ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1483–1490

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.938

НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ВЕКТОРНЫМ ВЫХОДОМ

© 2021 г. А. Н. Канатников, О. С. Ткачева

Рассмотрена задача синтеза наблюдателя с линейной динамикой ошибки для четырёхмерной системы с векторным выходом. Получены необходимые и достаточные условия существования наблюдателя, предложен алгоритм его построения. Рассмотрен пример построения наблюдателя для четырёхмерной модели электрической активности сердца, представляющей собой систему двух связанных между собой уравнений Ван дер Поля.

DOI: 10.31857/S0374064121110066

Введение. Существуют различные подходы к восстановлению состояния динамической системы по её выходу. Один из таких подходов – построение наблюдателя. *Наблюдатель* – дополнительная система, которая в качестве входа использует выход исходной системы, а её состояние даёт оценку состояния исходной системы. Теме наблюдателей посвящено большое число работ (отметим монографии [1–3], обзор [4] и приведённую в них библиографию). В этом направлении достаточно глубоко исследованы системы со скалярным выходом, в то время как системы с векторным выходом изучены значительно меньше.

В данной работе для четырёхмерной системы с векторным выходом рассматривается наблюдатель с линейной динамикой ошибки. Синтез такого наблюдателя связан с приведением исходной системы к специальному виду (расширенному каноническому виду для построения наблюдателя, или третьему каноническому наблюдаемому виду) [1, с. 23; 5]. Основная проблема здесь как раз и состоит в таком преобразовании: для преобразованной системы наблюдатель строится без труда. Имеются необходимые и достаточные условия существования третьего канонического вида для произвольной динамической системы, но эти условия носят абстрактный характер и на практике трудно проверяемы. Отметим, что в случае двумерной системы со скалярным выходом построение наблюдателя с линейной динамикой ошибки не вызывает трудностей [2, с. 419; 6]. Однако уже в простейшем векторном случае четырёхмерной системы с двумерным выходом ситуация существенно сложнее: условия существования наблюдателя представляют собой систему из восьми дифференциальных уравнений в частных производных.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приведены нужные в работе сведения о наблюдателях с линейной динамикой ошибки для нелинейных систем и из теории $K(x)$-двойственности, а также критерий существования наблюдателя на основе этой теории. В п. 2 сформулирован и доказан основной результат работы – необходимые и достаточные условия существования наблюдателя четырёхмерной системы. В п. 3 рассмотрен пример четырёхмерной системы, представляющей собой модель электрической активности сердечной системы на основе уравнения Ван дер Поля (она получена на материале статьи [7], см. также [8, 9]). В п. 4 показаны результаты численного эксперимента, проведённого с этой моделью. Заключение подводит итог выполненного исследования.

1. Наблюдатель с линейной динамикой ошибки. Рассмотрим динамическую систему с векторным выходом
$$\dot{x} = A(x), \quad y = h(x), \tag{1}$$
где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\text{т}} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_k(x))^{\text{т}}$.

Восстановление вектора состояния системы (1) по выходу y состоит в использовании последовательности функций $h(x)$, $L_Ah(x)$, $L_A^2h(x)$, ..., где $L_Ah(x)$ – производная Ли функции h по векторному полю $A(x)$ системы (1) (производная функции h в силу системы (1)),

$L_A^s h(x) = L(L_A^{s-1} g(x))$, $s > 1$. Если восстановление возможно в окрестности каждой точки фазового пространства, то система называется *локально наблюдаемой* [2, с. 415; 5].

Если система (1) локально наблюдаема, то в окрестности заданной точки она в некоторой системе координат может быть представлена в *каноническом наблюдаемом виде*

$$\begin{gathered}\dot z_{11} = z_{12}, \quad \dot z_{12} = z_{13}, \quad \ldots, \quad \dot z_{1,l_1-1} = z_{1,l_1}, \quad \dot z_{1,l_1} = f_1(z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot z_{k1} = z_{k2}, \quad \dot z_{k2} = z_{k3}, \quad \ldots, \quad \dot z_{k,l_k-1} = z_{k,l_k}, \quad \dot z_{k,l_k} = f_k(z),\\ y_1 = z_{11}, \quad y_2 = z_{21}, \quad \ldots, \quad y_k = z_{k1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Величины l_1, l_2, $\ldots$, l_k называются *индексами наблюдаемости*.

