ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1491–1502

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

О ГАРАНТИРОВАННОМ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

© 2021 г. В. И. Максимов

Изучается задача управления в условиях неточного измерения части фазовых координат системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание траекторией заданной системы траектории другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения, которое является функцией времени, суммируемой с квадратом евклидовой нормы. Рассмотрены случаи как непрерывного, так и дискретного по времени измерения. Указан набор устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмов решения задачи, основанных на конструкциях теории гарантирующего управления. Каждый из алгоритмов ориентирован на свои информационные условия относительно динамики системы и измеряемых координат.

DOI: 10.31857/S0374064121110078

Введение. Постановка задачи. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) + f_1(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= Cx(t) + Dy(t) + Eu(t) + f(t) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f_1(\cdot) \in W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^n) = \{p(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : \dot{p}(\cdot) \in \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)\}$ и $f(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$ – заданные функции, u – управление, A, B, C, D и E – стационарные матрицы соответствующих размеров.

Наряду с системой (1) имеется ещё одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + By_1(t) + f_1(t), \quad t \in T, \\ \dot{y}_1(t) &= Cx_1(t) + Dy_1(t) + Ev(t) + f(t) \end{aligned} \tag{2}$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}.$$

Эта система подвержена воздействию некоторого возмущения $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Как само это возмущение $v(\cdot)$, так и отвечающее ему решение системы (2)

$$z_1(\cdot\,; z_{10}, v(\cdot)) = \{x_1(\cdot\,; z_{10}, v(\cdot)), y_1(\cdot\,; z_{10}, v(\cdot))\},$$

где $z_{10} = \{x_{10}, y_{10}\}$, неизвестны.

В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ $(\tau_0 = 0,\ \tau_m = = \vartheta,\ \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$ измеряется часть фазовых состояний системы (2), а именно состояния $x_1(\tau_i) = x_1(\tau_i; z_{10}, v(\cdot))$, а также состояния $z(\tau_i) = z(\tau_i; z_0, u(\cdot)) = \{x(\tau_i; z_0, u(\cdot)), y(\tau_i; z_0, u(\cdot))\}$ $(z_0 = \{x_0, y_0\})$ системы (1). Состояния $x_1(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m-1]$, – удовлетворяют неравенствам

$$|x_1(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leqslant h. \tag{3}$$

Здесь $h \in (0,1)$ – уровень погрешности измерения, через $|\cdot|_n$ обозначена евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что

$$|x_0 - x_{10}|_n \leqslant h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \leqslant h. \tag{4}$$

Необходимо сконструировать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в системе (1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решение $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (2). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x_1(\tau_i)$ и $z(\tau_i)$ формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ такое, что отклонение решения $z^h(\cdot) = z(\cdot\,; z_0, u^h(\cdot))$ этой системы от решения системы (2) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot\,; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T;\mathbb{R}^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Задача слежения – одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [1, гл. 4, § 4; 2, гл. 7, § 3.3]). В данной статье мы рассмотрим случай неполной информации о фазовых координатах. При этом укажем четыре алгоритма решения задачи, которые основаны на комбинации метода динамического обращения [3, гл. 1, § 4; 4, гл. 6, § 17, 19] с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига [5, гл. 3, § 13]. Другие алгоритмы решения задач слежения, основанные на подходящих модификациях метода экстремального сдвига, приведены в работах [6–9].

В дальнейшем матрицы A, B и E, а также функцию $f_1(\cdot)$ предполагаем известными. Матрицы C и D, а также функцию $f(\cdot)$ предполагаем неизвестными, считая известным лишь евклидову норму матрицы D. Неизвестен также вектор x_{10}.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, \delta_*), \tag{5}$$

где $\delta_* = \mathrm{const} \in (0,1)$. Любую кусочно-постоянную функцию $\xi^h(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, удовлетворяющую ограничениям (3) (при $\tau_i = \tau_{h,i}$), будем называть *допустимым измерением точности* h.

Наряду с системами (1) и (2) введём ещё одну управляемую систему, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{w}^h(t) = A\xi_i^h + By_{10} + \tilde{u}^h(t) + f_1(\tau_i), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{6}$$

где управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ находится по правилу

$$\tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_i^h = U(\xi_i^h, w^h(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m_h - 1], \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \tag{7}$$

ξ_i^h – результат измерения вектора $x_1(\tau_i)$ (см. (3)). Отображение U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ аппроксимирует в равномерной метрике ненаблюдаемую компоненту $y_1(\cdot)$. Любые функции

$$U(\,\cdot\,,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \quad \text{и} \quad V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^r$$

будем называть *допустимыми обратными связями* (для системы (1)).

