ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1546–1554

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.935

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. **В. В. Фомичев, М. А. Каменщиков**

Рассматривается задача построения функциональных фильтров (оптимальных функциональных наблюдателей, т.е. наблюдателей для линейных функционалов от фазового вектора) для линейных стационарных управляемых систем, неоднородность которых, кроме управления, содержит в качестве слагаемого аддитивный белый шум. Выход системы линеен по фазовому вектору и содержит в качестве слагаемого также аддитивный белый шум. С помощью канонических представлений проведён сравнительный анализ фильтров второго и третьего порядков по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме. Приведён пример системы четвёртого порядка, показывающий, что с увеличением динамического порядка фильтра оптимальность по квадратичному критерию повышается.

DOI: 10.31857/S037406412111011X

Введение. Рассматривается задача построения функциональных фильтров второго и третьего порядков, восстанавливающих по измеряемому скалярному выходу несмещённую и оптимальную оценку скалярного функционала от фазового вектора непрерывной системы со стохастическими возмущениями. Некоррелированные между собой белые шумы с априорно известными вероятностными характеристиками воздействуют как на объект, так и на канал измерений. В качестве критерия оптимальности используется установившаяся среднеквадратичная ошибка.

На практике применение фильтров второго и третьего порядков оказывается более подходящим, чем использование фильтров первого порядка, например, при обработке сигналов спутниковых навигационных систем [1, гл. 5]. В работе [2] сравниваются фильтры первого и второго порядков и отмечаются преимущества фильтра второго порядка, при этом оптимальный наблюдатель интерпретируется как авторегрессионная модель. Фильтр третьего порядка, основанный на интегрированной модели случайного блуждания, исследуется в работе [3], где среднеквадратичная ошибка вычисляется с помощью решения уравнений Риккати.

Функциональные фильтры исследовались ранее как в непрерывном [4, 5], так и в дискретном [6] времени. В [4] предложено обобщение условия несмещённости в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации, а в [5] предложен подход к численному моделированию фильтров пониженного порядка на основе построения статистических оценок критерия оптимальности. В [6] представлены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и функциональных фильтров различных динамических порядков, начиная с первого порядка.

В данной работе скалярный функционал от вектора состояния стохастической системы выбирается таким образом, что фильтра первого порядка, восстанавливающего несмещённую оценку, не существует. При этом осуществляется синтез и сравнение между собой по квадратичному критерию фильтров второго и третьего порядков. Для вычисления критерия оптимальности применяется метод интегральных квадратичных оценок качества [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим n-мерную линейную систему со стохастическими возмущениями и с одномерным выходом:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w(t), \quad x(0) = x_0,$$
$$y = Cx + v(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^m$ – известный вход системы, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход системы; A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров, x_0 – случайная величина, а $w(t)$ и $v(t)$ – белые шумы размерности n и 1 соответственно, с известными вероятностными характеристиками

$$E[x_0] = \bar{x}_0, \quad E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] = P_0,$$
$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w(t')^{\mathrm{T}}] = Q\delta(t-t'),$$
$$E[v(t)] = 0, \quad E[v(t)v(t')] = R\delta(t-t'),$$
$$E[w(t)v(t')] = 0,$$

здесь Q и P_0 – положительно полуопределённые матрицы; $R > 0$; случайная величина x_0 не коррелированна с шумами $w(t)$ и $v(t)$. Первое уравнение в системе (1) понимается в смысле стохастического дифференциального уравнения [8, с. 65].

Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ и по известному входу $u(t)$ определить несмещённую оценку $\widetilde{z}(t)$ скалярного функционала

$$z(t) = Fx(t) \tag{2}$$

с известной матрицей $F = (f_1 \ \dots \ f_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, обеспечивающую минимум установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения $e(t) \triangleq z(t) - \widetilde{z}(t)$:

$$J = \lim_{t\to\infty} E[e^2(t)] \to \min. \tag{3}$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что пара $\{C, A\}$ наблюдаема и задана во второй канонической форме наблюдаемости [9, с. 25]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где α_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы A, т.е.