Представление (2) можно в блочно-векторной форме записать более компактно. Для этого через D^j обозначим квадратную матрицу порядка l_j, элементы d^j_{pq} $(p, q = \overline{1, l_j})$ которой определяются равенствами: $d^j_{pq} = 1$, если $p - q = -1$, и $d^j_{pq} = 0$ в противном случае; через $F^j(z)$ – вектор-столбец $(0, 0, \ldots, f_j(z))$ высоты l_j; через C^j – вектор-строку $(1, 0, \ldots, 0)$ длины l_j, $j = \overline{1, k}$. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$\dot z = Dz + F(z), \quad y = Cz,$$

где $D = \operatorname{diag}(D^1, D^2, \ldots, D^k)$, $F(z) = (F^1(z), F^2(z), \ldots, F^k(z))^{\mathrm{т}}$, $C = \operatorname{diag}(C^1, C^2, \ldots, C^k)$.

Представление системы (1) вида

$$\dot\zeta = D^{\mathrm{т}}\zeta + \Psi(\tilde\zeta), \quad y = H(\tilde\zeta), \tag{3}$$

где $\tilde\zeta = (\zeta_{1,l_1}, \zeta_{2,l_2}, \ldots, \zeta_{k,l_k})^{\mathrm{т}}$, $\Psi(\tilde\zeta) = (\psi_1(\tilde\zeta), \psi_2(\tilde\zeta), \ldots, \psi_n(\tilde\zeta))^{\mathrm{т}}$, назовём *расширенным каноническим наблюдаемым видом для построения наблюдателя*, или просто *третьим каноническим наблюдаемым видом*. Этот канонический вид отличается от канонического вида (3) тем, что фазовые переменные в каждом блоке следуют в обратном порядке (так что вместо D имеем $D^{\mathrm{т}}$), а нелинейные добавки входят в каждое уравнение, но зависят только от переменных, присутствующих в выходе системы.

Для системы вида (3) при условии, что отображение H обратимо, наблюдатель с линейной динамикой ошибки строится в следующем виде:

$$\dot\eta = D^{\mathrm{т}}\eta + G\tilde C(\eta - \zeta) + \Psi(\tilde\zeta), \tag{4}$$

где $\tilde C = \operatorname{diag}(\tilde C^1, \tilde C^2, \ldots, \tilde C^k)$, а $\tilde C^j$ – вектор-строка $(0, 0, \ldots, 1)$ длины l_j, $j = \overline{1, k}$. Динамика ошибки $e = \eta - \zeta$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot e = (D^{\mathrm{т}} + GC)e.$$

При этом $n \times k$-матрицу G следует выбирать таким образом, чтобы квадратная матрица $D^{\mathrm{т}} + GC$ была гурвицевой.

Основные проблемы, возникающие здесь, – вопрос о существовании у заданной системы третьего канонического вида и при наличии последнего построение алгоритма приведения к нему. Решение этих проблем найдено в рамках теории $K(x)$-двойственности [5].

Рассмотрим динамическую систему с векторным управлением

$$\dot x = A(x) + B(x)u, \tag{5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{т}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $B(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – матрица размера $n \times \times m$, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления. Класс систем (1) (динамических систем с выходом, ДС) и класс систем (5) (аффинных управляемых динамических систем, АУДС) связаны отношением двойственности.

Пусть $B_j(x)$ – столбцы матрицы $B(x)$, а $W^i(x)$ – матрицы Якоби векторных функций $H^i(x) = (h_i(x), L_A h_i(x), \ldots, L_A^{l_i-1} h_i(x))^{\mathrm{т}}$, имеющие размер $l_i \times n$. ДС (1) и АУДС (5) называются $K(x)$-*двойственными*, если выполняются равенства

$$W^i(x)B_j(x) = (0, \ldots, 0, k_{ij}(x))^{\mathrm{т}}, \quad i, j = \overline{1, k}; \tag{6}$$

обозначим $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j=1}^k$ [5]. Для любой локально наблюдаемой ДС и любой гладкой матрицы $K(x)$ существует $K(x)$-двойственная ей АУДС.

Теорема 1 [5]. *Локально наблюдаемая ДС (1), у которой все индексы наблюдаемости одинаковы: $l_1 = l_2 = \ldots = l_k = l$, допускает построение наблюдателя (4) в окрестности заданной точки x_0 тогда и только тогда, когда существует такая функциональная матрица $K(y)$ порядка k, гладкая в окрестности точки $h(x_0)$, что:*

а) алгебра Ли $K(h(x))$-двойственной аффинной управляемой системы коммутативна;

б) матрица $K(y)$ является матрицей Якоби некоторого гладкого отображения в окрестности точки $h(x_0)$, причём $\det K(h(x_0)) \neq 0$.

