ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1536–1545

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О МИНИМАКСНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА: СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

© 2021 г. А. Р. Плаксин

Исследуется уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными, отвечающее динамическим системам нейтрального типа. При этом, в отличии от предыдущих работ, гамильтониан в уравнении может не удовлетворять условию однородности. Дано определение минимаксного (обобщённого) решения этого уравнения. Доказаны существование и единственность этого решения, а также установлена его согласованность с понятием решения в классическом смысле. Доказательства основаны на выборе подходящего функционала Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0374064121110108

Введение. Работа продолжает исследования [1–6] уравнений Гамильтона–Якоби в функционально-дифференциальных системах и посвящена развитию теории минимаксных (обобщённых) решений [7] для уравнений Гамильтона–Якоби, проистекающих из задач управления и дифференциальных игр [8–10] в системах нейтрального типа [11, 12].

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными [1–3, 13] и условием на правом конце. При этом рассматриваемое уравнение имеет две особенности. Первая – это появление нового слагаемого, которого не возникало при исследовании уравнений Гамильтона–Якоби, соответствующих системам с запаздыванием [1–3], а вторая – отсутствие условия однородности гамильтониана, что влечёт за собой существенные отличия данной работы от работы [5], в которой это условие предполагалось выполненным. Отметим, что из-за указанных особенностей разработанные ранее конструкции решений уравнений Гамильтона–Якоби [1–3, 5, 7] к рассматриваемому уравнению напрямую неприменимы: возникают трудности как технического, так и принципиального характера. При этом в приложениях к задачам динамической оптимизации первая особенность позволяет охватить динамические системы, которые описываются при помощи функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в форме Дж. Хейла [14], а вторая – использовать интегрально-терминальные показатели для оценки качества динамического процесса.

В статье дано определение минимаксного решения рассматриваемой задачи Коши. Установлена его согласованность с понятием решения в классическом смысле (теоремы 1, 2). Доказаны существование и единственность минимаксного решения (теорема 3). Доказательства проводятся по классической схеме рассуждений из [7] (см. также [3]) и существенно опираются на свойства (леммы 1, 2) подходящего функционала Ляпунова–Красовского [6, 12].

1. Вспомогательные определения и обозначения. Пусть $t_0, \vartheta \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta$ и $h > 0$.

Всюду ниже угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ – для евклидовой нормы. Через $\mathrm{Lip}\,([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство липшицевых функций, действующих из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабжённое равномерной нормой. Для краткости обозначим $\mathrm{Lip} = \mathrm{Lip}\,([-h,0],\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{G} = [t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Равномерную норму пространства Lip обозначим через $\|\cdot\|_\infty$.

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Определим множество всех липшицевых продолжений функции $w(\cdot)$:

$$\Lambda(\tau, w(\cdot)) = \{x(\cdot) \in \mathrm{Lip}\,([\tau-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)\colon x_\tau(\cdot) = w(\cdot)\}.$$

Здесь $x_\tau(\cdot)$ – функция из Lip такая, что $x_\tau(\xi) = x(\tau+\xi)$, $\xi\in[-h,0]$.

Следуя [1; 2; 3, § 2; 13, § 2.4], говорим, что функционал $\varphi\colon \mathbb{G}\to\mathbb{R}$ коинвариантно дифференцируем (ci-дифференцируем) в точке $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если существуют число

$\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))$ и вектор $\nabla\varphi(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любой функции $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, w(\cdot))$ имеет место равенство

$$\varphi(t, x_t(\cdot)) - \varphi(\tau, w(\cdot)) = \partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))(t-\tau) + \langle x(t) - w(0), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))\rangle + o(t-\tau), \quad t \in [\tau, \vartheta],$$

где величина $o(t-\tau)$ зависит от пары $\{\tau, x(\cdot)\}$, и $o(t-\tau)/(t-\tau) \to 0$ при $t \to \tau+0$. Величины $\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot))$ и $\nabla\varphi(\tau, w(\cdot))$ называются ci-производными функционала φ в точке $(\tau, w(\cdot))$.

Аналогично, отображение $\mathbb{G} \ni (\tau, w(\cdot)) \mapsto \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ ci-дифференцируемо в точке $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если в этой точке ci-дифференцируемы функционалы $\psi_i\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. При этом полагаем $\partial_\tau\psi = (\partial_\tau\psi_1, \ldots, \partial_\tau\psi_n)$ и $\nabla\psi = (\nabla\psi_1, \ldots, \nabla\psi_n)$.

2. Уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными. Пусть функция $g\colon [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

(g) для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_g = \lambda_g(\alpha) > 0$, что, каковы бы ни были $\tau, t \in [t_0, \vartheta]$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$, при условии $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leqslant \alpha$ имеет место оценка

$$\|g(\tau, x) - g(t, y)\| \leqslant \lambda_g(|\tau - t| + \|x - y\|).$$

Рассмотрим отображение $\psi(\tau, w(\cdot)) = g(\tau, w(-h))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Обозначим через $\mathbb{G}_*$ множество точек $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, в которых это отображение ci-дифференцируемо. Далее для удобства примем обозначения $\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)) = \partial_\tau\psi(\tau, w(\cdot))$ и $\nabla g(\tau, w(\cdot)) = \nabla\psi(\tau, w(\cdot))$. Отметим, что если функция g дифференцируема в точке $(\tau, w(-h))$ и существует правая производная $d^+w(-h)/d\tau$, то справедливы равенства

$$\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)) = \partial g(\tau, w(-h))/\partial\tau + \nabla_x g(\tau, w(-h))d^+w(-h)/d\tau, \quad \nabla g(\tau, w(\cdot)) = 0.$$