Решение $z = z^h(\cdot)$ системы (1) наблюдается в дискретные моменты $\tau_{h,i}$ и изменяется под воздействием некоторых обратных связей $\tilde{u}^h(\cdot) = U(\xi^h(\cdot), w^h(\cdot))$ и $u^h(\cdot) = V(\,\cdot\,, \tilde{u}^h(\cdot), y^h(\cdot))$. Таким образом, решение $z^h(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\}$ системы (1) зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения компоненты $x_1(\cdot)$ (т.е. допустимых измерений точности h) и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений и начальному условию:

$$\dot{x}^h(t) = Ax^h(t) + By^h(t) + f_1(t), \quad t \in T,$$

$$\dot{y}^h(t) = Cx^h(t) + Dy^h(t) + Eu^h(t) + f(t), \quad x^h(0) = x_0, \quad y^h(0) = y_0, \tag{8}$$

где

$$u^h(t) = u_i^h = V(\tau_i, \tilde{u}_i^h, y^h(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{9}$$

векторы $\tilde{u}_i^h$ определяются согласно (7).

Рассматриваемая задача состоит в построении таких допустимых обратных связей $U(\cdot,\cdot)$ и $V(\cdot,\cdot,\cdot)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{i\in[0:m_h]} |z(\tau_{h,i}) - z^h(\tau_{h,i})|_{n+N} \leqslant \gamma(h), \tag{10}$$

где $\gamma(h) \to 0+$ при $h \to 0$.

Наряду с измерениями фазовых состояний x_1 системы (2) в дискретные моменты времени (см. (3)) рассмотрим также случай, когда измерения осуществляются "непрерывно". Именно, предполагается, что в каждый момент $t \in T$ определяется вектор $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^n$ со свойством

$$|x_1(t) - \xi^h(t)|_n \leqslant h, \tag{11}$$

где функции $\xi^h(\cdot)$ измеримы по Лебегу. В этом случае вместо системы (6) будем рассматривать систему

$$\dot{w}^h(t) = A\xi^h(t) + By_{10} + \tilde{u}^h(t) + f_1(t), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \quad t \in T, \tag{12}$$

где управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ находится по правилу

$$\tilde{u}^h(t) = U(\xi^h(t), w^h(t)) \quad \text{при} \quad t \in T, \tag{13}$$

$\xi^h(t)$ – результат измерения вектора $x_1(t)$ (см. (11)). Допустимая обратная связь U конструируется таким образом, чтобы управление $\tilde{u}^h(\cdot)$ аппроксимировало в равномерной метрике компоненту $y_1(\cdot)$. Решение $z^h(\cdot)$ так же, как и в случае дискретного измерения, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6), в которой управления $u^h(\cdot)$ определяются по правилу

$$u^h(t) = V(t, \tilde{u}^h(t), y^h(t)) \quad \text{при} \quad t \in T. \tag{14}$$

Здесь векторы $\tilde{u}^h(t)$ определяются согласно (13). Задача в данном случае состоит в построении таких допустимых обратных связей $U(\cdot,\cdot)$ и $V(\cdot,\cdot,\cdot)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t\in T} |z_1(t) - z^h(t)|_{n+N} \leqslant \gamma_1(h), \tag{15}$$

где $\gamma_1(h) \to 0+$ при $h \to 0$.

В настоящей работе мы также исследуем задачу слежения в предположении, что измеряются координаты y_1 в дискретные моменты времени или непрерывно. В первом случае в моменты τ_i определяются векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^N$, $i \in [0 : m_h - 1]$, со свойствами

$$|\psi_i^h - y_1(\tau_i)|_N \leqslant h,$$

а во втором случае в каждый момент $t \in T$ становится известным вектор $\psi^h(t) \in \mathbb{R}^N$, для которого

$$|\psi^h(t) - y_1(t)|_N \leqslant h, \tag{16}$$

где функции $\psi^h(\cdot)$ измеримы по Лебегу. Решение задачи слежения при измерении координат y_1 оказывается более простым (по сравнению со случаем измерения координат x_1), так как в этом случае отсутствует необходимость введения вспомогательной системы. Кроме того, о структуре управляемой системы необходим минимум информации: достаточно знать только матрицу E, а также норму матрицы D. Исследование обсуждаемой задачи начнём со случая, когда измеряются координаты x_1. В дальнейшем через c_1, c_2, …, $c^{(1)}$, $c^{(1)}$, … …, $d^{(0}$, $d^{(1)}$, … обозначаются положительные постоянные, выражения для которых могут быть записаны явно.

1. Алгоритм решения при непрерывном измерении координат x и x_1. Зададим две функции $\alpha(h):(0,1)\to(0,1)$ и $\alpha_1(h):(0,1)\to(0.1)$.