Замечание. Алгебра Ли $\mathcal{A}_n$ АУДС (5) порождается векторными полями $\mathrm{ad}_A^{i-1} B_j$, $i = \overline{1, l_j}$, $j = \overline{1, m}$, где $\mathrm{ad}_A^s B_j = \mathrm{ad}_A(\mathrm{ad}_A^{s-1} B_j)$, $\mathrm{ad}_A B_j = [A, B_j]$ – коммутатор векторных полей.

Пусть
$$V^l = (B_1, \ldots, (-1)^{l-1}\,\mathrm{ad}_A^{l-1} B_1, \ldots, B_m, \ldots, (-1)^{l-1}\,\mathrm{ad}_A^{l-1} B_m).$$

Матрица V^l состоит из части столбцов матрицы управляемости $K(x)$-двойственной АУДС.

Теорема 2 [5]. *Матрица Якоби отображения $x = T(\zeta)$, приводящего динамическую систему (1) к третьему каноническому наблюдаемому виду, записанная в переменных x, совпадает с матрицей $V^l(x)$, составленной для $K(h(x))$-двойственной АУДС.*

Теорема 1 доставляет условия существования у ДС третьего канонического вида, которые в конечном счёте сводятся к системе дифференциальных уравнений, выражающих равенство нулю коммутаторов векторных полей. Теорема 2 показывает, как найти замену переменных, приводящую ДС к третьему каноническому виду.

2. Четырёхмерная система с векторным выходом. Рассмотрим задачу построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки для динамической системы четвёртого порядка с векторным выходом. Условие локальной наблюдаемости вместе с условием совпадения индексов наблюдаемости сводят задачу к частному случаю, когда размерность вектора выхода и два индекса наблюдаемости равны двум. Рассматривая вопрос о построении наблюдателя, сразу можно считать, что система задана в каноническом наблюдаемом виде (2):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x), \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = G(x), \quad y = (x_1, x_3), \tag{7}$$

здесь и ниже $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{т}}$.

Чтобы получить условия существования наблюдателя, найдём сначала $K(x)$-двойственную систему для произвольной матрицы $K(y)$ вида

$$K(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) & v_1(y) \\ u_2(y) & v_2(y) \end{pmatrix},$$

где $u_1(y)$, $u_2(y)$, $v_1(y)$, $v_2(y)$ – функции, зависящие только от выхода системы, т.е. только от переменных x_1, x_3.

Находим подматрицы матрицы управляемости, соответствующие координатам выхода:

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления векторных полей B_1, B_2 двойственной АУДС используем уравнения (6). В результате получим, что

$$B_1 = (0, u_1, 0, u_2)^{\mathrm{т}}, \quad B_2 = (0, v_1, 0, v_2)^{\mathrm{т}}.$$

Найденные векторные поля B_1 и B_2 позволяют записать двойственную АУДС.

Условие коммутативности алгебры Ли эквивалентно тому, что векторные поля B_1, B_2, $\mathrm{ad}_A B_1 = [A, B]$, $\mathrm{ad}_A B_2$ попарно коммутируют. Для этого достаточно проверить равенство нулю векторных полей $[B_1, B_2]$, $[B_1, \mathrm{ad}_A B_1]$, $[B_2, \mathrm{ad}_A B_2]$, $[B_2, \mathrm{ad}_A B_1]$.

Для коммутатора $[B_1, B_2]$ имеем

$$[B_1, B_2] = \frac{\partial B_2}{\partial x} B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial x} B_2 = 0,$$

т.е. векторные поля B_1 и B_2 коммутируют при любых условиях.

