

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929+517.977

ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО СОСТОЯНИЮ

© 2021 г. А. В. Метельский

Для спектрально управляемой линейной автономной системы с соизмеримыми запаздываниями строится динамическая обратная связь по состоянию в виде дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающая замкнутой системе финитную стабилизацию (полное успокоение исходной системы за конечное время). Решение этой задачи выполняется при помощи приведения исходной системы к системе с конечным спектром (спектральное приведение) внутренним контуром регулятора, определяемым некоторым векторным полиномом. Затем строится внешний контур регулятора, обеспечивающий замкнутой системе финитную стабилизацию. Указаны условия на коэффициенты семейства спектрально управляемых линейных автономных систем одного порядка с одними и теми же соизмеримыми запаздываниями, при выполнении которых указанный регулятор будет единым для всех систем семейства – тем самым решена задача одновременной финитной стабилизации такого семейства. Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064121110091

Введение. Пусть объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - ih) + bu(t), \quad t > 0, \quad x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0]. \quad (1)$$

Здесь x – n -вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $h > 0$ – постоянное запаздывание; A_i – постоянные $n \times n$ -матрицы ($i = \overline{0, m}$, m – максимальная кратность запаздывания в системе (1)); b – постоянный n -вектор; η – начальная кусочно непрерывная функция; u – скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих далее обозначает операцию транспонирования.

Считаем, что в системе (1) $b = e_n = [0, \dots, 0, 1]'$. Этого всегда можно достичь линейным невырожденным преобразованием переменных $\dot{x} = Tx$ с постоянной матрицей T или введением вспомогательной переменной $\dot{u}(t) = u_1(t)$. Обозначим $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \dots + A_m\lambda^m$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть E_n – единичная матрица n -го порядка, $W(p, e^{-ph}) = pE_n - A(e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($p \in \mathbb{C}$), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином однородной ($b = 0$) системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Набор $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0\}$ корней характеристического квазиполинома с учётом их кратностей называют *спектром* системы (1). Так как коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ действительны, то не вещественные числа, входящие в σ , разбиваются на пары взаимно сопряжённых.

Пусть в операторной записи уравнений λ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования: $p^i \lambda^j f(t) = f^{(i)}(t - jh)$ ($f(t)$ – функция; i, j – целые неотрицательные числа).

Задача стабилизации дифференциальной системы с запаздыванием и её обобщение – задача управления спектром – имеют давнюю историю [1, 2]. Н.Н. Красовским в докладе [1] указана связь задачи стабилизации со свойством вполне управляемости, означающим полное успокоение системы (1). Задача *полного успокоения* системы (1) заключается [3, с. 358] в обеспечении за счёт выбора управления $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, тождеств

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1, \quad (2)$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции η .

В настоящей работе решается задача полного успокоения системы (1) посредством динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию. Если такая обратная связь построена, то она обеспечивает точечную вырожденность [4, 5] замкнутой системы в направлениях, выделяющих её первые n фазовых переменных. Это наблюдение стало основой оригинального подхода [6] к построению динамических регуляторов полного успокоения линейных автономных систем с запаздыванием второго порядка. В дальнейшем этот подход был обобщён [7, 8] на названные системы произвольного порядка, а также на системы других видов [9, 10]. В работах [6, 7] установлено, что для разрешимости задачи полного успокоения системы (1) посредством обратной связи по состоянию необходимо и достаточно, чтобы система (1) была спектрально управляема, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\text{rank} [pE_n - A(e^{-ph}), b] = n \quad \text{для всех } p \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Следуя [11], обеспечение полного успокоения исходной системы (1) посредством обратной связи будем также называть *финитной стабилизацией*. В работах [6–10] задача финитной стабилизации решается через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение). Задача спектрального приведения инициирована работой [12] и в различных постановках исследовалась многими авторами [13–15] (в этих работах приведена достаточно полная библиография).

Ниже для спектрально управляемой системы (1) предлагается схема построения обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе финитную стабилизацию. Решение этой задачи, как и в отмеченных выше работах [6–10], выполняется через приведение исходной системы к системе с конечным спектром с помощью регулятора, определяемого некоторым векторным полиномом. Подбором числового вектора строится квазиполином, не имеющий общих корней с характеристическим полиномом спектрально приведённой системы, что достаточно для построения второго контура регулятора, обеспечивающего финитную стабилизацию исходной системы.

Получены условия на коэффициенты систем, при выполнении которых указанные векторный полином и числовой вектор могут быть выбраны едиными для семейства спектрально управляемых линейных автономных систем одного порядка с одними и теми же соизмеримыми запаздываниями, что тем самым даёт решение задачи их одновременной финитной стабилизации. Задача одновременной асимптотической стабилизации названного семейства объектов с запаздыванием исследована в работах [16, 17]. Излагаемый далее подход к решению задачи финитной стабилизации является по своей сути алгебраическим и сводится к стандартным операциям над полиномами и полиномиальными матрицами.

Структура статьи следующая. В п. 1 обоснованы (теорема 1) общие требования к двухконтурному регулятору, обеспечивающему финитную стабилизацию замкнутой системы. В п. 2 по шагам излагается реализация этих требований. Исходная система приводится к системе с конечным спектром подбором векторного полинома, обеспечивающего выполнение приводимого ниже равенства (8) (шаг 1). Построение внешнего контура регулятора (см. теорему 2), обеспечивающего точечную вырожденность замкнутой системы и тем самым – её финитную стабилизацию, основано на лемме 1 (шаг 2). На этом шаге строится квазиполином, не имеющий общих корней с характеристическим полиномом системы, замкнутой внутренним контуром (см. ниже систему (18)). Несовместность этой системы позволяет алгоритмизировать вычисление коэффициентов внешнего контура регулятора (шаги 3–5). В конце п. 2 рассмотрен случай, когда исходная система имеет конечный спектр и, следовательно, необходимость внутреннего контура отпадает. В п. 3 построенный регулятор модифицируется для его применения к семейству спектрально управляемых систем (см. пп. 4, 5).

1. Регулятор финитной стабилизации. Построим дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) финитную стабилизацию (см. тождества (2)).

Обозначим $M_{n+1}(p, \lambda) = w(p, \lambda)$, и пусть

$$M(p, \lambda) = [M_1(p, \lambda), \dots, M_n(p, \lambda), M_{n+1}(p, \lambda)]' \quad (4)$$

– вектор-столбец, образованный алгебраическими дополнениями к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F_\varphi(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p - a_{n,n}(\lambda) & -1 \\ -\varphi_1(\lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $a_{ij}(\lambda)$ – элементы матрицы $A(\lambda)$; $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, – полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы $|F_\varphi(p, \lambda)| = d_0(p)$, где $d_0(p)$ – некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geq n + 1$.

При выполнении условия (3) система полиномиальных уравнений

$$M_i(p, \lambda) = 0, \quad (p, \lambda) \in \mathbb{C}^2, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

относительно переменных p , λ может иметь лишь конечное [8], в частности, пустое множество решений. Поэтому редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) необходимо содержит полином $\tilde{d}_0(p)$ с действительными коэффициентами, множество корней которого обозначим \tilde{P}_0 . В частности, возможно $\tilde{d}_0(p) = 1$ и тогда $\tilde{P}_0 = \emptyset$. По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\tilde{\varphi}'(p, \lambda) = (\tilde{\varphi}_1(p, \lambda), \dots, \tilde{\varphi}_{n+1}(p, \lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\tilde{\varphi}'(p, \lambda) M(p, \lambda) = \tilde{d}_0(p). \quad (7)$$

Замечание 1. При вычислении базиса Грёбнера для системы полиномов (4) полином $M_{n+1}(p, \lambda) = w(p, \lambda)$ можно исключить, так как он является линейной комбинацией полиномов $M_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$.

Если степень полинома $\tilde{\nu} = \deg \tilde{d}_0(p)$ меньше, чем $n + 1$, то обе части равенства (7) домножим на полином $d_1(p)$ с действительными коэффициентами степени $n + 1 - \tilde{\nu}$. Обозначим $d_0(p) = d_1(p)\tilde{d}_0(p)$. Если $\deg \tilde{d}_0(p) \geq n + 1$, то полагаем $d_1(p) = 1$. Таким образом, $\nu = \deg d_0(p) \geq n + 1$. Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен единице. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \mu_0}\}$.

Согласно [18, следствие 1] найдутся полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$; $\bar{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $r = \nu - n \geq 1$, обеспечивающие равенство

$$\left[-\varphi_1(\lambda), \dots, -\varphi_n(\lambda), p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda) p^{r-i} \right] M(p, \lambda) = d_0(p). \quad (8)$$

Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, и $\bar{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов, используя равенство (8).

Замечание 2. В силу задания системы (6) значения $p_k \in \tilde{P}_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, обеспечивающих равенство (8). Поэтому $d_0(p) = d_1(p)\tilde{d}_0(p)$ и $\tilde{P}_0 \subseteq P_0$. Значения $p_k \in \tilde{P}_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $\tilde{d}_0(p)$ – *инвариантным полиномом*.

Если $\tilde{P}_0 = \emptyset$, то множество корней полинома $d_0(p) = d_1(p)$ может быть произвольным при условии: невещественные корни разбиваются на пары самосопряжённых. При выборе полинома $d_1(p)$ учитываем требование: различным корням p_i полинома $d_1(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Оно необходимо для построения искомого регулятора.

Равенство (8) означает, что $|F_\varphi(p, \lambda)| = d_0(p)$, т.е. замкнутая система с характеристической матрицей $F_\varphi(p, \lambda)$ имеет конечный спектр.