Пусть $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ – фундаментальные матрицы систем уравнений

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \quad \text{и} \quad \dot{y}(t)=Dy(t) \tag{17}$$

соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$|\mathcal{X}(t)|\leqslant\exp\{\omega t\},\quad |\mathcal{Y}(t)|\leqslant\exp\{\chi t\},\quad t\geqslant 0,$$

где $\omega=|A|$, $\chi=|D|$. Через $|\cdot|$ обозначается евклидова норма матрицы.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$ и числа $\alpha=\alpha(h)$, $\alpha_1=\alpha_1(h)$. Управления $\tilde{u}^h(\cdot)$ (в системе (12)) и $u^h(\cdot)$ (в системе (8)) зададим по формулам (13) и (14), в которых положим

$$U(\xi^h(t),w^h(t))=\alpha^{-1}(\xi^h(t)-w^h(t)), \tag{18}$$

$$V(t,\tilde{u}^h(t),y^h(t))=\alpha_1^{-1}\exp\{-2\chi t\}E'(B^+\tilde{u}^h(t)+y_{10}-y^h(t)).$$

Здесь штрих означает транспонирование, символ B^+ – псевдообратную к B матрицу. На вход системы (8) при всех $t\in T$ будем подавать управление $u^h(t)$ вида (14), (18), а на вход системы (12) – управление $\tilde{u}^h(t)$ вида (13), (18).

Покажем, что допустимые обратные связи $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$ вида (18) обеспечивают выполнение неравенства (15).

Введём функционал

$$\lambda(t)=\exp\{-2\omega t\}|x^h(t)-x_1(t)|_n^2+\exp\{-2\chi t\}|y^h(t)-y_1(t)|_N^2. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть $N\leqslant n$ и $\operatorname{rank}B=N$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\lambda(t)\leqslant d(\alpha+h^2+\alpha_1+h\alpha^{-1}+(\alpha\alpha_1^{-1})^2+(h(\alpha\alpha_1)^{-1})^2),$$

где d – положительная постоянная, не зависящая от h, α и α_1.

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе оценивается величина $\sup\limits_{t\in T}|y_1(t)-y_{10}-B^+\tilde{u}^h(t)|_N$, а на втором – изменение величины $\lambda(t)$.

Этап 1. Введём функцию $Y(t)=y_1(t)-y_{10}$. Тогда первая подсистема системы (2) запишется в виде

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+BY(t)+By_{10}+f_1(t).$$

В силу неравенства (11) справедлива оценка

$$|Ax_1(t)+By_{10}+f_1(t)-A\xi^h(t)-By_{10}-f_1(t)|_n\leqslant\tilde{M}_0h.$$

Заметим, что $Y(\cdot)\in W^{1,\infty}(T;\mathbb{R}^N)$ и $Y(0)=0$. Тогда в силу теоремы 1 [10] верно неравенство

$$\sup_{t\in T}|\tilde{u}^h(t)+B(y_{10}-y_1(t))|_n=\sup_{t\in T}|\tilde{u}^h(t)-BY(t)|_n\leqslant\nu_1(\alpha,h),$$

где $\nu_1(\alpha,h)=\tilde{M}_1(\alpha+h\alpha^{-1})$, $\tilde{M}_0>0$ и $\tilde{M}_1>0$ – некоторые постоянные. Значит,

$$|B^+\tilde{u}^h(t)+y_{10}-y_1(t)|_N\leqslant\tilde{M}_2\nu_1(\alpha,h). \tag{20}$$

Этап 2. Рассмотрим функцию

$$\varepsilon(t)=\lambda(t)+\alpha_1\int\limits_0^t(|u^h(\tau)|_r^2-|v(\tau)|_r^2)\,d\tau, \tag{21}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Продифференцировав $\lambda(t)$ (см. (19)), будем иметь

$$\dot{\lambda}(t) \leqslant J_1(t) + J_2(t), \tag{22}$$

где $J_1(t) = 2\exp\{-2\omega t\}(\mu^h(t), \dot{\mu}^h(t))$, $J_2(t) = 2\exp\{-2\chi t\}(\nu^h(t), \dot{\nu}^h(t))$, $\mu^h(t) = x^h(t) - x_1(t)$, $\nu^h(t) = y^h(t) - y_1(t)$, через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначено скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$J_1(t) + J_2(t) \leqslant c_1\lambda(t) + J_3(t), \tag{23}$$

где $J_3(t) = 2\exp\{-2\chi t\}(\nu^h(t), E(u^h(t) - v(t)))$. В свою очередь, в силу (20), верна оценка

$$J_3(t) \leqslant 2\exp\{-2\chi t\}(y^h(t) - y_{10} - B^+\tilde{u}^h(t), E(u^h(t) - v(t))) + c_2\nu_1(\alpha, h)\{|u^h(t)|_r + |v(t)|_r\}. \tag{24}$$