Вычислим векторное поле $\mathrm{ad}_A B_1$:

$$\mathrm{ad}_A B_1 = \begin{pmatrix} -u_1 \\ x_2 u_{1,x_1} + x_4 u_{1,x_3} - u_1 F_2 - u_2 F_4 \\ -u_2 \\ x_2 u_{2,x_1} + x_4 u_{2,x_3} - u_1 G_2 - u_2 G_4 \end{pmatrix},$$

где для краткости введены обозначения F_j и G_j для частных производных F_{x_j} и G_{x_j} соответственно. Аналогично (с заменой символа u на символ v) находим, что

$$\mathrm{ad}_A B_2 = \begin{pmatrix} -v_1 \\ x_2 v_{1,x_1} + x_4 v_{1,x_3} - v_1 F_2 - v_2 F_4 \\ -v_2 \\ x_2 v_{2,x_1} + x_4 v_{2,x_3} - v_1 G_2 - v_2 G_4 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим коммутатор $[B_1, \mathrm{ad}_A B_1]$:

$$[B_1, \mathrm{ad}_A B_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_1 u_{1,x_1} + 2u_2 u_{1,x_3} - u_1^2 F_{22} - 2u_1 u_2 F_{24} - u_2^2 F_{44} \\ 0 \\ 2u_1 u_{2,x_1} + 2u_2 u_{2,x_3} - u_1^2 G_{22} - 2u_1 u_2 G_{24} - u_2^2 G_{44} \end{pmatrix},$$

где через F_{ij} и G_{ij} обозначены частные производные $F_{x_i x_j}$ и $G_{x_i x_j}$ соответственно. Аналогичным образом находится коммутатор $[B_2, \mathrm{ad}_A B_2]$:

$$[B_2, \mathrm{ad}_A B_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_1 v_{1,x_1} + 2v_2 v_{1,x_3} - v_1^2 F_{22} - 2v_1 v_2 F_{24} - v_2^2 F_{44} \\ 0 \\ 2v_1 v_{2,x_1} + 2v_2 v_{2,x_3} - v_1^2 G_{22} - 2v_1 v_2 G_{24} - v_2^2 G_{44} \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычислим последний коммутатор $[B_2, \mathrm{ad}_A B_1]$:

$$[B_2, \mathrm{ad}_A B_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 v_{1,x_1} + u_2 v_{1,x_3} + v_1 u_{1,x_1} + v_2 u_{1,x_3} - u_1 v_1 F_{22} - (u_1 v_2 + v_1 u_2) F_{24} - u_2 v_2 F_{44} \\ 0 \\ v_1 u_{2,x_1} + v_2 u_{2,x_3} + u_1 v_{2,x_1} + u_2 v_{2,x_3} - u_1 v_1 G_{22} - (u_1 v_2 + v_1 u_2) G_{24} - u_2 v_2 G_{44} \end{pmatrix}.$$

В результате приходим к следующей системе условий для приведения системы (7) к третьему наблюдаемому каноническому виду:

$$u_{1,x_3} = v_{1,x_1}, \quad u_{2,x_3} = v_{2,x_1},$$

$$u_1^2 F_{22} + 2u_1 u_2 F_{24} + u_2^2 F_{44} - 2u_1 u_{1,x_1} - 2u_2 u_{1,x_3} = 0,$$

$$u_1^2 G_{22} + 2u_1 u_2 G_{24} + u_2^2 G_{44} - 2u_1 u_{2,x_1} - 2u_2 u_{2,x_3} = 0,$$

$$v_1^2 F_{22} + 2v_1 v_2 F_{24} + v_2^2 F_{44} - 2v_1 v_{1,x_1} - 2v_2 v_{1,x_3} = 0,$$

$$v_1^2G_{22}+2v_1v_2G_{24}+v_2^2G_{44}-2v_1v_{2,x_1}-2v_2v_{2,x_3}=0,$$
$$u_1v_1F_{22}+(u_1v_2+v_1u_2)F_{24}+u_2v_2F_{44}-u_1v_{1,x_1}-u_2v_{1,x_3}-v_1u_{1,x_1}-v_2u_{1,x_3}=0,$$
$$u_1v_1G_{22}+(u_1v_2+v_1u_2)G_{24}+u_2v_2G_{44}-v_1u_{2,x_1}-v_2u_{2,x_3}-u_1v_{2,x_1}-u_2v_{2,x_3}=0. \tag{8}$$

В системе (8) первая строка – условие того, что матрица $K(y)$ является матрицей Якоби некоторого отображения, остальные условия – условия коммутируемости векторных полей.