Регулятор финитной стабилизации будем строить в виде

$$u(t) = x_{n+1}(t),$$

$$x_{n+1}^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\lambda) x_i(t) + \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda) x_{n+1}^{(r-i)}(t) + f_1(p, \lambda) x_{n+2}(t) + q_1(\lambda) a_1(\lambda) x_{n+3}(t),$$

$$x_{n+2}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i x_i(t) + f_2(p, \lambda) x_{n+2}(t) + q_2(\lambda) a_1(\lambda) x_{n+3}(t),$$

$$\dot{x}_{n+3}(t) = x_{n+2}(t) + a_2(\lambda) x_{n+3}(t), \quad t > 0. \quad (9)$$

Здесь $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $q'(\lambda) = [q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$; $\psi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ – числа; $f_1(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda) p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0, r_1}$, $f_2(p, \lambda) = \sum_{i=0}^s \bar{f}_i(\lambda) p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0, s}$ – некоторые полиномы, $r_1 \geq 0$, $s \geq 1$.

Характеристической матрицей замкнутой системы (1), (9) будет следующая ($\lambda = e^{-ph}$):

$$\tilde{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1}(\lambda) & \dots & -a_{n-1,n}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n,n}(\lambda) & -1 & 0 & 0 \\ -\varphi_1(\lambda) & \dots & -\varphi_n(\lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda) p^{r-i} & -f_1(p, \lambda) & -q_1(\lambda) a_1(\lambda) \\ -\psi_1 & \dots & -\psi_n & 0 & p^s - f_2(p, \lambda) & -q_2(\lambda) a_1(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Замкнутую систему (1), (9) с характеристической матрицей (10) будем называть *системой* (10). Коэффициенты системы (10) подберём такими, чтобы имело место равенство

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p),$$

где $d(p) = d_2(p)d_0(p)$ – характеристический полином степени $N \geq n+3$, а $d_2(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами. Также потребуем, чтобы замкнутая система приводилась к нормальной форме. Ниже установлено (теорема 2), что при $N \geq 2n+r$ это возможно, причём полиномы $f_i(p, \lambda)$, $i = 1, 2$, можно выбрать (лемма 3) такими, чтобы выполнялись неравенства

$$r_1 = \deg_p f_1(p, \lambda) \leq n+r-1, \quad r_2 = \deg_p f_2(p, \lambda) \leq s-1. \quad (11)$$

Неравенство $N \geq 2n+r$ всегда можно обеспечить за счёт степени $\deg d_2(p) = s+1$ полинома $d_2(p)$.

Покажем, что если $N \geq 2n+r$ и выполнены неравенства (11), то система (10) может быть записана в нормальной форме. Для упрощения будем оперировать элементами характеристической матрицы (10).

Если $r \geq 2$, то, введя вспомогательные переменные

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \tilde{x}_1(t), \quad \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t), \quad \dots, \quad \dot{\tilde{x}}_{r-2}(t) = \tilde{x}_{r-1}(t)$$

из системы (10), получим систему с характеристической матрицей, в которой после n -й строки и $(n+1)$ -го столбца добавятся $r-1$ строк и столбцов. Так как эта процедура общеизвестна,

то выпишем фрагмент полученной матрицы, начиная с элемента, расположенного в позиции $(n, n+1)$:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p & -1 & 0 \\ -\bar{\varphi}_r(\lambda) & -\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) & \dots & -\bar{\varphi}_2(\lambda) & p - \bar{\varphi}_1(\lambda) & -\sum_{i=1}^s \bar{f}_i(\lambda) p^{s-i} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p^s - \sum_{i=1}^s \bar{f}_i(\lambda) p^{s-i} \end{array} \right]. \quad (12)$$

Если $m_1 = r_1 - r \geq 0$, то, выполняя элементарные преобразования над столбцами этой матрицы (см. [19, п. 3.4]), её последний столбец приведём к виду

$$\left[-\tilde{f}_0(p, \lambda), -\tilde{f}_1(\lambda), \dots, -\tilde{f}_{r-1}(\lambda), -\tilde{f}_r(\lambda), p^s - \sum_{i=1}^s \bar{f}_i(\lambda) p^{s-i} \right]'. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{f}_0(p, \lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat{f}_0(\lambda)p^{r_1-r}$ относительно p ; $\tilde{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, – некоторые полиномы.

Так как $N \geq 2n+r$, то $s = N - n - r - 1 \geq n - 1$. Если $s \geq 2$, то в полученной характеристической матрице после $(n+r)$ -й строки и $(n+r+1)$ -го столбца аналогично (12) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что опять-таки равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных.

Согласно (11) получаем $m_1 = r_1 - r \leq n - 1$, и поскольку $n - 1 \leq s$, то $m_1 \leq s$. Если $m_1 > 0$, то, используя строки с номерами с $n+r+1$ по $n+r+s$, посредством элементарных преобразований элементы n -й строки

$$[-a_{n,1}(\lambda), \dots, p - a_{n,n}(\lambda), -1, 0, \dots, 0, -\tilde{f}_0(p, \lambda), 0, \dots, 0],$$

начиная с $n+r+1$ -го, заменим полиномами, зависящими только от λ . В результате получим регулятор финитной стабилизации в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \psi_1 f(\lambda) x_1(t) + \dots + \psi_n f(\lambda) x_n(t) + x_{n+1}(t) + \dots + \check{f}_1(\lambda) x_{N-s}(t) + \dots \\ &\quad \dots + \check{f}_s(\lambda) x_{N-1}(t) + f(\lambda) q_2(\lambda) a_1(\lambda) x_N(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= x_{n+2}(t) + \tilde{f}_1(\lambda) x_{N-s}(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_{N-s-2}(t) = x_{N-s-1}(t) + \tilde{f}_{r-1}(\lambda) x_{N-s}(t), \\ \dot{x}_{N-s-1}(t) &= \varphi_1(\lambda) x_1(t) + \dots + \varphi_n(\lambda) x_n(t) + \bar{\varphi}_r(\lambda) x_{n+1}(t) + \dots \\ &\quad \dots + \bar{\varphi}_1(\lambda) x_{N-s-1}(t) + \tilde{f}_r(\lambda) x_{N-s}(t) + \dots + q_1(\lambda) a_1(\lambda) x_N(t), \\ \dot{x}_{N-s}(t) &= x_{N-s+1}(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_{N-2}(t) = x_{N-1}(t), \\ \dot{x}_{N-1}(t) &= \psi_1 x_1(t) + \dots + \psi_n x_n(t) + \dots + \bar{f}_s(\lambda) x_{N-s}(t) + \dots \\ &\quad \dots + \bar{f}_1(\lambda) x_{N-1}(t) + q_2(\lambda) a_1(\lambda) x_N(t), \quad \dot{x}_N(t) = x_{N-s}(t) + a_2(\lambda) x_N(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\check{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p, \lambda)$ при p^{r_1} , если $m_1 = r_1 - r = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие спектральной управляемости (3). Для финитной стабилизации системы (1) регулятором (14) достаточно:

1) обеспечить замкнутой системе (10) конечный спектр с некоторым характеристическим полиномом $d(p)$ степени $N \geq 2n+r$;

2) выбрать полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ так, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ были целыми.

Доказательство теоремы следует доказательству теоремы 1 работы [8]. Так как характеристическая матрица замкнутой системы (1), (14) (обозначим её $\hat{A}(p, e^{-ph})$) получена из матрицы (10) элементарными преобразованиями строк и столбцов, то её определитель также равен $d(p)$. К замкнутой системе (1), (14) применимо преобразование Лапласа. Согласно теореме Винера–Пэли для выполнения тождеств (2) достаточно [4], чтобы элементы первых n строк матрицы $(\hat{A}(p, e^{-ph}))^{-1}$ были целыми функциями экспоненциального типа. Поэтому, учитывая структуру обратной матрицы, достаточно, чтобы дополнительные миноры к элементам первых n столбцов характеристической матрицы $\hat{A}(p, e^{-ph})$ были целыми функциями. Последнее свойство обеспечено ввиду разложения названных миноров по последнему столбцу матрицы $\hat{A}(p, e^{-ph})$ и условия 2) теоремы 1 (детали см. в [8]). Таким образом, регулятор (14) обеспечивает финитную стабилизацию системы (1).

2. Вычисление коэффициентов регулятора (9). Заметим, что построение регулятора (14) равносильно построению регулятора (9), поскольку регулятор (14) получен элементарными преобразованиями характеристической матрицы (10). Поэтому приведём схему вычисления коэффициентов регулятора (9), гарантирующих выполнение условий теоремы 1.

1) Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, и $\bar{\varphi}_j(\lambda)$, $j = \overline{0, r-1}$, можно найти как указано в [8, следствие 1] или методом неопределённых коэффициентов, используя равенство (8).

2) Выбор коэффициентов $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$.

Введём определитель

$$\Delta_\psi(p, \lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n-1,n-1}(\lambda) & -a_{n-1,n}(\lambda) \\ \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} & \psi_n \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\Delta_\psi(p, \lambda) = M_1(p, \lambda)\psi_1 + \dots + M_{n-1}(p, \lambda)\psi_{n-1} + M_n(p, \lambda)\psi_n$.