Отметим также, что, следуя схеме доказательства леммы 1 из [4], несложно получить

Утверждение 1. *Пусть* $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$ *и* $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, w(\cdot))$. *Тогда при почти всех* $t \in [\tau, \vartheta]$ *справедливы соотношения*

$$(t, x_t(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \quad \partial_\tau g(t, x_t(\cdot)) = \frac{d}{dt}(g(t, x(t-h))), \quad \nabla g(t, x_t(\cdot)) = 0.$$

Пусть функция $H\colon [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и отображение $\sigma\colon \mathrm{Lip} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

$(H.1)$ функция H непрерывна;

$(H.2)$ существует такая константа $c_H > 0$, при которой справедливо неравенство

$$|H(\tau, x, x', s) - H(\tau, x, x', r)| \leqslant c_H(1 + \|x\| + \|x'\|)\|s - r\|, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad x, x', s, r \in \mathbb{R}^n;$$

$(H.3)$ для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_H = \lambda_H(\alpha) > 0$, что, каковы бы ни были $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и $x, x', y, y', s \in \mathbb{R}^n$, при условии $\max\{\|x\|, \|x'\|, \|y\|, \|y'\|\} \leqslant \alpha$ имеет место оценка

$$|H(\tau, x, x', s) - H(\tau, y, y', s)| \leqslant \lambda_H(\|x - y\| + \|x' - y'\|)(1 + \|s\|);$$

(σ) отображение σ непрерывно.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными

$$\partial_\tau\varphi(\tau, w(\cdot)) + \langle\partial_\tau g(\tau, w(\cdot)), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))\rangle + \\ + H(\tau, w(0), w(-h), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))) = 0, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \tag{1}$$

и условием на правом конце

$$\varphi(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in \mathrm{Lip}. \tag{2}$$

Отметим, что условия $(H.1)$–$(H.3)$ и (σ) аналогичны условиям, рассматриваемым при исследованиях минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием (см. [1; 2; 3, § 4]). Однако главное отличие уравнения (1) от уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием заключается в появлении нового слагаемого $\langle \partial_\tau g(\tau, w(\cdot)), \nabla\varphi(\tau, w(\cdot))\rangle$. Так как это слагаемое определено только на множестве $\mathbb{G}_*$, то уравнение (1) также можно рассматривать только на этом множестве. При этом, как и в уравнениях Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием, искомым в задаче (1), (2) будем считать непрерывный функционал φ, определённый на всём $\mathbb{G}$.

3. Минимаксное решение. Через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс всех подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Взяв константу c_H из условия $(H.2)$, определим отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$F(x, x') = \{f_x \in \mathbb{R}^n \colon \|f_x\| \leqslant c_H(1 + \|x\| + \|x'\|)\}, \quad x, x' \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Через $X(\tau, w(\cdot))$ обозначим множество таких функций $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, w(\cdot))$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h))) \in F(x(t), x(t-h)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Тогда в силу утверждения 1 работы [5] и вида (3) отображения F получаем

Утверждение 2. *Множество $X(\tau, w(\cdot))$ является непустым компактом в пространстве $\mathrm{Lip}\,([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$. Более того, существует такое число $\alpha > 0$, что для любой функции $x(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$ справедливы неравенства*

$$\|x(t)\| \leqslant \alpha, \quad \|x(t) - x(t')\| \leqslant \alpha|t - t'|, \quad t, t' \in [\tau - h, \vartheta],$$

$$\left\|\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h)))\right\| \leqslant \alpha \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{4}$$

Определим отображение $E : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ соотношением

$$E(\tau, x, x', s) = \{(f_x, f_z) \in F(x, x') \times \mathbb{R} \colon f_z = \langle f_x, s\rangle - H(\tau, x, x', s)\}. \tag{5}$$

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$. Через $CH(\tau, w(\cdot), s)$ обозначим множество таких пар $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \Lambda(\tau, w(\cdot)) \times \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h)), z(t)) \in E(t, x(t), x(t-h), s) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau, \vartheta]$$

и выполнено условие $z(\tau) = 0$. Тогда, пользуясь утверждением 1 работы [5] и видом (5) отображения E, нетрудно показать, что справедливо

Утверждение 3. *Множество $CH(\tau, w(\cdot), s)$ является непустым компактом в пространстве $\mathrm{Lip}\,([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$. Для числа α из утверждения 2 и любой пары $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$ справедливы неравенства (4). Существует такое число $\beta > 0$, что для любой пары $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$ справедливы неравенства*

$$|z(t)| \leqslant \beta, \quad |z(t) - z(t')| \leqslant \beta|t - t'|, \quad t, t' \in [\tau, \vartheta].$$

Функционал $\varphi_+ \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ назовём *верхним решением* задачи (1), (2), если он удовлетворяет следующим условиям:

$(\varphi_+.1)$ функционал φ_+ полунепрерывен снизу;

$(\varphi_+.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $s \in \mathbb{R}^n$, $t^* \in [\tau, \vartheta]$ и $\zeta > 0$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_+(t^*, x_{t^*}(\cdot)) - z(t^*) \leqslant \varphi_+(\tau, w(\cdot)) + \zeta$;

$(\varphi_+.3)$ имеет место оценка $\varphi_+(\vartheta, w(\cdot)) \geqslant \sigma(w(\cdot))$ для всех $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$.