Последние шесть уравнений системы (8) распадаются на две группы: уравнения относительно F и уравнения относительно G. Каждая группа – это система трёх линейных алгебраических уравнений относительно трёх частных производных. Матрица каждой из этих двух систем имеет очень характерный вид. Она однородна, и её определитель фактически является степенью определителя матрицы $K(y)$, т.е. матрица невырождена:

$$\det J_1=\begin{vmatrix} v_1^2 & 2v_1v_2 & v_2^2\\ u_1^2 & 2u_1u_2 & u_2^2\\ u_1v_1 & (u_1v_2+u_2v_1) & u_2v_2\end{vmatrix}=(u_1v_2-u_2v_1)^3.$$

Отсюда вытекает, что частные производные второго порядка однозначно определяются через частные производные функций u_i, v_i, а следовательно, не зависят от переменных x_2, x_4, так как матрица $K(y)$ не зависит от этих переменных. Отсюда получаем следующий вывод.

Теорема 3. *Если система (7) приводится к третьему каноническому виду, то функции F и G являются квадратичными по переменным x_2, x_4.*

Если функции F и G удовлетворяют необходимому условию, то нужно решить систему (8) относительно четырёх функций u_i, v_i, $i=1,2$. Если такое решение существует, то система приводится к третьему каноническому виду. При этом замена переменных $x=T(\zeta)$, приводящая систему (7) к третьему каноническому виду, является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{dx}{d\zeta}=V^l=(B_1,-\mathrm{ad}_AB_1,B_2,-\mathrm{ad}_AB_2)=\begin{pmatrix}0 & v_1 & 0 & u_1\\ v_1 & F_v & u_1 & F_u\\ 0 & v_2 & 0 & u_2\\ v_2 & G_v & u_2 & G_u\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$F_v=-x_2v_{1x_1}-x_4v_{1x_3}+v_1F_{x_2}+v_2F_{x_4},\quad F_u=-x_2u_{1x_1}-x_4u_{1x_3}+u_1F_{x_2}+u_2F_{x_4},$$

$$G_v=-x_2v_{2x_1}-x_4v_{2x_3}+v_1G_{x_2}+v_2G_{x_4},\quad G_u=-x_2u_{2x_1}-x_4u_{2x_3}+u_1G_{x_2}+u_2G_{x_4}.$$

Для решения систему (9) необходимо преобразовать к виду $d\zeta/dx=(V^l)^{-1}$, и мы в результате приходим к задаче восстановления функций по их частным производным.

Замечание. Ошибка построенного наблюдателя асимптотически стремится к нулю в каническеой системе координат. При переходе к исходным координатам стремление ошибки к нулю будет сохраняться, по крайней мере, локально, если траектория системы, отслеживаемая наблюдателем, является ограниченной при $t\to+\infty$. Если же траектория неограниченная, то сходимость наблюдателя можно гарантировать только при дополнительных условиях (например, при условии глобальной липшицевости замены переменных $x=T(\zeta)$).

3. Наблюдатель для системы двух связанных уравнений Ван дер Поля. Система

$$\dot x_1=x_2,\quad \dot x_2=-a_1x_2(x_1-w_{10})(x_1-w_{11})-x_1(x_1+d_1)(x_1+e_2),$$

$$\dot x_3=x_4,\quad \dot x_4=-a_2x_4(x_3-w_{20})(x_3-w_{21})-x_3(x_3+d_2)(x_3+e_2)+k_{21}(x_3-x_1) \tag{10}$$

описывает электрическую активность сердца и представляет собой систему из двух связанных друг с другом модифицированных уравнений Ван дер Поля. Здесь x_1, x_3 – трансмембранные потенциалы в клетках синоатриального узла (SA) и атриовентикулярного узла (AV), а x_2, x_4 – скорости изменения этих потенциалов. В представленной модели не учтён третий узел сердечной системы – пучок Гиза–Пуркинье (предполагается, что он находится в состоянии блокады). В полном виде система из трёх связанных модифицированных уравнений Ван дер Поля как модель электрической активности сердца представлена в [7].

Измерению доступны только потенциалы электрической активности сердца, в то время как скорости потенциалов напрямую не измеряются. Поэтому в данном случае в качестве выхода следует рассматривать вектор-функцию $h(x) = (x_1, x_3)$. Рассмотрим задачу построения для системы (10) наблюдателя с линейной динамикой ошибки.

Рассматриваемая система является частным случаем системы (7) с функциями

$$F(x) = -a_1x_2(x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_2),$$

$$G(x) = -a_2x_4(x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + k_{21}(x_3 - x_1).$$

Эти функции линейны по переменным x_2, x_4, так что необходимое условие, определяемое теоремой 3, выполнено. Более того, система уравнений (8) при этом существенно упрощается. Нетрудно заметить, что для того чтобы уравнения этой системы были выполнены, достаточно взять функции $u_1(y)$, $u_2(y)$, $v_1(y)$, $v_2(y)$ постоянными. Таким образом, рассматриваемая система приводится к третьему каноническому виду.