Лемма 1. При выполнении условия (3) для произвольного набора чисел $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \mu_0}\}$ найдётся действительный вектор $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n)$, $\psi_n = 1$, такой, что

$$\Delta_\psi(p_i, e^{-p_i h}) = M_1(p_i, e^{-p_i h})\psi_1 + \dots + M_{n-1}(p_i, e^{-p_i h})\psi_{n-1} + M_n(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0, \quad p_i \in P_0. \quad (15)$$

Доказательство. Согласно условию (3) $(M_1(p, e^{-ph}), \dots, M_n(p, e^{-ph})) \neq 0$, $p \in \mathbb{C}$, поэтому имеем систему ненулевых векторов

$$\bar{M}_i = (M_1(p_i, e^{-p_i h}), \dots, M_n(p_i, e^{-p_i h})) \neq 0, \quad p_i \in P_0, \quad i = \overline{1, \mu_0}. \quad (16)$$

Каждому вектору системы (16) поставим в соответствие ненулевой вектор, образованный только действительными или только мнимыми частями его компонент. А именно, пусть

$$\hat{M}_i = (M_{i1}, \dots, M_{in}), \quad i = \overline{1, \mu_0},$$

где $\hat{M}_i = \operatorname{Re} \bar{M}_i$, если вектор $\operatorname{Re} \bar{M}_i$ ненулевой, и $\hat{M}_i = \operatorname{Im} \bar{M}_i$ в противном случае. В силу условия (16) либо $\operatorname{Re} \bar{M}_i \neq 0$, либо $\operatorname{Im} \bar{M}_i \neq 0$ при каждом $i = \overline{1, \mu_0}$.

Очевидно, что для конечной системы ненулевых векторов $\{\hat{M}_i : i = \overline{1, \mu_0}\}$ существует направление $(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, 1)$, проекция на которое каждого вектора будет отлична от нуля. Значит, найдутся числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, \mu_0}$, такие, что система линейных алгебраических уравнений

$$M_{i1}\psi_1 + \dots + M_{in-1}\psi_{n-1} = \alpha_i - M_{in}, \quad i = \overline{1, \mu_0}, \quad (17)$$

совместна относительно неизвестных $\psi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n-1}$. Числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, \mu_0}$, можно найти из условия ортогональности столбца $[\alpha_1 - M_{1n}, \dots, \alpha_{\mu_0} - M_{\mu_0 n}]'$ всем решениям однородной системы линейных алгебраических уравнений, сопряжённой к системе (17) (теорема Фредгольма). Требуемый набор действительных чисел $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, удовлетворяющих условию (15), получим как решение системы (17). Лемма доказана.

Вследствие выбора вектора $(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ система уравнений

$$\Delta_\psi(p, e^{-ph}) = 0, \quad d_0(p) = 0 \quad (18)$$

несовместна. Отсюда вытекает [19, следствие 1] следующее утверждение, существенное для построения регулятора (9), точнее, для построения векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$, $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$.

Лемма 2. *Если выполнено условие (15), то система полиномиальных уравнений*

$$\Delta_\psi(p, \lambda) = 0, \quad d_0(p) = 0, \quad (p, \lambda) \in \mathbb{C}^2, \quad (19)$$

относительно переменных (p, λ) может иметь лишь конечное, в частности, пустое множество решений $P_\lambda = \{(p_i, \lambda_i) \in \mathbb{C}^2 : i = \overline{1, \mu}\}$.

Замечание 3. Ввиду несовместности системы (18) замкнутая система (1) с характеристической матрицей (5), в которой $\lambda = e^{-ph}$, спектрально наблюдаема по линейному выходу $y(t) = \psi_1 x_1(t) + \dots + \psi_{n-1} x_{n-1}(t) + x_n(t)$, $t \geq 0$.

3) Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$.

Согласно п. 1 получаем разложение (7) и полином $d_0(p)$, удовлетворяющий (8). Характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (10) берём в виде $d(p) = d_2(p)d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами. Для приведения замкнутой системы (10) к нормальной форме понадобится неравенство $N = \deg d(p) \geq 2n + r$, которое всегда можно выполнить за счёт степени полинома $d_2(p)$. При выборе полинома $d_2(p)$ также учитываем требование: различным корням p_i полинома $d_2(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{r_i}, \quad p_i \in \tilde{P}, \quad (20)$$

где $\tilde{P} = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, s_1}\}$ – множество его различных корней, а r_i – алгебраическая кратность корня p_i . Обозначим $\tilde{\Lambda} = \{e^{-p_i h} : p_i \in \tilde{P}, i = \overline{1, s_1}\}$.

Для обеспечения условия 2) теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (20)) являлись нулями функций $a_1(e^{-ph})$ и $a_2(e^{-ph}) - p$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём [6]

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}, \quad \lambda_i = e^{-p_i h} \in \tilde{\Lambda}. \quad (21)$$

Чтобы функция $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ была целой необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in \tilde{P}$ производные по переменной p обращались в нуль:

$$(a_2(e^{-ph}) - p)^{(k)}|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, r_i - 1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \tilde{\Lambda}$ ($p_i \in \tilde{P}$) должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i \in \tilde{P}, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{h \lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, r_i - 1}, \quad \text{если } r_i > 1, \quad i = \overline{1, s_1}. \quad (22)$$

Замечание 4. Если набор корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ ($d(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)d_2(p)$) содержит комплексно сопряжённые корни, то возможна ситуация, когда $p_{k_1} \neq p_{k_2}$, но $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_1,2} h}$, и первое равенство в (22) выполнить нельзя, так как в этом случае $a_2(\lambda_{k_1}) = a_2(\lambda_{k_2})$. В такой ситуации, чтобы воспользоваться уже проведёнными рассуждениями, введём [20] новое запаздывание: $\tilde{h} = h/k$, где k – натуральное число. Тогда матрица системы (1) будет иметь

вид $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^k + \dots + A_m\lambda^{km}$ и $\lambda^i x_k(t) = x_k(t - i\tilde{h})$. Натуральное k и полиномы $d_1(p), d_2(p)$ можно выбрать такими, чтобы различным значениям $p_i \in \tilde{P}$ соответствовали различные $\lambda_i = e^{-p_i\tilde{h}}$. Считаем далее это условие выполненным.

Пусть $P_0^* = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, \mu_1}\}$, $\Lambda = \{\lambda_j \in \mathbb{C} : j = \overline{1, \mu_2}\}$ – конечные (см. лемму 2) множества различных значений переменных (p, λ) таких, что при некоторых (i, j) пара $(p_i, \lambda_j) \in P_\lambda$, т.е. P_0^*, Λ – проекции множества P_λ на p и λ соответственно. Очевидно включение $P_0^* \subseteq P_0$.

Обозначим $Q(p, \lambda) = (\Delta_\psi(p, \lambda), d_0(p))'$. Потребуем, чтобы одновременно с равенствами (22) выполнялись соотношения $Q(a_2(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0$, $\lambda_i \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}$, т.е. равносильно

$$|\Delta_\psi(a_2(\lambda_i), \lambda_i)| + |d_0(a_2(\lambda_i))| \neq 0, \quad \lambda_i \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}. \quad (23)$$

Эти условия понадобятся при построении векторного полинома $q'(\lambda)$.

Если для интерполяционного полинома $a_2(\lambda)$, построенного согласно формулам (22), при некотором $\lambda_i^* \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}$ неравенство (23) не выполняется, то к интерполяционным условиям (22) добавим [19] равенство

$$a_2(\lambda_i^*) = p_0 \quad (p_0 \in \mathbb{R}, \quad p_0 \notin P_0 \quad \text{и} \quad \lambda_i^* \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}). \quad (24)$$

Напомним, что P_0 – множество различных корней полинома $d_0(p)$. Значение p_0 можно взять одним и тем же для всех $\lambda_i^* \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}$. Вместо (24) можно потребовать выполнения равенства

$$a_2(\lambda_i^*) = p_i^* \quad (p_i^* \in \mathbb{C}, \quad e^{-p_i^*h} = \lambda_i^*, \quad \lambda_i^* \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}). \quad (25)$$

При этом паре комплексно сопряжённых значений $\lambda_{i_{1,2}}^*$ ставим в соответствие пару комплексно сопряжённых значений $p_{i_{1,2}}^*$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (22), (24) или (22), (25), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [21, с. 104].

4) Вычисление полинома $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$.

Положим

$$k(p, \lambda) = (a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p), \quad K(p, \lambda) = k(p, \lambda) + p^s d_0(p). \quad (26)$$

Докажем, что справедлива

Теорема 2. Пусть выполнено условие спектральной управляемости (3). Для того чтобы замкнутая система (10) имела характеристический полином $d(p)$ степени $N \geq 2n + r$ достаточно:

1) выбрать векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p, \lambda)$ была полиномом;

2) векторный полином $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$ взять таким, чтобы имело место равенство

$$f'(p, \lambda)Q(p, \lambda) = K(p, \lambda), \quad Q(p, \lambda) = (\Delta_\psi(p, \lambda), d_0(p))', \quad (27)$$

где функция $K(p, \lambda)$ задана в (26).

Доказательство. Пусть выполнены условия 1), 2). Разлагая определитель матрицы (10) по последней строке, получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(p, \lambda)| &= (p - a_2(\lambda))((p^s - f_2(p, \lambda))d_0(p) - f_1(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda)) - a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\Delta_\psi(p, \lambda) + q_2(\lambda)d_0(p)) = \\ &= (p - a_2(\lambda))((p^s d_0(p) - f'(p, \lambda)Q(p, \lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda)). \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $f'(p, \lambda)Q(p, \lambda) = K(p, \lambda)$, то из (26), (28) вытекает, что $|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p)$. Теорема доказана.