Функционал $\varphi_- \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ назовём *нижним решением* задачи (1), (2), если он удовлетворяет следующим условиям:

$(\varphi_-.1)$ функционал φ_- полунепрерывен сверху;

$(\varphi_-.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $s \in \mathbb{R}^n$, $t^* \in [\tau, \vartheta]$ и $\zeta > 0$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_-(t^*, x_{t^*}(\cdot)) - z(t^*) \geqslant \varphi_-(\tau, w(\cdot)) - \zeta$;

$(\varphi_-.3)$ имеет место оценка $\varphi_-(\vartheta, w(\cdot)) \leqslant \sigma(w(\cdot))$ для всех $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$.

Функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ будем называть *минимаксным решением* задачи (1), (2), если он является одновременно верхним и нижним решением этой задачи.

Действуя по схеме из доказательств лемм 4, 5 работы [4], опираясь при этом на утверждение 3, несложно доказать

Утверждение 4. *При выполнении условия $(\varphi_+.1)$ условие $(\varphi_+.2)$ эквивалентно условию*

$(\varphi_+^*.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_+(t, x_t(\cdot)) - z(t) \leqslant \varphi_+(\tau, w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$.

При выполнении условия $(\varphi_-.1)$ условие $(\varphi_-.2)$ эквивалентно условию

$(\varphi_-^*.2)$ для любых $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдётся такая пара $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$, что справедливо неравенство $\varphi_-(t, x_t(\cdot)) - z(t) \geqslant \varphi_-(\tau, w(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$.

4. Согласованность. Как и в случае уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием [3, гл. 2], для доказательства согласованности понятия решения в классическом смысле задачи (1), (2) с введённым выше понятием минимаксного решения этой задачи на “классическое” решение φ требуется наложить дополнительные условия гладкости. Если следовать [3, гл. 2], то от φ нужно потребовать непрерывность на $\mathbb{G}$, ci-дифференцируемость на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$ и непрерывность его ci-производных $\partial_t \varphi$ и $\nabla \varphi$ на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$. Однако, как показано в [4], даже в самом простом случае для систем нейтрального типа такие условия не выполняются. Поэтому, следуя работе [4], в приводимой ниже теореме будем предполагать выполненными другие более приспособленные к системам нейтрального типа условия.

Теорема 1. *Пусть функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$(\varphi.1)$ функционал φ непрерывен;

$(\varphi.2)$ для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(\alpha) > 0$, что справедливо неравенство

$$|\varphi(\tau, w(\cdot)) - \varphi(\tau', w'(\cdot))| \leqslant \lambda_\varphi(|\tau - \tau'| + \|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_\infty), \quad \tau, \tau' \in [t_0, \vartheta], \quad w(\cdot), w'(\cdot) \in D(\alpha),$$

где $D(\alpha) = \{w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\colon \|w(\cdot)\|_\infty \leqslant \alpha,\ |w(\xi) - w(\xi')| \leqslant \alpha|\xi - \xi'|,\ \xi, \xi' \in [-h, 0]\}$;

$(\varphi.3)$ функционал φ ci-дифференцируем на $\mathbb{G}_*$;

$(\varphi.4)$ существуют такие $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \vartheta$, что для любых $\alpha > 0$ и $\eta \in (0, \Delta t)$, где $\Delta t = \min\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, k-1}\}$, градиент $\nabla \varphi$ равномерно непрерывен на множестве $\big(\bigcup_{i=0}^{k-1} [t_i, t_i - \eta] \times D(\alpha)\big) \bigcap \mathbb{G}_*$.

Пусть также функционал φ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (1) и условию (2). Тогда φ является минимаксным решением задачи (1), (2).

Доказательство. Из того, что функционал φ удовлетворяет условиям $(\varphi.1)$ и (2) следует, что для φ выполняются условия $(\varphi_+.1)$, $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.1)$, $(\varphi_-.3)$. Таким образом, для доказательства теоремы остаётся показать выполнение для φ условий $(\varphi_+.2)$ и $(\varphi_-.2)$. Ниже приведено доказательство условия $(\varphi_+.2)$. Доказательство условия $(\varphi_-.2)$ проводится аналогичным образом.

Отметим, что в случае $\tau = \vartheta$ условие $(\varphi_+.2)$ выполняется.

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, $t^* \in [\tau, \vartheta]$ и $s \in \mathbb{R}^n$. Для удобства доказательства будем предполагать, что вместо условия $(\varphi.4)$ для φ выполнено условие

$(\varphi^*.4)$ существуют такие $\tau < t_1 < \ldots < t_k = t^*$, что для любых $\alpha > 0$ и $\eta \in (0, \Delta t)$, где $\Delta t = \min\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, k-1}\}$, градиент $\nabla \varphi$ равномерно непрерывен на множестве $\big(\bigcup_{i=0}^{k-1} [t_i, t_i - \eta] \times D(\alpha)\big) \bigcap \mathbb{G}_*$.