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1.$$

2. Построение наблюдателей. Пусть для матрицы F имеет место разложение

$$F = PT,$$

где $P \in \mathbb{R}^{1\times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Тогда

$$z = Fx = PTx = Pq,$$

где $q = Tx \in \mathbb{R}^k$ – неизвестный вектор, подлежащий оценке. Для его восстановления используем наблюдатель порядка k вида

$$\dot{\widetilde{q}} = N\widetilde{q} + TBu + My, \quad \widetilde{q}(0) = T\bar{x}_0,$$
$$\widetilde{z} = P\widetilde{q}. \tag{5}$$

Используя правило дифференцирования Ито [8, с. 85] стохастического сигнала, нетрудно убедиться, что ошибка оценивания $e_q(t) \triangleq q(t) - \widetilde{q}(t)$ описывается уравнением

$$\dot{e}_q = \dot{q} - \dot{\widetilde{q}} = T\dot{x} - N\widetilde{q} - TBu - My =$$
$$= TAx - N(q - e_q) - MCx + Tw - Mv = Ne_q + (TA - MC - NT)x + Tw - Mv,$$

в котором $\widetilde{q} \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор наблюдателя, N, M, P, T – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Уравнение для ошибки $e = z - \widetilde{z}$ имеет вид

$$e = z - \widetilde{z} = Fx - P\widetilde{q} = PTx - P\widetilde{q} = P(q - \widetilde{q}) = Pe_q.$$

На основании известных результатов [10, с. 55] заключаем, что для того чтобы оценки $\widetilde{q}(t)$ и $\widetilde{z}(t)$ являлись несмещёнными для $q(t)$ и $z(t)$ соответственно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$F = PT, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N \text{ – гурвицева матрица.} \tag{6}$$

При этом, если матрица N гурвицева, то [11, с. 127] ошибка наблюдения e в установившемся режиме является стационарным в широком смысле случайным процессом, в котором математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит от одной переменной.

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что пара $\{P, N\}$ наблюдаема и задана в первой канонической форме наблюдаемости [9, с. 24]:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -l_1 & -l_2 & -l_3 & \dots & -l_k \end{pmatrix}, \quad P = (1\ 0\ \dots\ 0), \tag{7}$$

где l_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы N, т.е.

$$\beta(s) = \det(sI - N) = s^k + l_k s^{k-1} + \ldots + l_1.$$

Известно [9, с. 75], что для того чтобы функционал (2) мог быть восстановлен наблюдателем (5) второго порядка $(k = 2,\ n > 4)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$l_1 = \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0, \tag{8}$$

$$f_i = -f_{i-2}\frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} - f_{i-1}\frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad i = \overline{5, n}, \tag{9}$$

где условие $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ в (8) означает, что наблюдатель (5) первого порядка $(k = 1)$ не может восстановить несмещённую оценку функционала (2).

Исследуем вопрос, когда линейные фильтры второго $(k = 2)$ и третьего $(k = 3)$ порядков могут для системы (1), (4) четвёртого $(n = 4)$ порядка восстановить функционал (2) от вектора состояния, в котором элементы матрицы F удовлетворяют ограничениям (8).

Из условий (6) и канонических представлений (4), (7) следует, что для фильтров второго порядка

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 - \alpha_4 f_4 - t_{24} \\ -\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_3 - (\alpha_3 - l_1) f_4 - (\alpha_4 - l_2) t_{24} \end{pmatrix},$$

$$t_{24} = -l_1 f_3 - l_2 f_4, \tag{10}$$

где коэффициенты l_1, l_2 характеристического полинома фильтра удовлетворяют условиям (8). Вместе с этим передаточные функции относительно входов w, v и выхода e имеют вид

$$W_{\text{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \big(f_1(s + l_2) + f_2 \quad f_2 s - f_1 l_1 \quad f_3 s - f_2 l_1 \quad f_4 s - f_3 l_1\big),$$

$$W_{\text{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)}((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + t_{24})s - (\alpha_2 f_1 + \alpha_3 f_2 + \alpha_4 f_3 + f_4) l_1 + (l_2 f_1 + f_2)\alpha_1). \tag{11}$$

Из условий (6) и канонических представлений (4), (7) следует, что для фильтров третьего порядка имеют место равенства

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24} \\ f_3 & f_4 & t_{24} & t_{34} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 - \alpha_4 f_4 - t_{24} \\ -\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_3 - \alpha_3 f_4 - \alpha_4 t_{24} - t_{34} \\ -\alpha_1 f_3 - (\alpha_2 - l_1) f_4 - (\alpha_3 - l_2) t_{24} - (\alpha_4 - l_3) t_{34} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 \\ f_3 & f_4 & t_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_4 \\ t_{24} \\ t_{34} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где t_{24}, t_{34} – неизвестные параметры. При этом условие

$$t_{24} \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 f_4) + f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2} \tag{14}$$