Чтобы функция $k(p, \lambda)$ являлась полиномом должно, согласно теореме Безу, выполняться тождество

$$a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (29)$$

Существование векторного полинома $q'(\lambda)$, обеспечивающего это тождество, следует из работы [19]. Действительно, полиномы $\Delta_\psi(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты в силу условия (23). Поэтому существует векторный полином $\tilde{q}(\lambda)$ такой, что

$$\tilde{q}'(\lambda)Q(a_2(\lambda), \lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Полином $\tilde{q}(\lambda)$ может быть найден с помощью алгоритма Евклида или методом неопределённых коэффициентов. Таким образом, при

$$q'(\lambda) = -\tilde{q}'(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) \quad (30)$$

тождество (29) выполняется (дробь $d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)$ является полиномом согласно [19]).

5) Нахождение векторного полинома $f'(p, \lambda)$.

Полином $k(p, \lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p, \lambda) = ((d(p) - d(p)\tilde{q}'(\lambda)Q(p, \lambda)) + (d(p)\tilde{q}'(\lambda)Q(p, \lambda) + a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda)))/(a_2(\lambda) - p).$$

Так как $d(p) = d_2(p)d_0(p) = [0, d_2(p)]Q(p, \lambda)$, то, заменив в первой скобке $d(p)$ последним выражением и во второй скобке заменив $q'(\lambda)$ согласно (30), получаем

$$k(p, \lambda) = \left(\frac{1 - \tilde{q}'(\lambda)Q(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p} [0, d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p} \tilde{q}'(\lambda) \right) Q(p, \lambda). \quad (31)$$

Здесь, согласно теореме Безу, $(1 - \tilde{q}'(\lambda)Q(p, \lambda))/(a_2(\lambda) - p)$ и $(d(p) - d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda) - p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}'(\lambda)Q(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p} [0, d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p} \tilde{q}'(\lambda) + [0, 1]p^s, \quad (32)$$

вследствие (31) имеем равенство (27), т.е. выполнено условие 2) теоремы 2. Итак, все условия теорем 1 и 2 реализованы, следовательно, регулятор (14) построен.

Запишем равенство (27) в развернутом виде

$$K(p, \lambda) = f_1(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda) + f_2(p, \lambda)d_0(p). \quad (33)$$

Лемма 3. Если $N \geq 2n + r$, то в равенстве (33) можно считать выполнеными неравенства

$$\deg_p f_1(p, \lambda) \leq n + r - 1 \quad \text{и} \quad \deg_p f_2(p, \lambda) \leq s - 1.$$

Доказательство. Степень полинома $f_1(p, \lambda)$ относительно p сделаем меньше степени $n + r$ переменной p в полиноме $d_0(p)$. Если степень переменной p полинома $f_1(p, \lambda)$ не меньше, чем $n + r$, то представим его в виде

$$f_1(p, \lambda) = \xi_0(p, \lambda)d_0(p) + \xi_1(p, \lambda),$$

где $\xi_i(p, \lambda)$, $i = 0, 1$, – полиномы, причём $\deg_p \xi_1(p, \lambda) \leq n + r - 1$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член p^{n+r} . В результате получим

$$K(p, \lambda) = \xi_1(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda) + (f_2(p, \lambda) + \xi_0(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda))d_0(p). \quad (34)$$

Покажем, что

$$\deg_p (f_2(p, \lambda) + \xi_0(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda)) \leq s - 1.$$

Если допустить обратное неравенство, то

$$\deg_p (f_2(p, \lambda) + \xi_0(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda))d_0(p) \geq n + r + s. \quad (35)$$

Так как $s = N - n - r - 1 \geq n - 1$, то $2n + r - 1 \leq n + r + s$. Отсюда с учётом того, что $\deg_p \xi_1(p, \lambda) \leq n + r - 1$ и $\deg_p \Delta_\psi(p, \lambda) = n - 1$, получаем

$$\deg_p(\xi_1(p, \lambda)\Delta_\psi(p, \lambda)) \leq 2n + r - 2 < n + r + s.$$

Ввиду (34), (35) $\deg_p K(p, \lambda) \geq n + r + s$, что противоречит равенству (26), согласно которому $\deg_p K(p, \lambda) \leq n + r + s - 1$. Лемма доказана.

Полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p, \lambda)$ можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение полиномиального уравнения

$$(a_1(\lambda)q'(\lambda)Q(p, \lambda) + d(p)) - (a_2(\lambda) - p)(f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda) - p^s)Q(p, \lambda) = 0. \quad (36)$$

Замечание 5. Если исходная система (1) имеет конечный спектр, т.е. $w(p, e^{-ph}) = w(p)$ – полином, то полагаем $d_0(p) = w(p)$ и регулятор финитной стабилизации строим в виде

$$u(t) = f_1(p, \lambda)x_{n+1}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(s)}(t) &= \sum_{i=1}^n \psi_i x_i(t) + f_2(p, \lambda)x_{n+1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t), \\ \dot{x}_{n+2}(t) &= x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь, как и раньше, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$; $\psi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ – числа; $f_1(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0, r_1}$, $f_2(p, \lambda) = \sum_{i=0}^s \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0, s}$, – некоторые полиномы, $r_1 \geq 0$, $s \geq 1$.

Все приведённые выше утверждения, включая теоремы 1 и 2 (при $r = 0$), а также изложенная в п. 2 схема вычисления коэффициентов регулятора остаются в силе. В частности, при $N \geq 2n$ замкнутая система (1), (37) приводится к нормальному виду. Для этого при $s \geq 2$ в полученной характеристической матрице после n -й строки и $(n+1)$ -го столбца аналогично (12) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных. Если $r_1 > 0$, то, используя строки с номерами с $n+1$ по $n+s$, с помощью элементарных преобразований замкнутую систему (1), (37) приведём кциальному виду.

3. Модификация регулятора (9). При построении регулятора элемент $\tilde{a}_{n+2, n+1}$ характеристической матрицы (10) в позиции $(n+2, n+1)$ можно взять равным -1 . Тогда, как несложно видеть, модифицированный регулятор

$$\begin{aligned} u(t) &= x_{n+1}(t), \\ x_{n+1}^{(r)}(t) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\lambda)x_i(t) + \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda)x_{n+1}^{(r-i)}(t) + f_1(p, \lambda)x_{n+2}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t), \\ x_{n+2}^{(s)}(t) &= \sum_{i=1}^n \psi_i x_i(t) + x_{n+1}(t) + f_2(p, \lambda)x_{n+2}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+3}(t), \\ \dot{x}_{n+3}(t) &= x_{n+2}(t) + a_2(\lambda)x_{n+3}(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (38)$$

отличается от регулятора (9) лишь предпоследним уравнением.

Полиномы $d(p)$ и $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ регулятора (38) строятся так же, как и в п. 2, поскольку формулировка теоремы 1 не меняется.

Векторные полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p, \lambda)$ находятся согласно (30), (32) с заменой $Q(p, \lambda) = (\Delta_\psi(p, \lambda), d_0(p))'$ на $\tilde{Q}(p, \lambda) = (\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda), d_0(p))'$, где

$$\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p - a_{n,n}(\lambda) & -1 \\ \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} & \psi_n & 1 \end{vmatrix} = w(p, \lambda) + \Delta_\psi(p, \lambda).$$

Действительно, характеристический определитель замкнутой системы (1), (38) имеет вид

$$\begin{aligned} (p - a_2(\lambda))((p^s - f_2(p, \lambda))d_0(p) - f_1(p, \lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)) - a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda) + q_2(\lambda)d_0(p)) = \\ = (p - a_2(\lambda))((p^s d_0(p) - f'(p, \lambda)\tilde{Q}(p, \lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)\tilde{Q}(p, \lambda)), \end{aligned} \quad (39)$$

аналогичный (28), поэтому для регулятора (38) верна прежняя теорема 2, задающая векторные полиномы $q'(\lambda)$, $f'(p, \lambda)$.

Замечание 6. Так как $\tilde{\Delta}_\psi(p, e^{-ph}) = w(p, e^{-ph}) + \Delta_\psi(p, e^{-ph})$, то выбором действительного вектора $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\psi_n = 1$, достаточно обеспечить (см. лемму 1) выполнение условия $\Delta_\psi(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0$ для тех значений $p_i \in P_0$, для которых $w(p_i, e^{-p_i h}) = 0$. Тогда при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ и действительном векторе $(\psi_1^*, \dots, \psi_n^*) = \gamma(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, 1)$ (число γ легко подобрать) будем иметь

$$\tilde{\Delta}_\psi(p_i, e^{-p_i h}) = M_1(p_i, e^{-p_i h})\psi_1^* + \dots + M_n(p_i, e^{-p_i h})\psi_n^* + M_{n+1}(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0, \quad p_i \in P_0. \quad (40)$$

Если $w(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0$ для всех $p_i \in P_0$, то полагаем $(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0$ и $\tilde{\Delta}_\psi(p, e^{-ph}) = w(p, e^{-ph})$. Тем самым модифицированный регулятор (38) расширяет возможности обеспечения условия (40), требуемого леммой 2. Это существенно при спектральном приведении и финитной стабилизации семейства систем вида (1) (см. п. 4).

Ввиду условия (40) для полиномов $\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)$, $d_0(p)$ справедлива лемма 2. Поэтому остаётся в силе схема п. 2 вычисления полиномов $q'(\lambda)$, $f'(p, \lambda)$ регулятора (38).