В силу утверждения 3 и условия $(\varphi.1)$ найдётся такое $\eta \in (0, \min\{\Delta t/2, t_1 - \tau\})$, что для любых $(x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)$ и $i \in \{1, \ldots, k\}$ имеет место оценка

$$\max\{|\varphi(t_i - \eta, x_{t_i - \eta}(\cdot)) - \varphi(t, x_t(\cdot))|, |z(t_i - \eta) - z(t)|\} \leqslant \zeta/(4k), \quad t \in [t_i - \eta, t_i + \eta] \bigcap [\tau, t^*]. \quad (6)$$

Следуя работе [4], определим по непрерывности функционал $\Phi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, для которого справедливо равенство

$$\Phi(t, r(\cdot)) = \nabla \varphi(t, r(\cdot)), \quad (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}_*. \quad (7)$$

Выберем число α в соответствии с утверждением 3. В силу этого утверждения, леммы 3 работы [4] и условия $(\varphi^*.4)$ существует такое $\delta \in (0,\eta)$, что для всех $(x(\cdot),z(\cdot)) \in CH(\tau,w(\cdot),s)$ и $t,t' \in \bigcup_{i=1}^{k-1}[t_i,t_{i+1}-\eta]\bigcup[\tau,t_1-\eta]$ при условии $|t-t'| \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(t,x_t(\cdot)) - \Phi(t',x_{t'}(\cdot))\| \leqslant \zeta/(2(\alpha + c_H(1+2\alpha))(\vartheta-\tau)). \tag{8}$$

Зафиксируем разбиение

$$\Delta = \{\tau_j \in [\tau,\vartheta],\ \ j=\overline{0,l}\colon \tau_0=\tau,\ \ \tau_l=\vartheta,\ \ 0<\tau_{j+1}-\tau_j \leqslant \delta\}.$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h)),z(t)) \in E(t,x(t),x(t-h),s)\bigcap E(t,x(t),x(t-h),\Phi(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot))) \tag{9}$$

для $t \in [\tau_j,\tau_{j+1})$ и $j=\overline{0,l-1}$ при начальном условии

$$x_\tau(\cdot)=w(\cdot), \quad z(\tau)=0. \tag{10}$$

Рассуждениями, аналогичными [7, с. 12], показывается, что правая часть этого включения не пуста. Кроме того, нетрудно доказать, что на каждом отрезке $[\tau_j,\tau_{j+1}]$, $j=\overline{0,l-1}$, она удовлетворяет условиям $(F.1)$–$(F.3)$ работы [5]. Поэтому в силу утверждения 1 работы [5] найдётся пара $(x(\cdot),z(\cdot)) \in \mathrm{Lip}\,([\tau-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)\times \mathrm{Lip}\,([\tau,\vartheta],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию (10) и включению (9) при почти всех $t\in[\tau_j,\tau_{j+1})$, $j=\overline{0,l-1}$. Зафиксируем эту пару. Согласно заданию включения (9) имеем $(x(\cdot),z(\cdot)) \in CH(\tau,w(\cdot),s)$.

Далее покажем, что для выбранной пары $(x(\cdot),z(\cdot))$ выполняется неравенство из условия $(\varphi_+.2)$. В силу выбора η и δ для каждого $i=\overline{1,k}$ найдётся такое $m_i \in \{0,\ldots,l\}$, что $t_i \leqslant \tau_{m_i} \leqslant t_i+\eta$. Обозначим $\tau_{m_{i_*-1}}=\tau$. Рассмотрим функцию $\omega(t)=\varphi(t,x_t(\cdot))-z(t)-\varphi(\tau,w(\cdot))$, $t\in[\tau,\vartheta]$. Тогда, пользуясь утверждением 3 и условием $(\varphi.2)$, несложно показать, что эта функция липшицева и, принимая во внимание неравенство (6) и начальное условие (10), что для неё имеют место оценки

$$\omega(t^*) = \omega(\tau) + \sum_{i=1}^{k}(\omega(\tau_{m_i})-\omega(t_i-\eta)) + \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\tau_{m_{i-1}}}^{t_i-\eta}\frac{d}{dt}\omega(t)\,dt \leqslant \zeta/2 + \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\tau_{m_{i-1}}}^{t_i-\eta}\frac{d}{dt}\omega(t)\,dt. \tag{11}$$

Далее, в силу условия $(\varphi.3)$, включения (9), утверждения 1 и равенства (7) для любого $j=\overline{0,l}$ и почти всех $t\in[\tau_j,\tau_{j+1})$ имеем

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \partial_\tau\varphi(t,x_t(\cdot)) + \left\langle \frac{d}{dt}x(t), \nabla\varphi(t,x_t(\cdot))\right\rangle - \frac{d}{dt}z(t) =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h))), \Phi(t,x_t(\cdot))\right\rangle - H(t,x(t),x(t-h),\Phi(t,x_t(\cdot))) -$$

$$- \left\langle \frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-h))), \Phi(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot))\right\rangle - H(t,x(t),x(t-h),\Phi(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot))).$$

Отсюда, пользуясь выбором числа α, условием $(H.2)$ и неравенством (8), приходим к оценке $d\omega(t)/\,dt \leqslant \zeta/(2(\vartheta-\tau))$ при почти всех $t\in[\tau_{m_{i-1}},t_i-\eta]$, $i=\overline{1,k}$. Объединяя эту оценку с оценкой (11), получаем неравенство в условии $(\varphi_+.2)$.

Теорема 2. *Пусть функционал* $\varphi\colon \mathbb{G}\to\mathbb{R}$ *является минимаксным решением задачи (1), (2) и* ci*-дифференцируемым в точке* $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}_*$. *Тогда он удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (1) в этой точке.*

Доказательство. Покажем, что справедливо неравенство

$$\partial_\tau\varphi(\tau,w(\cdot))+\langle\partial_\tau g(\tau,w(\cdot)),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))\rangle+H(\tau,w(0),w(-h),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))\leqslant 0. \tag{12}$$