Кроме того (см. (18), (13)),

$$|u^h(t)|_r \leqslant c_3\alpha_1^{-1}(\nu_1(\alpha, h) + \lambda^{1/2}(t)). \tag{25}$$

Поэтому при всех $t \in T$ будем иметь

$$c_2\nu_1(\alpha, h)\int_0^t |u^h(s)|_r\,ds \leqslant c_2c_3\nu_1(\alpha, h)\alpha_1^{-1}\int_0^t (\nu_1(\alpha, h) + \lambda^{1/2}(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2c_3\vartheta\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-1} + 1/2c_2^2c_3^2\vartheta\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-2} + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda(s)\,ds. \tag{26}$$

В таком случае, учитывая оценки (24)–(26), а также включение $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$, заключаем, что при всех $t \in T$ справедливы неравенства

$$\int_0^t J_3(s)\,ds + \alpha_1\int_0^t (|u^h(s)|_r^2 - |v(s)|_r^2)\,ds \leqslant \pi(h, \alpha, \alpha_1) + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda(s)\,ds, \tag{27}$$

где $\pi(h, \alpha, \alpha_1) = c_4(\nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-1} + \nu_1^2(\alpha, h)\alpha_1^{-2} + \nu_1(\alpha, h))$.

Из (22), (23), (27) вытекает оценка

$$\varepsilon(t) \leqslant \lambda(0) + \pi(h, \alpha, \alpha_1) + c_5\int_0^t \lambda(s)\,ds.$$

Поэтому

$$\lambda(t) \leqslant c_6\alpha_1 + \lambda(0) + \pi(h, \alpha, \alpha_2) + c_5\int_0^t \lambda(s)\,ds.$$

Воспользовавшись условием (4), а также леммой Гронуолла, получаем

$$\lambda(t) \leqslant (c_6\alpha_1 + h^2 + \pi(h, \alpha, \alpha_1))\exp\{c_5t\}. \tag{28}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и при при* $h \to 0$ *имеют место сходимости* $\alpha(h) \to 0$, $\alpha_1(h) \to 0$, $\alpha(h) \times \alpha_1^{-1}(h) \to 0$, $h(\alpha(h)\alpha_1(h))^{-1} \to 0$. *Тогда выполняется неравенство (15), в котором* $\gamma_1(h) = d^{(1)}(\alpha_1(h) + h^2 + \alpha^2(h)\alpha_1^{-2}(h) + h^2(\alpha(h)\alpha_1(h))^{-2})$.

2. Алгоритм решения при дискретном измерении координат x и x_1. Зададим две функции $\alpha(h):(0,1)\to(0,1)$ и $\alpha_1(h):(0,1)\to(0.1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 1. Семейство разбиений Δ_h, $h\in(0,1)$, отрезка T и функции $\alpha(h)$, $\alpha_1(h)$ обладают следующими свойствами:

$$\delta(h)=C_0h,\quad \alpha_1(h)\to 0,\quad \alpha(h)=C_1h^{1/2},\quad h^{1-\varepsilon}(h)\alpha_1^{-2}(h)\leqslant C_2\quad \text{при}\quad h\to 0+.$$

Здесь $\varepsilon\in(0,1/2)$, $C_0\in(0,1)$, C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от h, δ, α и α_1.

Пусть, как и выше, $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ – фундаментальные матрицы систем уравнений (17).

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$, разбиение $\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (5) с шагом $\delta=\delta(h)$ и числа $\alpha=\alpha(h)$, $\alpha_1=\alpha_1(h)$. Работу алгоритма разобьём на конечное число однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются векторы $\tilde{u}_i^h$ и u_i^h по формулам (7), (9), в которых

$$U(\xi_i^h,w^h(\tau_i))=\alpha^{-1}(\xi_i^h-w^h(\tau_i)),\tag{29}$$

$$V(\tau_i,\tilde{u}_i^h,y^h(\tau_i))=\alpha_1^{-1}\exp\{-2\chi(\tau_i+\delta)\}E'(B^+\tilde{u}_i^h+y_{10}-y^h(\tau_i)).$$

Затем на вход системы (8) при всех $t\in\delta_i$ подаётся управление $u^h(t)$ вида (9), (29), а на вход системы (6) – управление $\tilde{u}^h(t)$ вида (7), (29). Под действием этих управлений система (8) переходит из состояния $z^h(\tau_i)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1})$, а система (6) – из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Покажем, что допустимые обратные связи $U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$ вида (29) обеспечивают выполнение неравенства (10).