Как и выше, считаем, что $N \geq 2n + r$. Так как $N = n + r + s + 1$, то $s \geq n - 1$. Согласно лемме 3 $m_1 = r_1 - r \leq n - 1$, поэтому $m_1 \leq s$. В этом случае справедливо равенство (34), в котором вместо полинома $\Delta_\psi(p, \lambda)$ будет полином $\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)$. Так как $\deg_p(\xi_1(p, \lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)) \leq 2n + r - 1 \leq n + r + s$, $\deg_p K(p, \lambda) \leq n + r + s - 1$ то

$$\deg_p(f_2(p, \lambda) + \xi_0(p, \lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)) \leq s.$$

Итак, в равенстве (33) можно полагать, что

$$r_1 = \deg_p f_1(p, \lambda) \leq n + r - 1 \quad \text{и} \quad r_2 = \deg_p f_2(p, \lambda) \leq s \quad (41)$$

соответственно, где $f_1(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$ и $f_2(p, \lambda) = \sum_{i=0}^s \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$.

Вместо матрицы (12) будем иметь матрицу

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p & -1 & 0 \\ -\bar{\varphi}_r(\lambda) & -\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) & \dots & -\bar{\varphi}_2(\lambda) & p - \bar{\varphi}_1(\lambda) & -f_1(p, \lambda) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & p^s - f_2(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями (см. [19, п. 3.4]) её последний столбец приведём к виду

$$[-\tilde{f}_0(p, \lambda), -\tilde{f}_1(\lambda), \dots, -\tilde{f}_{r-1}(\lambda), -\tilde{f}_r(\lambda), p^s - \hat{f}(p, \lambda)]', \quad (42)$$

где $\tilde{f}_0(p, \lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat{f}_0(\lambda)p^{r_1-r}$ относительно p ; $\tilde{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$ – некоторые полиномы; $\hat{f}(p, \lambda) = f_2(p, \lambda) + \tilde{f}_0(p, \lambda)$.

Так как характеристический полином системы (1), замкнутой регулятором (38), имеет старший член p^N , то, как следует из представления (39), $\deg_p(f'(p, \lambda)\tilde{Q}(p, \lambda)) \leq n + r + s - 1$. Если $r_2 = s$, то $\deg_p(f_2(p, \lambda)d_0(p)) = n + r + s$. Вследствие равенства $f'(p, \lambda)\tilde{Q}(p, \lambda) = f_1(p, \lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda) + f_2(p, \lambda)d_0(p)$ должно быть

$$\deg_p(f_1(p, \lambda)\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda)) = n + r + s \quad (43)$$

и $\hat{f}_0(\lambda) + \bar{f}_0(\lambda) = 0$ – сумма старших относительно p коэффициентов полиномов $f_1(p, \lambda)$, $f_2(p, \lambda)$. Итак, полином $\hat{f}(p, \lambda)$ в столбце (42) будет относительно p иметь степень не большую, чем $s - 1$.

В силу (43) имеем $r_1 + n = n + r + s$ или $r_1 - r = s$. Так как $r_1 - r \leq n - 1$ (см. (41)) и $s \geq n - 1$, то $r_1 - r = s = n - 1$. Если $s \geq 2$, то с помощью элементарных преобразований над строками характеристической матрицы, описанных после выражения (13), приведём регулятор финитной стабилизации к виду (14), где первое и предпоследнее уравнения будут такими:

$$\begin{aligned} u(t) &= \psi_1 f(\lambda) x_1(t) + \dots + \psi_n f(\lambda) x_n(t) + (f(\lambda) + 1) x_{n+1}(t) + \dots + \check{f}_1(\lambda) x_{N-s}(t) + \dots \\ &\quad \dots + \check{f}_s(\lambda) x_{N-1}(t) + f(\lambda) q_2(\lambda) a_1(\lambda) x_N(t), \\ \dot{x}_{N-1}(t) &= \psi_1 x_1(t) + \dots + \psi_n x_n(t) + x_{n+1}(t) + \dots + \hat{f}_s(\lambda) x_{N-s}(t) + \dots \\ &\quad \dots + \hat{f}_1(\lambda) x_{N-1}(t) + q_2(\lambda) a_1(\lambda) x_N(t). \end{aligned} \quad (44)$$

Как и в (14), здесь $\check{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p, \lambda)$ при p^{r_1} , если $m_1 = r_1 - r = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Все коэффициенты модифицированного регулятора (38) находятся по изложенной выше схеме. Как и выше, система (1), замкнутая регулятором (38), при $N \geq 2n + r$ введением вспомогательных переменных (если необходимо) и элементарными преобразованиями столбцов также может быть приведена к нормальной форме. Характеристический определитель (полином $d(p)$) приведённой системы, очевидно, не изменится. Первые $N - 1$ строки матрицы, обратной к характеристической матрице приведённой системы, образованы целыми функциями экспоненциального типа. Если старшая степень λ в i -й строке этой матрицы равна α_i , $i = \overline{1, n+1}$, то согласно теореме Винера–Пэли в замкнутой системе (1), (38) переменные $x_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, n+1}$, по крайней мере, при $t \geq (\alpha_i + 1)h$. При этом и управление $u(t) \equiv 0$, $t \geq (\alpha_i + 1)h$, поскольку $u(t) = x_{n+1}(t)$. Следовательно, тождества (2) будут иметь место, по крайней мере, при $t \geq t_1 = (\bar{\alpha} + 1)h$, $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_i : i = \overline{1, n+1}\}$.

4. Спектральное приведение и финитная стабилизация семейства систем вида (1). Единый регулятор финитной стабилизации семейства систем (1) будем строить в виде (38). Как отмечалось в замечании 6, модифицированный регулятор (38) расширяет возможности обеспечения условия (40), требуемого леммой 2.

Из изложенного выше видно, что основными этапами построения регулятора являются обеспечение равенства (8) и неравенства (40) за счёт выбора соответственно векторного полинома $(-\varphi_1(\lambda), \dots, -\varphi_n(\lambda), p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda)p^{r-i})$ и действительного вектора $(\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)$. Следовательно, системы, для которых эти векторы являются общими, могут быть замкнуты единым регулятором. Выясним, для каких семейств систем вида (1) это возможно.

Рассмотрим семейство объектов управления, описываемых линейными автономными дифференциальными системами n -го порядка с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}^\omega(t) = \sum_{i=0}^m A_i^\omega x^\omega(t - ih) + bu(t), \quad t > 0, \quad x^\omega(t) = \eta^\omega(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in [-mh, 0]. \quad (45)$$

Множество Ω может быть подмножеством действительных чисел: $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, тогда ω – параметр, от которого зависят коэффициенты семейства (45), или отрезком натурального ряда: $\Omega \subset \mathbb{N}$ конечно, тогда ω – натуральный индекс (порядковый номер системы: $\omega = \overline{1, N_\Omega}$). В записанных далее выражениях и соотношениях предполагается, что $\omega \in \Omega$. Смысл остальных обозначений прежний: $x^\omega = [x_1^\omega, \dots, x_n^\omega]'$ – n -вектор-столбец решения системы с индексом ω семейства (45) (для краткости – система ω) ($n \geq 2$); $0 < h$ – постоянное запаздывание; A_i^ω – постоянные $n \times n$ -матрицы ($i = \overline{0, m}$, m – максимальная кратность запаздывания в семействе (45); η^ω – начальная кусочно непрерывная функция; $b = e_n = [0, \dots, 0, 1]'$, u – скалярное управление, одно и то же для всех систем семейства.

Следуя п. 1, обозначим $A^\omega(\lambda) = A_0^\omega + A_1^\omega \lambda + \dots + A_m^\omega \lambda^m$ ($\lambda \in \mathbb{C}$); $A^\omega(\lambda) = [a_{ij}^\omega(\lambda)]$;

$$F_\varphi^\omega(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}^\omega(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}^\omega(\lambda) & -a_{1,n}^\omega(\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}^\omega(\lambda) & \dots & -a_{n,n-1}^\omega(\lambda) & p - a_{n,n}^\omega(\lambda) & -1 \\ -\varphi_1(\lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda)p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{\varphi}_j(\lambda)$, $j = \overline{1, r}$, – некоторые полиномы ($r \geq 1$).

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)), \quad \bar{\Phi}(\lambda) = (\bar{\varphi}_1(\lambda), \dots, \bar{\varphi}_r(\lambda)).$$

Векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$ в последней строке матрицы $F_\varphi^\omega(p, \lambda)$ будем выбирать такими, чтобы

$$|F_\varphi^\omega(p, \lambda)| = d_0(p) = p^\nu + p^{\nu-1}\beta_1 + \dots + p^n\beta_r + \dots + \beta_\nu, \quad (46)$$

где $d_0(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами: β_i – вещественные числа, $i = \overline{1, \nu}$, $\nu = n + r$. Напомним, что здесь и далее предполагается, что $\omega \in \Omega$, поэтому если $\Omega \subset \mathbb{N}$ конечно, то (46) является конечной системой равенств: $\omega = \overline{1, N_\Omega}$.

Определение. Если при некоторых полиномах $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$ и $d_0(p)$ для всех $\omega \in \Omega$ имеет место равенство (46), то семейство систем (45) назовём *спектрально приводимым с полиномом $d_0(p)$* .

Пусть $W^\omega(p, \lambda) = [M_1^\omega(p, \lambda), \dots, M_{n+1}^\omega(p, \lambda)]'$ – алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi^\omega(p, \lambda)$. Заметим, что $M_{n+1}^\omega(p, \lambda) = w^\omega(p, \lambda)$, где $w^\omega(p, \lambda) = |pE_n - A^\omega(e^{-ph})|$.