Так как φ является минимаксным решением, то вследствие утверждения 4 для него выполнено условие $(\varphi^*_+.2)$. В согласии с этим условием, полагая в нём $s=\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))$, определим пару $(x(\cdot),z(\cdot))\in CH(\tau,w(\cdot),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))$. Тогда, пользуясь ci-дифференцируемостью отображений φ и g в точке $(\tau,w(\cdot))$, а также утверждением 1, приходим к соотношению

$$0\geqslant\frac{\varphi(t,x_t(\cdot))-\varphi(\tau,w(\cdot))}{t-\tau}-\frac{1}{t-\tau}\int\limits_\tau^t\frac{d}{d\xi}z(\xi)\,d\xi=\partial_\tau\varphi(\tau,w(\cdot))+$$

$$+\langle\partial_\tau g(\tau,w(\cdot)),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot))\rangle+\frac{1}{t-\tau}\int\limits_\tau^t H(\xi,x(\xi),x(\xi-h),\nabla\varphi(\tau,w(\cdot)))\,d\xi+\frac{o(t-\tau)}{t-\tau}.$$

Устремляя в нём $t\to\tau+0$ и принимая при этом во внимание утверждение 3 и условие $(H.1)$, получаем неравенство (12). Аналогичным образом устанавливается обратное к (12) неравенство. Теорема доказана.

5. Функционал Ляпунова–Красовского. Пусть $\alpha>0$. Выбирая в согласии с условиями (g) и (H_3) числа $\lambda_g=\lambda_g(\alpha)>1$ и $\lambda_H=\lambda_H(\alpha)>0$, определим числа $\lambda_*=4\lambda_H+2\lambda_g/h$ и $\varepsilon_*=e^{-\lambda_*(\vartheta-t_0)}$. Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$. Для $\tau\in[t_0,\vartheta]$, $c\in\mathbb{R}^n$ и $w(\cdot)\in\mathrm{Lip}$ обозначим:

$$\nu^\alpha_\varepsilon(\tau,c,w(\cdot))=\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)\kappa^\alpha_\varepsilon(c,w(\cdot)),\quad \mu^\alpha_\varepsilon(\tau,c)=(\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)/\sqrt{\varepsilon^4+\|c\|^2})c,$$

$$\theta^\alpha_\varepsilon(\tau)=\frac{e^{-\lambda_*(\tau-t_0)}-\varepsilon}{\varepsilon},\quad \kappa^\alpha_\varepsilon(c,w(\cdot))=\sqrt{\varepsilon^4+\|c\|^2}+2\lambda_H\int\limits_{-h}^0\biggl(1-\frac{2\lambda_g\xi}{h}\biggr)\|w(\xi)\|d\xi. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть $(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ и число α взято в согласии с утверждением 2. Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$ таково, что $\theta^\alpha_\varepsilon(t)>1$, $t\in[t_0,\vartheta]$. Пусть, кроме того, $x(\cdot),y(\cdot)\in X(\tau,w(\cdot))$. Обозначим*

$$r(t)=x(t)-y(t),\quad t\in[\tau-h,\vartheta],\quad c(t)=r(t)-g(t,x(t-h))+g(t,y(t-h)),\quad t\in[\tau,\vartheta],$$
$$\tilde\nu(t)=\nu^\alpha_\varepsilon(t,c(t),r_t(\cdot)),\quad \tilde\mu(t)=\mu^\alpha_\varepsilon(t,c(t)),\quad t\in[\tau,\vartheta]. \tag{14}$$

Тогда функция $\tilde\nu$ является липшицевой на отрезке $[\tau,\vartheta]$ и для неё при почти всех $t\in[\tau,\vartheta]$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\tilde\nu(t)\leqslant\biggl\langle\frac{d}{dt}c(t),\tilde\mu(t)\biggr\rangle+H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t))-H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t)). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde\kappa(t)=\kappa^\alpha_\varepsilon(c(t),r_t(\cdot))$, $t\in[\tau,\vartheta]$. Пользуясь утверждением 2 и условием (g), нетрудно показать, что функции $\tilde\nu$ и $\tilde\kappa$ являются липшицевыми на отрезке $[\tau,\vartheta]$. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\tilde\kappa(t)=\frac{\langle dc(t)/dt,c(t)\rangle}{\sqrt{\varepsilon^4+\|c(t)\|^2}}+2\lambda_H\|r(t)\|-2\lambda_H(1+2\lambda_g)\|r(t-h)\|+\frac{4\lambda_H\lambda_g}{h}\int\limits_{t-h}^t\|r(\xi)\|d\xi.$$

Отсюда выводим неравенство

$$\frac{d}{dt}\tilde\nu(t)\leqslant-\lambda_*(1+\theta^\alpha_\varepsilon(t))\biggl(\|c(t)\|+2\lambda_H\int\limits_{t-h}^t\|r(\xi)\|d\xi\biggr)+\theta^\alpha_\varepsilon(t)\frac{d}{dt}\tilde\kappa\leqslant$$

$$\leqslant\biggl\langle\frac{d}{dt}c(t),\tilde\mu(t)\biggr\rangle+2\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)\|r(t)\|-2\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)(1+2\lambda_g)\|r(t-h)\|-4\lambda_H\theta^\alpha_\varepsilon(t)\|c(t)\|. \tag{16}$$

По определению функции $\tilde{\mu}$ имеем $\|\tilde{\mu}(t)\| \leqslant \theta_\varepsilon^\alpha(t)$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, учитывая неравенство $\theta_\varepsilon^\alpha(t) > 1$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и выбор чисел α, λ_g и λ_H, для всех $t \in [\tau, \vartheta]$ получаем

$$\|c(t) - r(t)\| \leqslant \lambda_g \|r(t-h)\|,$$

$$H(t, y(t), y(t-h), \tilde{\mu}(t)) - H(t, x(t), x(t-h), \tilde{\mu}(t)) \leqslant 2\lambda_H \theta_\varepsilon^\alpha(t)(\|r(t)\| + \|r(t-h)\|). \tag{17}$$

Таким образом, из оценок (16) и (17) вытекает неравенство (15). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и число α взято в согласии с утверждением 2. Существует такое число $\lambda_\kappa > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ справедливо неравенство*

$$\|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty^2 \leqslant \lambda_\kappa \kappa_\varepsilon^\alpha(c, r_\vartheta(\cdot)), \quad x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot)), \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где $r_\vartheta(\cdot)$ определяется в согласии с (14).