В дальнейшем нам потребуется (см., например, [11, с. 312]) следующая

Лемма. (Дискретное неравенство Гронуолла). *Пусть $\phi_j\geqslant 0$, $f_j\geqslant 0$ при $j\in[0:m]$ и $f_j\leqslant f_{j+1}$ при $j\in[0:m-1]$. Тогда неравенства*

$$\phi_{j+1}\leqslant c_0\delta\sum_{i=1}^{j}\phi_i+f_j,\quad j\in[1:m-1],$$

влекут за собой неравенства

$$\phi_{j+1}\leqslant f_j\exp\{c_0j\delta\},\quad j\in[0:m-1],$$

если $c_0=\mathrm{const}>0$, $\phi_1\leqslant f_0$.

Приведём основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1 и $N\leqslant n$, $\operatorname{rank}B=N$. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i\in[0:m_h-1]}\lambda(\tau_{i+1})\leqslant d_0(\alpha_1(h)+h^{\varepsilon}),\tag{30}$$

в котором $d_0=d_0(\varepsilon)$ – положительная постоянная, не зависящая от h, δ, α и α_1.

Доказательство теоремы 2, как и доказательство теоремы 1, состоит из двух этапов. На первом этапе оценивается величина $\sup\limits_{t\in T}|y_1(t)-y_{10}-B^+\tilde{u}^h(t)|_N$, а на втором – изменение величины $\lambda(\tau_i)$, где функция $\lambda(\cdot)$ задаётся равенством (19).

Этап 1. Введём функцию $Y(t)=y_1(t)-y_{10}$. Тогда первая подсистема системы (2) запишется в виде

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+BY(t)+By_{10}+f_1(t).$$

В силу условия $\dot{f}_1(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$ и неравенств (3) справедливо соотношение

$$|Ax_1(t)+By_{10}+f_1(t)-A\xi_i^h-By_{10}-f_1(\tau_i)|_n\leqslant M_0(h+\delta)$$

(при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0 : m-1]$, $m = m_h$). Заметим, что $Y(\cdot) \in W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^N)$ и $Y(0) = 0$. Тогда в силу теоремы 2 [10] верно неравенство

$$\sup_{t \in T} |\tilde{u}^h(t) + B(y_{10} - y_1(t))|_n = \sup_{t \in T} |\tilde{u}^h(t) - BY(t)|_n \leqslant \nu(\alpha, h, \delta),$$

где $\nu(\alpha, h, \delta) = M_1(\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1})$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, $M_0 > 0$ и $M_1 > 0$ – некоторые постоянные. Значит,

$$|B^+ \tilde{u}^h(t) + y_{10} - y_1(t)|_N \leqslant M_2 \nu(\alpha, h, \delta). \tag{31}$$

Этап 2. Оценим изменение величины $\varepsilon(t)$, определяемой равенством (21). Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \lambda_{1i} + \mu_{1i} + \lambda_{2i} + \mu_{2i} + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_r^2 - |v(\tau)|_r^2)\, d\tau, \tag{32}$$

в которой

$$\lambda_{1i} = 2 \exp\{-2\omega\tau_{i+1}\} \bigg(\mathcal{X}(\delta)\mu^h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B \nu^h(\tau)\, d\tau \bigg),$$

$$\mu^h(t) = x^h(t) - x_1(t), \quad \nu^h(t) = y^h(t) - y_1(t),$$

$$\mu_{1i} = \delta \exp\{-2\omega\tau_{i+1}\} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B \nu^h(\tau)|_n^2\, d\tau,$$

$$\lambda_{2i} = 2 \bigg(S_i^h, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau) \{C\mu^h(\tau) + E(u^h(\tau) - v(\tau))\}\, d\tau \bigg),$$

$$\mu_{2i} = \delta \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau) \{C\mu^h(\tau) + E(u^h(\tau) - v(\tau))\}|_N^2\, d\tau,$$

$$S_i^h = \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} \mathcal{Y}(\delta) \nu_i^h, \quad \nu_i^h = \nu^h(\tau_i).$$

Несложно видеть, что

$$\lambda_{1i} \leqslant c_0 |\mu^h(\tau_i)|_n \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu^h(\tau)|_N\, d\tau \leqslant \delta \exp\{-2\omega\tau_i\} |\mu^h(\tau_i)|_n^2 + c^{(0)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu^h(s)|_N^2\, ds. \tag{33}$$

Заметим, что при $t \in [0, \delta_*]$, $\delta_* \in (0, 1)$, выполняется оценка $|\mathcal{Y}(t) - I|_N \leqslant c_* t$, $c_* = c_*(\delta_*)$, где I – единичная $N \times N$-матрица. Поэтому справедливо неравенство

$$|S_i^h - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} \nu_i^h|_N \leqslant \delta c_* \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} |\nu_i^h|_N \leqslant \delta c_* |\nu_i^h|_N,$$