Как и в п. 1, полином $\tilde{d}_0(p) = d_1(p)\tilde{d}_0(p)$, где $d_1(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами, $d_0(p)$ – инвариантный полином, который получается следующим образом. При $\omega \in \Omega$ для системы полиномов $\{M_1^\omega(p, \lambda), \dots, M_n^\omega(p, \lambda)\}$ находим редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$). Ввиду спектральной управляемости он необходимо содержит полином $\tilde{d}_0^\omega(p)$, корни которого, если полином отличен от постоянной, являются инвариантными спектральными значениями. Поэтому должно выполняться равенство $\tilde{d}_0^\omega(p) = \tilde{d}_0(p)$, т.е. этот полином не должен зависеть от параметра ω , иначе построение предполагаемого единого регулятора невозможно. (В таком случае можно рассмотреть построение по изложенной выше схеме "универсального" регулятора с коэффициентами, зависящими от параметра ω .)

Если параметр ω – натуральный индекс, то, вычисляя редуцированный базис Грёбнера для системы полиномов $\{M_1^\omega(p, \lambda), \dots, M_n^\omega(p, \lambda)\}$, находим инвариантный полином $\tilde{d}_0^\omega(p)$, $\omega = \overline{1, N_\Omega}$, для каждой системы ω в отдельности. Полином $\tilde{d}_0(p)$ записываем как наименьшее общее кратное найденных инвариантных полиномов. Векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$, обеспечивающие равенство (46), могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов. При этом полином $d_1(p)$ также предпочтительно брать с неопределёнными коэффициентами, так как для фиксированных коэффициентов полинома $d_1(p)$ система (46) может не иметь решения.

Получим необходимые условия на семейство систем (45), при которых единый регулятор финитной стабилизации существует, а также необходимые условия, которым удовлетворяют коэффициенты регулятора. Пусть

$$M_k^\omega(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_{k,i}^\omega(\lambda)p^i, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad M_n^\omega(p, \lambda) = p^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_{n,i}^\omega(\lambda)p^i. \quad (47)$$

Очевидно, что

$$|F_\varphi^\omega(p, \lambda)| = -(\varphi_1(\lambda)M_1^\omega(p, \lambda) + \dots + \varphi_n(\lambda)M_n^\omega(p, \lambda)) + w^\omega(p, \lambda) \left(p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda)p^{r-i} \right). \quad (48)$$

С учётом (47) первую группу слагаемых в (48) представим в виде

$$-(\varphi_1(\lambda)M_1^\omega(p, \lambda) + \dots + \varphi_n(\lambda)M_n^\omega(p, \lambda)) = -\sum_{i=0}^{n-1} p^i s_i^\omega(\lambda),$$

где

$$s_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\lambda) \gamma_{j,i}^\omega(\lambda), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad s_{n-1}^\omega(\lambda) = \varphi_n(\lambda).$$

Замечание 7. Произведение полиномов $L_1(p) = \sum_{i=0}^k a_i(\lambda)p^{k-i}$, $L_2(p) = \sum_{i=0}^l b_i(\lambda)p^{l-i}$ может быть записано в виде

$$L_1(p)L_2(p) = \sum_{i=0}^{N_1} p^{N_1-i} \sum_{j=\max(0, i-l)}^{\min(i, k)} a_j(\lambda) b_{i-j}(\lambda), \quad N_1 = k+l.$$

Запишем характеристический квазиполином системы ω :

$$w^\omega(p, \lambda) = p^n + p^{n-1} \alpha_1^\omega(\lambda) + \dots + p \alpha_{n-1}^\omega(\lambda) + \alpha_n^\omega(\lambda).$$

Согласно замечанию 7 (напоминаем, что $\nu = n+r$) имеем

$$w^\omega(p, \lambda) \left(p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\lambda) p^{r-i} \right) = - \sum_{i=0}^{\nu} p^{\nu-i} \sum_{j=\max(0, i-r)}^{\min(i, n)} \alpha_j^\omega(\lambda) \bar{\varphi}_{i-j}(\lambda), \quad \alpha_0^\omega(\lambda) = 1, \quad \bar{\varphi}_0(\lambda) = -1.$$

Сравнивая коэффициенты полиномов $|F_\varphi^\omega(p, \lambda)|$ и $d_0(p)$, получаем

$$- \sum_{j=0}^{\min(i, n)} \alpha_j^\omega(\lambda) \bar{\varphi}_{i-j}(\lambda) = \beta_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad - \sum_{j=i-r}^{\min(i, n)} \alpha_j^\omega(\lambda) \bar{\varphi}_{i-j}(\lambda) - s_{\nu-i}^\omega(\lambda) = \beta_i, \quad i = \overline{r+1, \nu}. \quad (49)$$

Таким образом, верна

Теорема 3. Семейство систем (45) спектрально приводимо с полиномом $d_0(p)$, если и только если найдутся полиномы $\Phi(\lambda)$, $\bar{\Phi}(\lambda)$, обеспечивающие равенства (49).

Так как числа β_j , $j = \overline{1, \nu}$, не зависят от параметра ω , то и полиномы в правых частях равенств (49) не должны зависеть от ω . Величины, не зависящие от индекса ω системы, будем называть *инвариантными*.

Опираясь на теорему 3, приведём простые для проверки необходимые условия спектральной приводимости семейства (45).

Следствие 1. Для спектральной приводимости семейства (45) при $1 \leq r \leq n-2$ необходимо, чтобы были инвариантны r коэффициентов характеристических квазиполиномов систем семейства (45):

$$\alpha_i^\omega(\lambda) = \alpha_i(\lambda), \quad i = \overline{1, r}, \quad \omega \in \Omega.$$

Если $r \geq n-1 \geq 1$, то должны быть инвариантны все коэффициенты характеристических квазиполиномов, т.е. системы семейства (45) должны иметь общий характеристический квазиполином

$$w^\omega(p, \lambda) = w(p, \lambda) = p^n + p^{n-1} \alpha_1(\lambda) + \dots + p \alpha_{n-1}(\lambda) + \alpha_n(\lambda).$$

Доказательство. Если $1 \leq r \leq n-2$, то из (49) имеем

$$- \sum_{j=0}^i \alpha_j^\omega(\lambda) \bar{\varphi}_{i-j}(\lambda) = \beta_i, \quad i = \overline{1, r}.$$

Или, в подробной записи:

$$\begin{aligned} \alpha_1^\omega(\lambda) - \bar{\varphi}_1(\lambda) &= \beta_1, & \alpha_2^\omega(\lambda) - \alpha_1^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_1(\lambda) - \bar{\varphi}_2(\lambda) &= \beta_2, \\ \alpha_r^\omega(\lambda) - \alpha_{r-1}^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_1(\lambda) - \dots - \alpha_1^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) - \bar{\varphi}_r(\lambda) &= \beta_r. \end{aligned} \quad (50)$$

Отсюда следует инвариантность коэффициентов $\alpha_i^\omega(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $r \leq n - 2$.

При $r = n - 1$ имеем систему равенств (50) и дополнительно при $i = n$ из правой системы в (49) получаем равенство

$$-\alpha_1^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{n-1}(\lambda) - \dots - \alpha_{n-1}^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_1(\lambda) + \alpha_n^\omega(\lambda) - \varphi_n(\lambda) = \beta_n,$$

что влечёт за собой инвариантность коэффициента $\alpha_n^\omega(\lambda) = \alpha_n(\lambda)$.

Если $r \geq n$, то из (49) получаем систему равенств (50), где $r = n$, откуда и следует инвариантность всех коэффициентов: $\alpha_i^\omega(\lambda) = \alpha_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$.

Поэтому для спектральной приводимости семейства (45) при $r \geq n - 1$ необходимо, чтобы все его системы имели общий характеристический квазиполином $w^\omega(p, \lambda) = w(p, \lambda)$. Следствие доказано.

Если $r \geq n - 1$, то из правой системы в (49) вытекает, что

$$-\sum_{j=i-r}^n \alpha_j^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{i-j}(\lambda) - s_{\nu-i}^\omega(\lambda) = \beta_i, \quad i = \overline{r+1, \nu}.$$

Отсюда в подробной записи получаем

$$\begin{aligned} -\alpha_1^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_r(\lambda) - \dots - \alpha_n^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{r+1-n}(\lambda) - \varphi_n(\lambda) &= \beta_{r+1}, \\ -\alpha_2^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_r(\lambda) - \dots - \alpha_n^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{r+2-n}(\lambda) - s_{n-2}^\omega(\lambda) &= \beta_{r+2}, \quad \dots, \\ -\alpha_{n-1}^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_r(\lambda) - \alpha_n^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_{r-1}(\lambda) - s_1^\omega(\lambda) &= \beta_{\nu-1}, \quad -\alpha_n^\omega(\lambda)\bar{\varphi}_r(\lambda) - s_0^\omega(\lambda) &= \beta_\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, можно сформулировать ещё одно следствие из теоремы 3.

Следствие 2. Для спектральной приводимости семейства (45) при $r \geq n - 1 \geq 1$ необходима инвариантность всех полиномов

$$s_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\lambda)\gamma_{j,i}^\omega(\lambda) = s_i(\lambda), \quad i = \overline{0, n-2}.$$

Следуя п. 3, рассмотрим определитель

$$\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}^\omega(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}^\omega(\lambda) & -a_{1,n}^\omega(\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}^\omega(\lambda) & \dots & -a_{n,n-1}^\omega(\lambda) & p - a_{n,n}^\omega(\lambda) & -1 \\ \psi_1(\lambda) & \dots & \psi_{n-1}(\lambda) & \psi_n(\lambda) & 1 \end{vmatrix} = w^\omega(p, \lambda) + \Delta_\psi^\omega(p, \lambda),$$

где определитель $\Delta_\psi^\omega(p, \lambda)$ получается вычеркиванием в определителе $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda)$ последнего столбца и предпоследней строки; $\psi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, – некоторые полиномы.