Доказательство. Положим $\lambda_\kappa = \alpha(2+1/h)/\lambda_H$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ и $x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$. Так как функция $r_\vartheta(\cdot)$ непрерывна, найдутся такие $\xi_0, \xi_1 \in [-h, 0]$, что

$$\|r_\vartheta(\xi_0)\| = \|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty, \quad \|r_\vartheta(\xi_1)\| = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0} \|r(\xi)\| d\xi.$$

Тогда, пользуясь выбором числа α, выводим

$$\|r_\vartheta(\cdot)\|_\infty^2 = \|r_\vartheta(\xi_0)\|^2 \leqslant \|r_\vartheta(\xi_1)\|^2 + 2\left|\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \left\langle \frac{d}{d\xi} r_\vartheta(\xi), r_\vartheta(\xi)\right\rangle d\xi\right| \leqslant 2\lambda_H \lambda_\kappa \int\limits_{-h}^{0} \|r_\vartheta(\xi)\| d\xi.$$

Отсюда, учитывая определение $\kappa_\varepsilon^\alpha$ в (13), для любого $c \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенство (18).

6. Существование и единственность минимаксного решения. Взяв константу c_H из условия $(H.2)$, для $\alpha, \varepsilon > 0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Psi_\varepsilon^\alpha(\tau, x, x', y, y') = \{(f_x, f_y, f_z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \|f_x\| \leqslant c_H(1 + \|x\| + \|x'\|),$$
$$\|f_y\| \leqslant c_H(1 + \|y\| + \|y'\|),\ c = x - y - g(\tau, x') + g(\tau, y'),$$
$$|f_z + \langle f_x - f_y, \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c)\rangle + H(\tau, x, x', \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c)) - H(\tau, y, y', \mu_\varepsilon^\alpha(\tau, c))| \leqslant \varepsilon\}.$$

Пусть $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $z_0 \in \mathbb{R}$. Через $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ обозначим множество таких троек $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Lip}\,([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$, для которых справедливо дифференциальное включение

$$\frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x(t-h)), y(t) - g(t, y(t-h)), z(t)) \in \Psi_\varepsilon^\alpha(t, x(t), x(t-h), y(t), y(t-h))$$

при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$ и выполнено начальное условие

$$x_\tau(\cdot) = y_\tau(\cdot) = w(\cdot), \quad z(\tau) = z_0. \tag{19}$$

Несложно показать, что правая часть этого включения удовлетворят условиям $(F.1)$–$(F.3)$ работы [5], и, следовательно, в силу утверждения 1 работы [5] множество $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ является непустым компактом в $\mathrm{Lip}\,([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n) \times \mathrm{Lip}\,([\tau, \vartheta], \mathbb{R})$.

Лемма 3. *Пусть φ_+ – верхнее и φ_- – нижнее решения задачи (1), (2). Пусть также $\alpha, \varepsilon > 0$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, и $z_0 = \varphi_+(\tau, w(\cdot)) - \varphi_-(\tau, w(\cdot))$. Тогда существует такая тройка $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$, что справедливо неравенство*

$$z(\vartheta) \geqslant \varphi_+(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) - \varphi_-(\vartheta, y_\vartheta(\cdot)). \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим

$$M(t)=\{(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot))\in X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau,w(\cdot),z_0)\colon z(t)\geqslant\varphi_+(t,x_t(\cdot))-\varphi_-(t,y_t(\cdot))\},\quad t\in[\tau,\vartheta].$$

В силу начального условия (19) справедливо равенство $z(\tau)=z_0=\varphi_+(\tau,w(\cdot))-\varphi_-(\tau,w(\cdot))$, которое влечёт за собой непустоту множества $M(\tau)$. Определим число

$$t_*=\max\{t\in[\tau,\vartheta]\colon M(t)\neq\varnothing\}.$$

Здесь максимум достигается в силу компактности множества $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau,w(\cdot),z_0)$ и условий $(\varphi_+.1)$ и $(\varphi_-.1)$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать равенство $t_*=\vartheta$.

Предположим, что $t_*<\vartheta$. Далее в доказательстве используем обозначения (14). По определению числа t_* найдётся такая тройка $(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot))$, что справедливы соотношения

$$z(t_*)\geqslant\varphi_+(t_*,x_{t_*}(\cdot))-\varphi_-(t_*,y_{t_*}(\cdot)),\quad x(\cdot),y(\cdot)\in X(\tau,w(\cdot)) \tag{21}$$

и при почти всех $t\in[\tau,t_*]$ неравенство

$$|dz(t)/dt+\langle dc(t)/dt,\tilde\mu(t)\rangle+H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t))-H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t))|\leqslant\varepsilon. \tag{22}$$