учитывая которое, получаем

$$|(S_i^h, \mathcal{Y}(\delta) Eu) - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(\nu_i^h, Eu)| \leqslant$$

$$\leqslant |S_i^h|_N |\mathcal{Y}(\delta) - I|_N |Eu|_N + |(S_i^h, Eu) - \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(\nu_i^h, Eu)| \leqslant \delta c^{(1)} |\nu_i^h|_N |Eu|_N. \tag{34}$$

Далее, в силу (34) имеем

$$\lambda_{2i} \leqslant 2\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\left(y^h(\tau_i) - y_{10} - B^+\tilde{u}_i^h, E\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(u_i^h - v(\tau))\,d\tau\right) + \sum_{j=1}^{3} I_{ji}.$$

Здесь

$$I_{1i} = c^{(2)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N |u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau, \quad I_{2i} = c^{(3)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\nu^h(\tau_i)|_N|\mu^h(\tau)|_n\,d\tau,$$

$$I_{3i} = c^{(4)}\delta|\nu^h(\tau_i)|_N\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau.$$

Заметим, что (см. (31)) $|B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N \leqslant M_2\nu(\alpha, h, \delta)$. Следовательно, при $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место оценка

$$I_{1i} \leqslant c^{(2)}\nu(\alpha,h,\delta)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r + |v(\tau)|_r)\,d\tau \leqslant c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon + \delta^{1-\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau. \tag{35}$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$I_{2i} \leqslant c^{(3)}\delta^{1/2}|\nu^h(\tau_i)|_N\left(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(6)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds,$$

$$I_{3i} \leqslant \frac{1}{2}\delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(7)}\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(s)|_r^2)\,ds.$$

Учитывая оценку (35), последние два неравенства, а также правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (9), (29)), получаем

$$\lambda_{2i} + \alpha_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u^h(s)|_r^2 - |v(s)|_r^2)\,ds \leqslant \delta\exp\{-2\chi\tau_i\}|\nu^h(\tau_i)|_N^2 + c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon +$$

$$+ c^{(6)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mu^h(s)|_n^2\,ds + c^{(8)}\delta^{1-\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(s)|_r^2)\,ds. \tag{36}$$

Кроме того, верны оценки

$$\mu_{1i} \leqslant \delta c^{(9)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\nu^h(\tau)|_N^2\,d\tau \quad \text{и} \quad \mu_{2i} \leqslant \delta c^{(10)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|\mu^h(\tau)|_n^2 + |u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau. \tag{37}$$

Вследствие неравенств (33), (36), (37) из оценки (32) вытекает, что

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \delta\lambda(\tau_i) + \delta^{1-\varepsilon}c^{(11)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau + c^{(5)}\nu^2(\alpha,h,\delta)\delta^\varepsilon +$$

$$+ c^{(12)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|\mu^h(\tau)|_n^2 + |\nu^h(\tau)|_N^2)\,d\tau. \tag{38}$$

При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеем

$$|\mu^h(t)|_n^2 + |\nu^h(t)|_N^2 \leqslant c^{(13)}\biggl(\lambda(\tau_i) + \delta \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau\biggr).$$

Поэтому из (38) следует неравенство

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(14)}\delta)\lambda(\tau_i) + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + c^{(15)}\delta^{1-\varepsilon} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2)\,d\tau + c^{(5)}\nu^2(\alpha, h, \delta)\delta^\varepsilon,$$

учитывая которое, аналогично [5, с. 59–64] получаем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant \lambda(0) + c^{(16)}\biggl(\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) + \alpha_1 \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + \delta^{1-\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\}\,d\tau\biggr).$$

Тогда с учётом условия (4), а также включения $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ из последнего неравенства выводим оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(17)}\biggl(h^2 + \delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) + \alpha_1 + \delta^{2-\varepsilon}\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2\biggr). \tag{39}$$

В свою очередь, в силу (31), (29) получаем

$$|u_i^h|_r^2 \leqslant \alpha_1^{-2} c^{(18)}(|B^+\tilde{u}_i^h + y_{10} - y_1(\tau_i)|_N^2 + |y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N^2) \leqslant \alpha_1^{-2} c^{(19)}(\lambda(\tau_i) + \nu^2(\alpha, h, \delta)).$$

Поэтому справедлива оценка

$$\delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2 \leqslant c^{(20)}\biggl(\delta\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i} \lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2}\nu^2(\alpha, h, \delta)\biggr). \tag{40}$$

В таком случае вследствие (39), (40) имеем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(21)}\biggl(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2 + \delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i} \lambda(\tau_j) + (\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1})\nu^2(\alpha, h, \delta)\biggr). \tag{41}$$