Для реализации единого регулятора вида (38) полиномы $\psi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, должны быть такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in P^0 = \{p \in \mathbb{C} : d_0(p) = 0\}, \quad (51)$$

т.е. $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, e^{-ph}) \neq 0$ на корнях полинома $d_0(p)$ (см. (46)). Последнее условие легко обеспечить для всех систем семейства (45) единым набором чисел $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ (см. лемму 1). Но, кроме того, определитель

$$\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda) = \sum_{i=0}^n p^{n-i} \bar{q}_i(\lambda), \quad \bar{q}_0(\lambda) = 1, \quad (52)$$

должен быть одним и тем же для всех систем семейства (45) ($\bar{q}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, – некоторые полиномы). Чтобы расширить класс систем (45), для которых это возможно, в последней строке определителя $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda)$ числовой вектор ψ заменён векторным полиномом $\Psi(\lambda) = (\psi_1(\lambda), \dots, \psi_n(\lambda))$.

Имеем равенство

$$\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda) = (\psi_1(\lambda)M_1^\omega(p, \lambda) + \dots + \psi_n(\lambda)M_n^\omega(p, \lambda)) + w^\omega(p, \lambda), \quad (53)$$

заменяя в котором полиномы $M_i^\omega(p, \lambda)$ согласно (47), можем записать

$$\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda) = p^n + \sum_{i=1}^n p^{n-i} \alpha_i^\omega(\lambda) + \sum_{i=1}^n p^{n-i} \tilde{s}_{n-i}^\omega(\lambda),$$

где

$$\tilde{s}_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\lambda) \gamma_{j,i}^\omega(\lambda), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad \tilde{s}_{n-1}^\omega(\lambda) = \psi_n(\lambda).$$

Тогда в силу (52) верно равенство

$$\alpha_i^\omega(\lambda) + \tilde{s}_{n-i}^\omega(\lambda) = \bar{q}_i(\lambda), \quad i = \overline{1, n}. \quad (54)$$

С учётом следствия 1 получаем

Следствие 3. Для существования единого регулятора стабилизации семейства (45) при $2 \leq r \leq n-2$ необходимо, чтобы были инвариантны $r-1$ полиномов

$$\tilde{s}_i^\omega(\lambda) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\lambda) \gamma_{j,i}^\omega(\lambda) = \tilde{s}_i(\lambda), \quad i = \overline{n-r, n-2}.$$

Если $r \geq n-1 \geq 1$, то должны быть инвариантны полиномы

$$\tilde{s}_i^\omega(\lambda) = \tilde{s}_i(\lambda), \quad i = \overline{0, n-2}.$$

В последнем случае ($r \geq n-1 \geq 1$), согласно следствию 1, необходимо, чтобы выполнялись равенства $w^\omega(p, \lambda) = w(p, \lambda)$. Если к тому же $w(p, e^{-ph}) \neq 0$, $p \in P^0$, то можно положить $\psi_j(\lambda) = 0$, $j = \overline{1, n}$, и в следствие (53) получаем, что $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda) = w(p, \lambda)$.

Теорема 4. Для реализации единого регулятора вида с полиномами $\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda) = p^n + \sum_{i=1}^n p^{n-i} \bar{q}_i(\lambda)$ и $d_0(p) = p^\nu + \sum_{i=1}^\nu p^{\nu-i} \beta_i$ достаточно, чтобы существовали векторные полиномы $\Phi(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\lambda)$, обеспечивающие равенства (49), и векторный полином $\Psi(\lambda)$, обеспечивающий равенства (54) и неравенства (51).

Полиномы $\Phi(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\lambda)$, $d_0(p)$ можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение системы (49), полином $\Psi(\lambda)$ – как решение системы (54) и неравенства (51).

5. Примеры. Процедуру построения единого регулятора финитной стабилизации вида (38) проиллюстрируем примерами.

Пример 1. Пусть объект управления описывается системой (45) второго порядка с матрицами

$$A^\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega(2-\lambda) & \omega(2-\lambda) \\ (-1-4\omega-2\omega^2+\omega^2\lambda)/\omega & -4-2\omega+\omega\lambda \end{bmatrix}, \quad \omega \neq 0, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \quad (55)$$

Система (55) имеет бесконечный спектр и характеристический квазиполином ($\lambda = e^{-ph}$) $w(p, \lambda) = p^2 + 4p - \lambda + 2$.

Алгебраические дополнения $M^\omega(p, \lambda) = [M_1^\omega(p, \lambda), M_2^\omega(p, \lambda), M_3^\omega(p, \lambda)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$ следующие:

$$M_1^\omega(p, \lambda) = -\omega(2 - \lambda), \quad M_2^\omega(p, \lambda) = p + \omega(2 - \lambda), \quad M_3^\omega(p, \lambda) = p^2 + 4p - \lambda + 2.$$

Решая систему (6), находим $(p, \lambda) = (0, 2)$. Так как $e^{-ph} \neq \lambda$, то система (55) спектрально управляема, поскольку, очевидно, выполняется условие (3). Следовательно, регулятор финитной стабилизации при каждом действительном значении $\omega \neq 0$ существует.

Находим базис Грёбнера: $\{p, -2 + \lambda\}$ для системы полиномов $M^\omega(p, \lambda)$; значит, в разложении (7) $\tilde{d}_0(p) = p$. Возьмём $d_1(p) = (p+1)(p+3)$, тогда $d_0(p) = p(p+1)(p+3)$, $P_0 = \{0, -1, -3\}$. Равенство (8) примет вид

$$[1 + \lambda, 1 + \lambda, p]M^\omega(p, \lambda) = d_0(p).$$

Полином $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, \lambda)$, обеспечивающий выполнение требования (51), не должен зависеть от ω . Так как полином $w(p, \lambda) = p^2 + 4p - \lambda + 2$ удовлетворяет этому требованию и $w(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0$ для всех $p_i \in P_0$, то, согласно (40), полагаем $(\psi_1^*, \psi_2^*) = 0$ и $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, e^{-ph}) = w(p, e^{-ph})$. Итак,

$$\tilde{\Delta}_\psi(p, \lambda) = p^2 + 4p - \lambda + 2, \quad d_0(p) = 3p + 4p^2 + p^3.$$

Решая систему (19), находим

$$P_\lambda = \{(-3, -1), (-1, -1), (0, 2)\}, \quad \Lambda = \{-1, 2\}, \quad P_1^* = \{0, -1, -3\}.$$

В данном случае $r = 1$, поэтому порядок замкнутой системы равен $N = 2n + r = 5$, $s = N - (n + r + 1) = 1$. И следовательно, единственный регулятор финитной стабилизации ищем в виде (38):

$$u(t) = x_3(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= -(1 + \lambda)x_1(t) - (1 + \lambda)x_2(t) + f_1(p, \lambda)x_4(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t), \\ \dot{x}_4(t) &= x_3(t) + f_2(p, \lambda)x_4(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t), \\ \dot{x}_5(t) &= x_4(t) + a_2(\lambda)x_5(t), \quad t > t_0 \geq 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Характеристическая матрица замкнутой системы в данном случае следующая:

$$pE_5 - \bar{A}^\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}^\omega(\lambda) & -a_{12}^\omega(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}^\omega(\lambda) & p - a_{22}^\omega(\lambda) & -1 & 0 & 0 \\ 1 + \lambda & 1 + \lambda & p & -f_1(p, \lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & p - f_2(p, \lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Полиномы $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p, \lambda)$, $i = 1, 2$, получим, выполнив рекомендации п. 2 (пп. 4, 5).

Полином $d(p)$ возьмём в виде $d(p) = (p - 1)p(p + 1)(p + 2)(p + 3)$. Следовательно,

$$\tilde{P} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}, \quad \tilde{\Lambda} = \{8, 4, 2, 1, 1/2\}.$$

Согласно формулам (21), (22) строим полиномы

$$a_1(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1)(2\lambda - 1)/2,$$

$$a_2(\lambda) = (\lambda - 1)(-2136 + 1014\lambda - 211\lambda^2 + 14\lambda^3)/840$$

такие, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ были целыми. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (23) для $\Lambda \setminus \tilde{\Lambda} = \{-1\}$ выполняется.

Методом неопределённых коэффициентов, решая уравнения (36), находим компоненты векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ и $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$, существование которых обосновано в п. 2 (там же приведены и необходимые формулы):

$$\begin{aligned}
 q_1(\lambda) &= -(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)(-2136 + 1014\lambda - 211\lambda^2 + 14\lambda^3) \times \\
 &\times (-1488 + 831\lambda - 197\lambda^2 + 14\lambda^3)(-582 + 321\lambda - 113\lambda^2 + 14\lambda^3)/120022560000, \\
 q_2(\lambda) &= (-525141162 + 534571011\lambda - 308231478\lambda^2 + 110236554\lambda^3 - \\
 &- 25304723\lambda^4 + 3585194\lambda^5 - 279412\lambda^6 + 9016\lambda^7)/142884000, \\
 f_1(p, \lambda) &= -(\lambda - 4)(2\lambda - 1)(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)(13856256 + 4616640p + 705600p^2 - \\
 &- 24040800\lambda - 2646000p\lambda + 19271700\lambda^2 + 1029000p\lambda^2 - 9434700\lambda^3 - 189000p\lambda^3 + \\
 &+ 3024973\lambda^4 + 11760p\lambda^4 - 639450\lambda^5 + 84925\lambda^6 - 6300\lambda^7 + 196\lambda^8)/285768000, \\
 f_2(p, \lambda) &= (13677888 + 2274720p - 50700330\lambda - 6640200p\lambda + 58581965\lambda^2 + 4716600p\lambda^2 - \\
 &- 35143770\lambda^3 - 1108800p\lambda^3 + 13352874\lambda^4 + 77280p\lambda^4 - \\
 &- 3280845\lambda^5 + 488310\lambda^6 - 39180\lambda^7 + 1288\lambda^8)/340200.
 \end{aligned}$$

Все параметры замкнутой системы (57) указаны, т.е. единый регулятор финитной стабилизации вида (56) построен. Приведём замкнутую систему (57) к нормальной форме.