Положим

$$K(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) & v_1(y) \\ u_2(y) & v_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (9) для нахождения замены переменных, приводящей систему к третьему каноническому виду, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dx}{d\zeta} = V^l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & F_v & 0 & F_u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_v & 1 & G_u \end{pmatrix}, \tag{11}$$

в котором в рассматриваемом случае $F_v = F_{x_2} = -a_1(x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11})$, $F_u = F_{x_4} = 0$, $G_v = G_{x_2} = 0$, $G_u = G_{x_4} = -a_2(x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21})$.

Система (11) распадается на две независимые подсистемы и легко решается. Решая её, находим искомую замену переменных:

$$\zeta_1 = a_1(3^{-1}x_1^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})x_1^2 + w_{10}w_{11}x_1) + x_2 + C_1, \quad \zeta_2 = x_1 + C_2,$$

$$\zeta_3 = a_2(3^{-1}x_3^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})x_3^2 + w_{20}w_{21}x_3) + x_4 + C_3, \quad \zeta_4 = x_3 + C_4,$$

где C_j – произвольные постоянные, которые можно положить равными нулю.

Обратная замена переменных (при $C_i = 0$, $i = \overline{1,4}$) имеет следующий вид:

$$x_1 = \zeta_2, \quad x_2 = \zeta_1 - a_1(3^{-1}\zeta_2^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})\zeta_2^2 + w_{10}w_{11}\zeta_2),$$

$$x_3 = \zeta_4, \quad x_4 = \zeta_3 - a_2(3^{-1}\zeta_4^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})\zeta_4^2 + w_{20}w_{21}\zeta_4). \tag{12}$$

Переход к третьему каноническому наблюдаемому виду даёт нам функцию $\Psi(\zeta_2, \zeta_4)$:

$$\Psi(\zeta_2, \zeta_4) = \begin{pmatrix} -\zeta_2(\zeta_2 + d_1)(\zeta_2 + e_2) \\ -a_1(3^{-1}\zeta_2^3 - 2^{-1}(w_{10} + w_{11})\zeta_2^2 + w_{10}w_{11}\zeta_2) \\ -\zeta_4(\zeta_4 + d_2)(\zeta_4 + e_2) + k_{21}(\zeta_4 - \zeta_2) \\ -a_2(3^{-1}\zeta_4^3 - 2^{-1}(w_{20} + w_{21})\zeta_4^2 + w_{20}w_{21}\zeta_4) \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель с линейной динамикой ошибки строится по формуле (4), в которой

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся выбрать матрицу G, обеспечивая этим условие гурвицевости матрицы $M_e = D+GC$. Обозначив

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

получим

$$M_e = \begin{pmatrix} 0 & g_{11} & 0 & g_{12} \\ 1 & g_{21} & 0 & g_{22} \\ 0 & g_{31} & 0 & g_{32} \\ 0 & g_{41} & 1 & g_{42} \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристический многочлен для матрицы M_e:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (-g_{21} - g_{42})\lambda^3 + (g_{21}g_{42} - g_{32} - g_{11} - g_{22}g_{41})\lambda^2 +$$
$$+ (g_{11}g_{42} - g_{12}g_{41} + g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31})\lambda + g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31}.$$

Задав по своему выбору четыре корня этого многочлена, получим систему из четырёх уравнений относительно восьми неизвестных – элементов второго и четвёртого столбцов матрицы G. Несложно заметить, что если, например, задать какие-либо значения элементов второго столбца, то относительно четырёх элементов четвёртого столбца получим систему линейных уравнений, решение которой не представляет сложности.

4. Численное моделирование. Работоспособность построенного наблюдателя для модели кардиостимулятора проверим с помощью вычислительного эксперимента. Объединяем систему (10) с системой (4), описывающей наблюдатель. Хотя в систему (4) формально входит вектор ζ – состояние исходной системы в каноническом виде, в действительности с учётом вида матрицы $\tilde{C}$ используются лишь переменные выхода.

Результат работы наблюдателя будем оценивать по разности векторов x и вектора $T(\eta)$, который получен из вектора η состояния наблюдателя с помощью преобразования T, описываемого соотношениями (12). Интегрирование объединённой системы будем проводить методом Рунге–Кутты с переменным шагом в среде Matlab (функция ode45).