При $\delta(h) = C_0 h$ справедливо неравенство

$$\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(22)}(\alpha^2\delta^{\varepsilon-1} + (h^2 + \delta^2)\alpha^{-2}\delta^{\varepsilon-1}) \leqslant c^{(23)}(\alpha^2 h^{\varepsilon-1} + h^{1+\varepsilon}\alpha^{-2}).$$

Отсюда при $\alpha(h) = C_1 h^{1/2}$ находим, что

$$\delta^{\varepsilon-1}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(24)} h^\varepsilon. \tag{42}$$

В свою очередь,

$$\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon}\nu^2(\alpha, h, \delta) \leqslant c^{(25)}\alpha_1^{-2}(\alpha^2 h^{1-\varepsilon} + h^{3-\varepsilon}\alpha^{-2}) \leqslant c^{(26)}\alpha_1^{-2} h^{2-\varepsilon}. \tag{43}$$

Из (41), учитывая (42) и (43), получаем в силу леммы 2 оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(27)}(\alpha_1(h) + h^\varepsilon + h^{1-\varepsilon} + h^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}(h)) \exp\{c^{(21)}\vartheta\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}(h)\} \leqslant c^{(28)}(\alpha_1(h) + h^\varepsilon),$$

в силу которой верно неравенство (30). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнено условие 1. Тогда справедливо неравенство (10), в котором* $\gamma(h) = d^{(2)}\{\alpha(h) + h^{\varepsilon}\}$.

Замечание. Описанные выше алгоритмы применимы также в случае, когда управляемая система подвержена внешнему возмущению, т.е. когда система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t) + f_1(t), \quad t \in T = [0, \vartheta],$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Dy(t) + E(u(t) - v_1(t)) + f(t),$$

где $v_1(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ – неизвестное возмущение. В этом случае система (8) записывается следующим образом:

$$\dot{x}^h(t) = Ax^h(t) + By^h(t) + f_1(t), \quad t \in T,$$

$$\dot{y}^h(t) = Cx^h(t) + Dy^h(t) + E(u^h(t) - v_1(t)) + f(t), \quad x^h(0) = x_0, \quad y^h(0) = y_0.$$

3. Алгоритм решения при непрерывном измерении координат $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y_1}$. Зададим функцию $\alpha_1(h) : (0, 1) \to (0, 1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$ и число $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Управления $u^h(\cdot)$ (в системе (8)) зададим по формуле

$$u^h(t) = V(t, \psi^h(t), y^h(t)) = \alpha_1^{-1} \exp\{-2\chi t\} E'(\psi^h(t) - y^h(t)). \tag{44}$$

Таким образом, на вход системы (8) при всех $t \in T$ будем подавать управление $u^h(t)$, задаваемое равенством (44).

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in T} \lambda(t) \leqslant d_1(\alpha_1 + h + h^2 \alpha_1^{-2}), \tag{45}$$

где d_1 *– положительная постоянная, не зависящая от* h *и* α_1.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом оценивается изменение величин $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ (см. определения (19) и (21)). С помощью неравенств (16) доказывается, что вместо неравенства (24) имеет место неравенство

$$J_3(t) \leqslant 2 \exp\{-2\chi t\}(y^h(t) - \psi^h(t), E(u^h(t) - v(t))) + c_2 h(|u^h(t)|_r + |v(t)|_r).$$

Далее, аналогично (28) устанавливается оценка $\lambda(t) \leqslant c_3(\alpha_1 + h^2\alpha_1^{-1} + h^2\alpha_1^{-2} + h)$. Отсюда следует неравенство (45).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть* $\alpha_1(h) \to 0$, $h\alpha_1^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда справедливо неравенство (15), в котором* $\gamma_1(h) = d^{(3)}(\alpha_1(h) + h^2\alpha_1^{-2}(h) + h)$.

4. Алгоритм решения при дискретном измерении координат $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y_1}$. Зададим функцию $\alpha_1(h) : (0, 1) \to (0, 1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 2. Имеют место равенства $\delta(h) = C_* h$, $\alpha_1(h) = C_{**} h^{(1-\varepsilon)/2}$, где C_*, C_{**} – положительные постоянные, $\varepsilon = \mathrm{const} \in (0, 1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$, разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (5) и число $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Работу алгоритма разобьём на конечное число однотипных шагов. В течение i-го шага ($i \in [0 : m - 1]$, $m = m_h$), осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется вектор u_i^h по формуле

$$u_i^h = V(\tau_i, \psi_i^h, y^h(\tau_i)) = \alpha_1^{-1} \exp\{-2\chi\tau_{i+1}\} E'(\psi_i^h - y^h(\tau_i)). \tag{46}$$