Выполняя элементарные преобразования над столбцами характеристической матрицы (57), её четвёртый столбец приведём к виду (см. (14), (44))

$$[0, -\tilde{f}_0(p, \lambda), -\tilde{f}_1(\lambda), p - \hat{f}_1(\lambda), -1]', \quad \hat{f}_1(\lambda) = f_2(p, \lambda) + \tilde{f}_0(p, \lambda).$$

Здесь

$$\tilde{f}_0(p, \lambda) = -\frac{(\lambda - 4)(2\lambda - 1)(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)(5496 + 840p - 3150\lambda + 1225\lambda^2 - 225\lambda^3 + 14\lambda^4)}{340200},$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_1(\lambda) &= -(\lambda - 8)(\lambda - 4)(\lambda - 2)(2\lambda - 1)(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)(-1488 + 831\lambda - 197\lambda^2 + 14\lambda^3) \times \\
 &\times \frac{(-582 + 321\lambda - 113\lambda^2 + 14\lambda^3)}{285768000}, \quad \hat{f}_1(\lambda) = -\frac{1}{840}(2976 - 3150\lambda + 1225\lambda^2 - 225\lambda^3 + 14\lambda^4).
 \end{aligned}$$

Умножая четвёртую строку полученной матрицы на полином

$$f(\lambda) = -(\lambda - 4)(2\lambda - 1)(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)/405$$

и прибавляя ко второй строке, получаем, что

$$\check{f}_1(\lambda) = -(\lambda - 4)(2\lambda - 1)(677 - 453\lambda + 46\lambda^2)/135.$$

Окончательно система (55), замкнутая единственным регулятором финитной стабилизации, имеет вид

$$pE_5 - \hat{A}^\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}^\omega(\lambda) & -a_{12}^\omega(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}^\omega(\lambda) & p - a_{22}^\omega(\lambda) & -f(\lambda) - 1 & -\check{f}_1(\lambda) & -f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 1 + \lambda & 1 + \lambda & p & -\check{f}_1(\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & p - \hat{f}_1(\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Так как функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ – целые, то первые четыре строки обратной матрицы $(pE_5 - \hat{A}^\omega(e^{-ph}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа. Запишем старшие степени переменной λ в первых четырёх строках матрицы, присоединённой к характеристической матрице $pE_5 - \hat{A}^\omega(\lambda)$ замкнутой системы (58):

$$((6, 6, 6, 10, 18), (6, 6, 6, 10, 18), (13, 13, 13, 17, 25), (5, 5, 5, 9, 17)).$$

Отсюда заключаем, что первые две строки обратной матрицы $(pE_5 - \hat{A}^\omega(e^{-ph}))^{-1}$ образованы целыми функциями, имеющими экспоненциальный тип не выше $18h$. Согласно теореме Винера-Пэли в замкнутой системе (57) переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента $t_0 + 18h$, $h = \ln 2$ ($u(t) = 0$, $t \leq t_0$, $t_0 \geq 0$ – момент включения регулятора), независимо от начальных кусочно непрерывных функций системы (55) и построенного регулятора.

Замечание 8. Переменные $x_i(t)$, $i = 3, 4$, также обратятся в нуль, начиная с момента $t_0 + 25h$ и $t_0 + 17h$ соответственно.

Таким образом, регулятор

$$\begin{aligned} u(t) &= (f(\lambda) + 1)x_3(t) + \check{f}_1(\lambda)x_4(t) + f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(1 + \lambda)x_1(t) - (1 + \lambda)x_2(t) + \tilde{f}_1(\lambda)x_4(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t), \\ \dot{x}_4(t) &= x_3(t) + \hat{f}_1(\lambda)x_4(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_5(t), \\ \dot{x}_5(t) &= x_4(t) + a_2(\lambda)x_5(t), \quad t > t_0, \quad u(t) = 0, \quad t \leq t_0, \end{aligned}$$

с указанными выше полиномами $f(\lambda)$, $\check{f}_1(\lambda)$, $\tilde{f}_1(\lambda)$, $\hat{f}_1(\lambda)$; $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, обеспечивает конечный спектр (с характеристическим полиномом $d(p) = (p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$) и точечную вырожденность замкнутой системы (58) в направлениях, выделяющих переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, и тем самым – финитную стабилизацию (см. токдества (2), где в рассматриваемом случае $t_1 = t_0 + 18h$) системы (55).

Пример 2. Рассмотрим семейство, состоящее из двух систем вида (1):

$$A^1(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 - \lambda \\ 1 + \lambda & -4 + \lambda \end{bmatrix}, \quad A^2(\lambda) = \begin{bmatrix} -2 + \lambda & -3 + \lambda \\ -4 - \lambda & -\lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 4.$$

Систему с матрицей $A^i(\lambda)$ обозначим S_i , $i = 1, 2$. Вычисляя базис Грёбнера для каждой системы, получаем $\{2 + p, -4 + \lambda\}$ для S_1 , $\{-1 + p, -3 + \lambda\}$ для S_2 . Отсюда заключаем, что обе системы спектрально управляемы и что инвариантный полином $\tilde{d}_0(p)$ имеет вид $\tilde{d}_0(p) = (-1 + p)(2 + p)$, поскольку $d_0(p)$ берём в виде $d_0(p) = (-1 + p)(2 + p)(p_0 + p)$. Так как $r = 1 = n - 1$, то, согласно следствию 1, системы S_1 , S_2 должны иметь общий характеристический квазиполином, что в данном случае выполнено: $w(p, \lambda) = p^2 + 2p + 3\lambda - 12$ ($\lambda = e^{-ph}$). Последнюю строку матрицы $F_\varphi^\omega(p, \lambda)$ ищем в виде $[-(f_0 + f_1\lambda), -(f_2 + f_3\lambda), p - (f_4 + f_5\lambda)]$.

Решая систему

$$F_\varphi^\omega(p, \lambda) = (p + 2)(p - 1)(p + p_0), \quad \omega = 1, 2,$$

находим

$$[-(f_0 + f_1\lambda), -(f_2 + f_3\lambda), p - (f_4 + f_5\lambda)] = [6 - 3\lambda, 21/2 - 3\lambda, p + 1/2], \quad p_0 = 3/2.$$

Для приведения замкнутой системы к нормальной форме требуется, чтобы порядок N замкнутой системы удовлетворял неравенству $N = n + r + s + 1 \geq 2n + r = 5$, поэтому выберем $s = 1$ и $d(p) = d_0(p)d_2(p) = (p + 3/2)(-1 + p)(2 + p)(1 + p)p$. Так как $w(p_i, e^{-p_i h}) \neq 0$ для всех $p_i \in P_0 = \{-2, 1, -3/2\}$, то в (53) полагаем $\Psi(\lambda) = (0, 0)$ и $\tilde{\Delta}_\psi^\omega(p, e^{-ph}) = w(p, e^{-ph})$. Согласно формулам (21), (22) строим полиномы

$$a_1(\lambda) = (-512 + 2784\lambda - 3196\lambda^2 + 1037\lambda^3 - 117\lambda^4 + 4\lambda^5)/4,$$

$$a_2(\lambda) = (-1 + \lambda)(-903232 + 288028\lambda - 33167\lambda^2 + 1148\lambda^3)/624960$$

такие, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ были целыми. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (23) для $\Lambda \setminus \tilde{\Lambda} = \{3, 17/4\}$ выполняется.

Методом неопределённых коэффициентов, решая уравнения (36), найдём компоненты векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ и $f'(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))$. Единый регулятор

финитной стабилизации вида (38) для систем S_1 , S_2 построен. Как указано в предыдущем примере, приводим регулятор к виду, обеспечивающему замкнутой системе нормальную форму. Переменные $x_i(t)$, $i = 1, 2$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента $t_0 + 18h$, $h = \ln 4$ ($u(t) = 0$, $t \leq t_0$, $t_0 \geq 0$ – момент включения регулятора).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Статистические методы. Тр. II Междунар. конгресса ИФАК. Базель, 1963. Т. 2. М., 1965.
2. Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 1946–1952.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
4. Kappel F. On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
5. Метельский А.В. Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 2 (296). С. 103–141.
6. Карпук В.В., Метельский А.В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
7. Метельский А.В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
8. Метельский А.В. Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 3–21.
9. Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403.
10. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
11. Фомичев В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521.
12. Manitius A.Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
13. Метельский А.В. Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.
14. Хартовский В.Е. Приведение к конечному спектру вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 827–841.
15. Ким И.Г. Назначение конечного спектра в линейных системах с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 367–384.
16. Коровин С.К., Миняев С.И., Фурсов А.С. Подход к одновременной стабилизации линейных динамических объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1592–1598.
17. Миняев С.И., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: построение универсального стабилизатора для линейных объектов с запаздыванием с использованием спектральной приводимости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1533–1539.
18. Метельский А.В. Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
19. Метельский А.В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.
20. Карпук В.В., Метельский А.В. Критический случай при построении регулятора полного успокоения для линейной автономной системы с запаздыванием // Тез. докл. Междунар. мат. конф. “Пятье Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. Минск, 2010. С. 88–89.
21. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.

Белорусский национальный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 14.08.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.