В вычислительном эксперименте использованы следующие значения параметров системы (10):

$$a_1 = 1, \quad d_1 = 3, \quad e_1 = 3.5, \quad w_{10} = -0.81, \quad w_{11} = 0.82, \quad k_{21} = 1,$$
$$a_2 = 1, \quad d_2 = 3, \quad e_2 = 3.5, \quad w_{20} = -0.8, \quad w_{20} = 0.82.$$

Наблюдатель строился с собственными значениями -2, -3, -4, -5. Для переменных состояния модели и наблюдателя выбраны следующие начальные условия:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0.01, \quad x_3(0) = -1, \quad x_4(0) = 3,$$
$$\eta_1(0) = 0.69, \quad \eta_2(0) = 1, \quad \eta_2(0) = 6.33, \quad \eta_4(0) = -1.$$

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования: динамика ошибок оценивания переменных x_2, x_4.

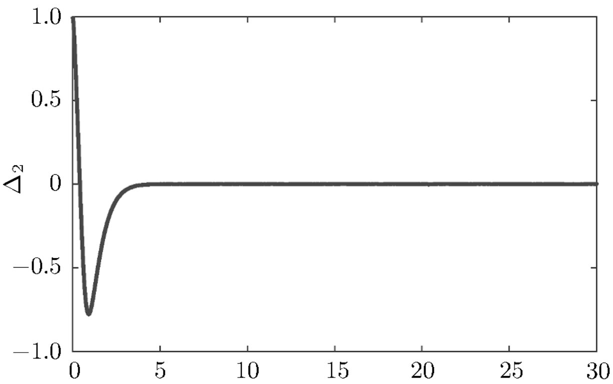

Рис. 1. Динамика ошибки оценивания переменной x_2.

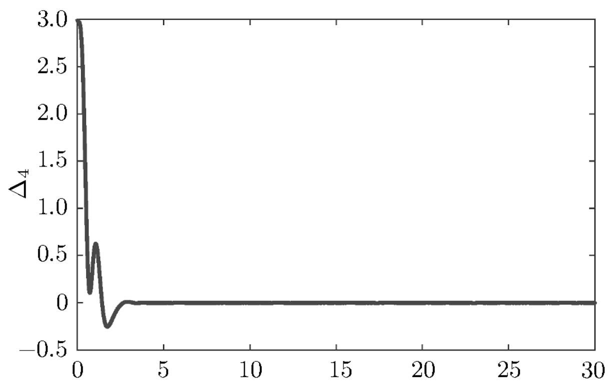

Рис. 2. Динамика ошибки оценивания переменной x_4.

Заключение. В работе рассмотрена задача построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки для четырёхмерной системы с векторным выходом. Такой наблюдатель строится для локально наблюдаемой динамической системы, поэтому предполагалось, что исходная система имеет канонический вид. В работе получены необходимые и достаточные условия на правую часть четырёхмерной динамической системы, при выполнении которых построение для неё наблюдателя с линейной динамикой ошибки возможно. Эти условия найдены с помощью известных общих условий существования наблюдателя, сформулированных в терминах коммутативности некоторой алгебры Ли, практическая проверка которых затруднительна. Полученные условия существования наблюдателя и алгоритм его построения проверены на примере системы двух связанных между собой уравнений Ван дер Поля, которая представляет собой упрощённую модель электрической активности сердечной системы. Аналитические результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования (грант 0705-2020-0047) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 20-07-00294а и 19-07-00817а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
2. *Краснощёченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М., 2005.
3. Nonlinear Observers and Applications / Ed. G. Besançon. Berlin, 2007.
4. *Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 3–42.
5. *Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Двойственность нелинейных динамических систем и синтез наблюдателей // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 5. С. 649–663.
6. *Ткачева О.С., Канатников А.Н., Виноградова М.С.* Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // Математика и мат. моделирование. 2020. № 1. С. 16–32.
7. *Gois S.R.F.S.M., Savi M.A.* An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 41. № 5. P. 2553–2565.
8. *Мурашко В.В., Струтынский А.В.* Электрокардиография. М., 2017.
9. *Van der Pol B., van der Mark J.* LXXII. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Magazine and J. of Sci. 1928. V. 6. № 38. P. 763–775.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.05.2021 г.
После доработки 29.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.