)$, что $y(t_0)=y_0$, $u(t_0)=u_0$.

Сравнивая системы (28) и (2), можно заметить определённую аналогию между ними. Действительно, каждое решение $y(t)$ управляемой системы (2) получается после подстановки в правую часть управлений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны, решения $y(t)$ системы (28) соответствуют выбору из некоторого класса параметрической функции $u(t)$. Однако имеется существенное различие в классах допустимых "управлений". Для управляемых систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от класса кусочно-непрерывных функций до класса измеримых функций. Для систем (28) заранее задать класс допустимых "управлений" затруднительно, так как далеко не каждый выбор функций $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, возможность несовместности полученной системы после подстановки управления $u(t)$. Тем не менее идеология теории управлений может быть полезна – можно построить аналогичные ассоциированные дифференциально-геометрические объекты, с помощью которых исследовать, например, характеристики, присущие всем реализациям допустимых параметрических функций.

2.2. Первые интегралы. Так же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, введём понятие первого интеграла для систем (28). Гладкую функцию $\Phi(t,y)$ назовём *первым интегралом системы* (28), если на любом решении $y(t)$ системы (28) она принимает постоянное значение $\Phi(t,y(t)) = \mathrm{const}$.

Замечание. Введённое определение первого интеграла, по существу, совпадает с определением для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако оно практически не используется в литературе для уравнений с частными производными. Причина, видимо, в малочисленности случаев существования нетривиальных первых интегралов для систем с частными производными и в отсутствии алгоритмов их нахождения. Актуальной считается более общая проблема существования законов сохранения (см., например, [8, с. 337; 11, с. 258]). Возможно, введённое понятие первого интеграла является более скромным или даже экзотическим по сравнению с законами сохранения. Тем не менее, если первые интегралы существуют и найдены, то это может существенно упростить исследование систем уравнений (понизить размерность задачи – см. ниже представление (37)), причём существование интегралов проверяется несложно с помощью предлагаемого аппарата, который может быть использован и для изучения более сложных, чем (37), декомпозиций типа (25), (26), а также для нахождения симметрий.

Условием того, что функция $\Phi(t,y)$ будет первым интегралом, является в силу её гладкости тождественное равенство нулю производных по всем независимым переменным от этой функции в силу каждого решения системы (28):

$$\frac{\partial \Phi(t,y(t))}{\partial t^k} + f^i_k(t,y(t),u(t))\frac{\partial \Phi(t,y(t))}{\partial y^i} \equiv 0, \quad t\in I, \quad k=\overline{1,m}. \tag{33}$$

(Напоминаем, что по повторяющимся верхнему и нижнему индексам проводится суммирование.)

Введём ассоциированные семейства векторных полей (операторов) C_k, $k=\overline{1,m}$, в области $I\times M$. Каждое семейство C_k состоит из векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial t^k} + f^i_k(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i} = 0, \quad k=\overline{1,m}, \tag{34}$$

с фиксированным $k=\overline{1,m}$, где u пробегает всё множество постоянных значений из U. Объединение этих семейств обозначим через C_0.

Теорема 2. *Функция* $\Phi(t,y)$ *является первым интегралом системы (28) тогда и только тогда, когда выполняются тождества*

$$\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t^k} + f^i_k(t,y,u)\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y^i} \equiv 0, \quad k=\overline{1,m}, \quad \text{для всех} \quad (t,y)\in I\times M, \quad u\in U. \tag{35}$$

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку выполнение тождеств (35) для всех $(t,y)\in I\times M$, $u\in U$ влечёт за собой выполнение тождеств (33).

Необходимость вытекает из условия локальной разрешимости. Действительно, возьмём первый интеграл $\Phi(t,y)$, точки $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ и гладкое решение $y(t)$ такое, что $y(t_0)=y_0$, $u(t_0)=u_0$. Из тождеств (33) для этого решения и произвольного выбора точек $t_0\in I$, $y_0\in M$, $u_0\in U$ следуют тождества (35).

Из предыдущих пунктов работы, посвящённых динамическим системам, следует алгоритм проверки существования и нахождения первых интегралов. Нужно выделить в каждом ассоциированном семействе (34) максимальное число линейно несвязанных векторных полей, объединить эти поля и пополнить в области $I \times M$ изменения переменных. Если число s полей в полученном полном семействе меньше числа переменных $n+m$, то нетривиальные первые интегралы существуют, причём число функционально независимых интегралов равно $n+m-s$. Они находятся с помощью решения соответствующей полной системы дифференциальных уравнений. Если сделать (локальную) замену зависимых переменных

$$x^k = \Phi^k(t, y), \quad k = \overline{1, n}, \tag{36}$$

где $\Phi^k(y)$, $k = \overline{1, q}$, – независимые интегралы, а $\Phi^k(y)$, $k = \overline{q+1, n}$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (36) была невырожденной, то в новой системе координат система (28) приобретает следующий вид:

$$\partial_k x^i = 0, \quad i = \overline{1, q}, \quad \partial_k x^j = h_k^j(t, x, u), \quad j = \overline{q+1, n}. \tag{37}$$

Пример 2. Рассмотрим систему (31), (32) из примера 1. Семейство C_0 состоит из двух подсемейств

$$X_{1u} = \frac{\partial}{\partial t^1} + ut^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + u \frac{\partial}{\partial y^2}, \quad X_{2u} = \frac{\partial}{\partial t^2} + y^2(1 + t^2 y^1) \frac{\partial}{\partial y^1} + y^1 y^2 \frac{\partial}{\partial y^2},$$

т.е. второе подсемейство состоит из одного поля. Легко видеть, что поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ образуют линейно несвязанное подсемейство D семейства C_0. Вычисляя коммутаторы, получаем $[Y_1, Y_2] = 0$, $[Y_1, Y_3] = 0$, $[Y_2, Y_3] = (t^2 y^2 + y^1) Y_2 - (t^2 + y_1) Y_1$. Таким образом, поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ составляют полное семейство, т.е. процесс пополнения заканчивается на первом шаге и семейство D – полное. Соответствующая полная система дифференциальных уравнений имеет решение $\Phi(t, y) = y^2 t^1 - y^1$. После замены переменных $x^1 = y^2 t^1 - y^1$, $x^2 = y^2$ исходная система уравнений приводится к виду

$$\frac{\partial x^1}{\partial t^1} = \frac{\partial x^1}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial x^2}{\partial t^2} = x^2(t^1 x^2 - x^1).$$

Заключение. Рассмотрена возможность применения методов теории управления в теории уравнений с частными производными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. М., 2008.
2. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М., 1997.
3. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М., 2003.
4. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Симметрии и классификация. М., 2006.
5. *Чеботарев Н.Г.* Непрерывные группы преобразований. М.; Л., 1940.
6. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
7. *Hermann R., Krener A.J.* Nonlinear controllability and observability // IEEE Trans. Aut. Contr. 1977. V. AC–22. № 5. P. 728–740.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.
9. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л., 1947.
10. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М., 1975.
11. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщикова. М., 2005.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 07.06.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.