Затем на вход системы (8) при всех $t \in \delta_i$ подаётся управление $u^h(t) = u_i^h$. Под действием этого управления система (8) переходит из состояния $z^h(\tau_i)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i\in[0:m_h-1]} \lambda(\tau_{i+1}) \leqslant d_2 h^{(1-\varepsilon)/2}, \tag{47}$$

где d_2 *– положительная постоянная, не зависящая от* h, δ *и* α_1.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, оценим изменение величины (21). Нетрудно видеть, что справедливы неравенства (32) и (34). В силу (34) имеем

$$\lambda_{2i} \leqslant 2\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\Bigg(y^h(\tau_i) - \psi_i^h, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} E\{u_i^h - v(\tau)\}\,d\tau\Bigg) + \sum_{j=1}^{3} I_{ji}.$$

Здесь

$$I_{1i} = c^{(2)}h \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\psi_i^h - y^h(\tau_i)|_N |u_i^h - v(\tau)|_r\,d\tau,$$

величины I_{2i} и I_{3i} – те же, что в доказательстве теоремы 2. Далее, справедливы оценки (37). Следовательно, верно неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + \delta\lambda(\tau_i) + \delta^{1-\varepsilon}c^{(11)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u_i^h|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau +$$

$$+ c^{(5)}h^2\delta^{\varepsilon} + c^{(12)} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|\mu^h(s)|_n^2 + |\nu(s)|_N^2)\,ds,$$

из которого вытекает, что

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(14)}\delta)\lambda(\tau_i) + \alpha_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + c^{(15)}\delta^{1-\varepsilon} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|v(\tau)|_r^2 + |u_i^h|_r^2)\,d\tau + c^{(5)}h^2\delta^{\varepsilon}. \tag{48}$$

В свою очередь, применяя последовательно неравенства (48), получаем

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant \lambda(0) + c^{(16)}\Bigg(\delta^{\varepsilon-1}h^2 + \alpha_1 \int\limits_{0}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2\,d\tau + \delta^{1-\varepsilon} \int\limits_{0}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2)\,d\tau\Bigg).$$

В таком случае, учитывая условие (4), а также включение $v(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^r)$, из последнего неравенства выводим аналогичную (39) оценку

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(17)}\Bigg(\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1}h^2 + \alpha_1 + \delta^{2-\varepsilon}\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2\Bigg). \tag{49}$$

Воспользовавшись формулой (46), получаем $|u_i^h|_r^2 \leqslant \alpha_1^{-2}c^{(19)}(\lambda(\tau_i)+h^2)$. Поэтому справедлива оценка

$$\delta\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_r^2 \leqslant c^{(20)}\Bigg(\delta\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i}\lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2}h^2\Bigg). \tag{50}$$

Следовательно, ввиду (49), (50) имеем неравенство

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(21)}\Bigg(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + \delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}\sum_{j=0}^{i}\lambda(\tau_j) + (\alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon} + \delta^{\varepsilon-1})h^2\Bigg), \quad i \in [0:m-1],$$

из которого аналогично [5, с. 59–64] следует, что

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(21)}(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2(\delta^{\varepsilon-1} + \alpha_1^{-2}\delta^{1-\varepsilon}))\exp\{c^{(21)}\delta^{2-\varepsilon}\alpha_1^{-2}i\}.$$

Значит,

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(21)}(\alpha_1 + \delta^{1-\varepsilon} + h^2(\delta^{\varepsilon-1} + \delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}))\exp\{c^{(21)}\vartheta\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2}\}. \tag{51}$$

При выполнении условия 2 имеем $\delta^{1-\varepsilon}\alpha_1^{-2} = c^{(22)}$, $h^2\delta^{\varepsilon-1} = c^{(23)}h^{1+\varepsilon}$. Поэтому из (51) получаем оценку

$$\lambda(\tau_i) \leqslant c^{(24)}h^{(1-\varepsilon)/2}, \quad i \in [0:m],$$

в силу которой верно неравенство (47). Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедливо неравенство (10), в котором* $\gamma(h) = d^{(4)}h^{(1-\varepsilon)/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М., 1958.
2. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
4. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. *Осипов Ю.С., Максимов В.И.* Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычислит. математики. 2018. Т. 21. № 2. С. 201–213.
7. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
8. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последействием при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 415–426.
9. *Maksimov V.I.* Regularized extremal shift in problems of stable control // System Modeling and Optimization. CSMO 2011. IFIP Advances in Information and Communication Technology / Eds. D. Homberg, F. Troltzsch. Berlin; Heidelberg, 2013. V. 391. P. 112–121.
10. *Максимов В.И.* Об одном алгоритме восстановления управлений в равномерной метрике // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 292–301.
11. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 05.04.2021 г.
После доработки 05.04.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.