В силу утверждения 4 для φ_+ и φ_- выполняются условия $(\varphi_+^*.2)$ и $(\varphi_-^*.2)$. Пользуясь этими условиями, полагая в них $s=\tilde\mu(t_*)$, можно переопределить функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ на отрезке $[t_*,\vartheta]$ так, чтобы сохранились соотношения (21) и для всех $t\in[t_*,\vartheta]$ выполнялись неравенства

$$\begin{gathered}\varphi_+(t,x_t(\cdot))-\int\limits_{t_*}^{t}\Bigl(\Bigl\langle\frac{d}{d\xi}(x(\xi)-g(\xi,x(\xi-h))),\tilde\mu(t_*)\Bigr\rangle-H(\xi,x(\xi),x(\xi-h),\tilde\mu(t_*))\Bigr)\,d\xi\leqslant\\ \leqslant\varphi_+(t_*,x_{t_*}(\cdot)),\\ \varphi_-(t,y_t(\cdot))-\int\limits_{t_*}^{t}\Bigl(\Bigl\langle\frac{d}{d\xi}(y(\xi)-g(\xi,y(\xi-h))),\tilde\mu(t_*)\Bigr\rangle-H(\xi,y(\xi),y(\xi-h),\tilde\mu(t_*))\Bigr)\,d\xi\geqslant\\ \geqslant\varphi_-(t_*,y_{t_*}(\cdot)).\end{gathered} \tag{23}$$

Вследствие определения (13) функция μ_ε^α является непрерывной. Тогда, учитывая утверждение 2 и условие $(H.1)$, несложно показать существование такого $t^*\in(t_*,\vartheta]$, при котором для почти всех $t\in[t_*,t^*]$ имеет место оценка

$$\begin{gathered}|\langle dc(t)/dt,\tilde\mu(t)-\tilde\mu(t_*)\rangle-H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t))+H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t_*))+\\ +H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t))-H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t_*))|\leqslant\varepsilon.\end{gathered} \tag{24}$$

Переопределим функцию $z(\cdot)$ на интервале $(t_*,\vartheta]$ так, чтобы сохранилось включение $z(\cdot)\in\in\operatorname{Lip}([\tau,\vartheta],\mathbb{R}^n)$ и почти всюду выполнялись равенства

$$dz(t)/dt=\langle dc(t)/dt,\tilde\mu(t_*)\rangle-H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t_*))+H(t,y(t),y(\xi-h),\tilde\mu(t_*)),\quad t\in[t_*,t^*],$$

$$dz(t)/dt=\langle dc(t)/dt,\tilde\mu(t)\rangle-H(t,x(t),x(t-h),\tilde\mu(t))+H(t,y(t),y(t-h),\tilde\mu(t)),\quad t\in[t^*,\vartheta].$$

Тогда из соотношений (21)–(24) вытекает включение $(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot))\in M(t^*)$, которое противоречит выбору числа t_*. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть φ_+ – верхнее и φ_- – нижнее решения задачи (1), (2). Тогда справедливо неравенство*

$$\varphi_+(\tau,w(\cdot))\geqslant\varphi_-(\tau,w(\cdot)),\quad(\tau,w(\cdot))\in\mathbb{G}. \tag{25}$$

Доказательство. При $\tau = \vartheta$ неравенство (25) следует из условий $(\varphi_+.3)$ и $(\varphi_-.3)$.

Пусть теперь $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $\zeta > 0$ имеет место оценка

$$z_0 = \varphi_+(\tau, w(\cdot)) - \varphi_-(\tau, w(\cdot)) \geqslant -\zeta. \tag{26}$$

Пусть $\zeta > 0$. В силу утверждения 2 и условия (σ), во-первых, найдётся такое $\delta_\sigma > 0$, что для любых $x(\cdot), y(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$ при условии $\|x_\vartheta(\cdot) - y_\vartheta(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta_\sigma$ будет справедливо неравенство

$$|\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma(y_\vartheta(\cdot))| \leqslant \zeta/3, \tag{27}$$

а во-вторых, найдётся такое число $\gamma_1 > 0$, при котором имеет место оценка $|\sigma(x_\vartheta(\cdot))| \leqslant \gamma_1$, $x(\cdot) \in X(\tau, w(\cdot))$. Определим число $\alpha > 0$ в согласии утверждением 2. По определению (13) функции $\theta_\varepsilon^\alpha$ существует такое число $\gamma_2 > 0$, что справедливо неравенство $\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 \leqslant \gamma_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. Таким образом, полагая $\gamma = 2\gamma_1 + \gamma_2 + |z_0| + (\vartheta - \tau)\varepsilon_*$, выводим оценку

$$\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 + z_0 - \sigma(x_\vartheta(\cdot)) + \sigma(y_\vartheta(\cdot)) + (\vartheta - \tau)\varepsilon \leqslant \gamma. \tag{28}$$

В согласии с леммой 2 возьмём число λ_κ и выберем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\theta_\varepsilon^\alpha(t) > 1, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \lambda_\kappa\gamma/\theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta) \leqslant \delta_\sigma^2, \quad \theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 \leqslant \zeta/3, \quad (\vartheta - \tau)\varepsilon \leqslant \zeta/3. \tag{29}$$

Согласно лемме 3 найдётся такая тройка $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$, что имеет место оценка (20). Ниже в доказательстве для упрощения записи будем использовать обозначения (14). По определению множества $X^2W_\varepsilon^\alpha(\tau, w(\cdot), z_0)$ имеем

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant -\left\langle \frac{d}{dt}c(t), \tilde{\mu}(t) \right\rangle - H(t, x(t), x(t-h), \tilde{\mu}(t)) + H(t, y(t), y(t-h), \tilde{\mu}(t)) + \varepsilon. \tag{30}$$

Определим функцию $\eta(t) := \tilde{\nu}(t) + z(t) - (t - \tau)\varepsilon$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда из леммы 1 и оценки (30) следует неравенство $d\eta(t)/dt \leqslant 0$ при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$. Отсюда, учитывая (13), (19), выбор тройки $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ и условия $(\varphi_+.3)$, $(\varphi_-.3)$, получаем, что

$$\theta_\varepsilon^\alpha(\tau)\varepsilon^2 + z_0 = \eta(\tau) \geqslant \eta(\vartheta) \geqslant \theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta)\kappa_\varepsilon^\alpha(c(\vartheta), r_\vartheta(\cdot)) + \sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma(y_\vartheta(\cdot)) - (\vartheta - \tau)\varepsilon. \tag{31}$$

В силу оценок (28) и (31) имеем $\kappa_\varepsilon^\alpha(c(\vartheta), r_\vartheta(\cdot)) \leqslant \gamma/\theta_\varepsilon^\alpha(\vartheta)$. Далее, пользуясь леммой 2 и выбором ε в (29), заключаем, что $\|r_\vartheta(\cdot)\| \leqslant \delta_\sigma$, откуда вытекает неравенство (27). Воспользовавшись неравенством (27) и третьей и четвёртой оценками в (29), из оценки (31) выводим неравенство (26).

Теорема 3. *Минимаксное решение задачи (1), (2) существует и единственно.*

Доказательство. Обозначим через Φ_+ множество функционалов $\varphi_+ \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $(\varphi_+.2)$ и $(\varphi_+.3)$. Аналогично, через Φ_- обозначим множество функционалов $\varphi_- \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $(\varphi_-.2)$ и $(\varphi_-.3)$. Подобно рассуждениям из [7, § 8] (см. также [3, § 6]) показывается, что справедливы следующие утверждения:

(a) при любом $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала $\varphi_+^s(\tau, w(\cdot)) := \max\{\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) : (x(\cdot), z(\cdot)) \in \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, имеет место включение $\varphi_+^s \in \Phi_+$;

(b) при любом $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала $\varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) := \min\{\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - z(\vartheta) \colon (x(\cdot), z(\cdot)) \in \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, и произвольного функционала $\varphi \in \Phi_+$ справедливо неравенство $\varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$;

(c) для функционала $\varphi_0(\tau, w(\cdot)) := \inf\{\varphi(\tau, w(\cdot)) \colon \varphi \in \Phi_+\}$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, в силу утверждений (a) и (b) выполняются оценки

$$-\infty < \varphi_-^s(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_0(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_+^s(\tau, w(\cdot)) < +\infty, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n;$$

(d) из определения функционала φ_0 и с учётом утверждения (c) следует включение $\varphi_0 \in \Phi_+$;

(e) при любых $\xi \in [t_0, \vartheta]$ и $s \in \mathbb{R}^n$ для функционала

$$\varphi_0^{\xi,s}(\tau, w(\cdot)) := \begin{cases} \sup\{\varphi_0(\xi, x_\xi(\cdot)) - z(\xi)\colon (x(\cdot), z(\cdot)) \in CH(\tau, w(\cdot), s)\}, & \tau \in [t_0, \xi), \\ \varphi_0(\tau, w(\cdot)), & \tau \in [\xi, \vartheta], \end{cases}$$

где $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$, справедливо включение $\varphi_0^{\xi,s} \in \Phi_+$;

(f) из утверждения (d) и (e) вытекает, что $\varphi_0 \in \Phi_+ \bigcap \Phi_-$.

Пользуясь утверждением (f), условием (σ) и утверждением 2 работы [5], несложно показать, что функционалы

$$\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) := \lim_{\delta\to 0} \inf\{\varphi_0(t, r(\cdot))\colon (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}\colon |t-\tau| \leqslant \delta, \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta\},$$

$$\varphi_0^-(\tau, w(\cdot)) := \lim_{\delta\to 0} \sup\{\varphi_0(t, r(\cdot))\colon (t, r(\cdot)) \in \mathbb{G}\colon |t-\tau| \leqslant \delta, \|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta\}, \quad (\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G},$$

являются верхним и нижним решениями задачи (1), (2) соответственно.

Таким образом, мы показали существование верхнего φ_0^+ и нижнего φ_0^- решений, удовлетворяющих неравенству $\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) \leqslant \varphi_0^-(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Отсюда в силу леммы 4 выводим равенство $\varphi_0^+(\tau, w(\cdot)) = \varphi_0^-(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, которое и означает, что функционал $\varphi = \varphi_0^+ = \varphi_0^-$ является минимаксным решением задачи (1), (2). Единственность минимаксного решения также следует из леммы 4.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Уравнения типа Гамильтона–Якоби в наследственных системах: минимаксное решение // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 110–130.
2. *Лукоянов Н.Ю.* Уравнения Гамильтона–Якоби для наследственных систем: минимаксное и вязкостное решения // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 300–303.
3. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург, 2011.
4. *Плаксин А.Р.* Об уравнении Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 222–237.
5. *Плаксин А.Р.* О минимаксном решении функциональных уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1519–1527.
6. *Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.* Hamilton–Jacobi equations for neutral-type systems: inequalities for directional derivatives of minimax solutions // Minimax Theory and its Appl. 2020. V. 5. № 2. P. 369–381.
7. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective. Berlin, 1995.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
9. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
10. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
11. *Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р.* Об основном уравнении дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 675–689.
12. *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 118–128.
13. *Kim A.V.* Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht, 1999.
14. *Hale J.K., Cruz M.A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. V. 85. № 1. P. 63–81.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.
После доработки 11.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.