является необходимым и достаточным условием существования единственного решения линейной системы (13), которое в этом случае имеет вид

$$l_1 = \frac{f_4(f_4^2 - f_3 t_{24}) + t_{24}(f_2 t_{24} - f_3 f_4) + t_{34}(f_3^2 - f_2 f_4)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)},$$

$$l_2 = \frac{f_4(f_2 t_{24} - f_3 f_4) + t_{24}(f_3^2 - f_1 t_{24}) + t_{34}(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)},$$

$$l_3 = \frac{f_4(f_3^2 - f_2 f_4) + t_{24}(f_1 f_4 - f_2 f_3) + t_{34}(f_2^2 - f_1 f_3)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \tag{15}$$

где параметры t_{24}, t_{34} выбираются такими, чтобы полином $\beta(s)$ был устойчив, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_3 > 0, \quad l_2 l_3 - l_1 > 0. \tag{16}$$

Одновременно с этим передаточные функции относительно входов w, v и выхода e имеют вид

$$W_{\mathrm{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \begin{pmatrix} f_1(s^2 + l_3 s + l_2) + f_2(s + l_3) + f_3 \\ f_2(s^2 + l_3 s) + f_3 s - f_1 l_1 \\ f_3(s^2 + l_3 s) + f_4 s - f_2 l_1 \\ f_4(s^2 + l_3 s) + t_{24} s - f_3 l_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{т}},$$

$$W_{\mathrm{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)}((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + t_{24})s^2 +$$

$$+ (l_3(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + t_{24}) + \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3 + \alpha_3 f_4 + \alpha_4 t_{24} + t_{34})s +$$

$$+ \alpha_1(l_2 f_1 + l_3 f_2 + f_3) - l_1(\alpha_2 f_1 + \alpha_3 f_2 + \alpha_4 f_3 + f_4)). \tag{17}$$

Если условие (14) нарушено, то решение линейной системы (13) имеет вид

$$l_1 = \frac{(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_4 - f_2 f_3) + C_1(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}{(f_1 f_3 - f_2^2)^2},$$

$$l_2 = \frac{3 f_1 f_2 f_3 f_4 - f_1^2 f_4^2 - f_1 f_3^3 - f_2^3 f_4 + C_1(f_2 f_3 - f_1 f_4)(f_1 f_3 - f_2^2)}{(f_1 f_3 - f_2^2)^2}, \quad l_3 = C_1, \tag{18}$$

где C_1 – свободная неизвестная, которая выбирается такой, чтобы выполнялись условия устойчивости (16). По-другому это означает, что существует множество наблюдателей третьего порядка, у которых коэффициенты характеристического полинома находятся на пересечении области гурвицевости матрицы N и линейного многообразия решений системы уравнений

$$s_1^3 + l_3 s_1^2 + l_2 s_1 + l_1 = 0, \quad s_2^3 + l_3 s_2^2 + l_2 s_2 + l_1 = 0, \tag{19}$$

где s_1, s_2 (корни характеристического полинома $s^2 + l_2 s + l_1$, в котором коэффициенты l_1 и l_2 удовлетворяют условиям (8)) вычисляются по формуле

$$s_{1,2} = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3 \pm \sqrt{(f_2 f_3 - f_1 f_4)^2 - 4(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}}{2(f_1 f_3 - f_2^2)}.$$

Кроме того, если условие (14) нарушено, то передаточные функции $W_{\rm ew}(s)$, $W_{\rm ev}(s)$ будут такими же, как и в случае фильтра второго порядка.

Для систем (1), (4) порядка выше четвёртого $(n > 4)$ существование единственного оптимального фильтра третьего порядка, восстанавливающего несмещённую оценку функционала (2) от вектора состояния и удовлетворяющего условиям (6), исключает возможность существования фильтра второго порядка, так как в этом случае нарушается условие (9).

Приведённые рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Для системы (1), (4) со стохастическими возмущениями и фильтров (5), (7) второго и третьего порядков, восстанавливающих несмещённую оценку функционала (2) от вектора состояния, в котором элементы матрицы F удовлетворяют ограничениям (8), справедливы следующие утверждения:*

1) для системы четвёртого $(n = 4)$ порядка условия (8) являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра второго порядка, в котором элементы матриц T и M определяются по формуле (10), а передаточные функции $W_{\rm ew}$ и $W_{\rm ev}$ имеют вид (11);

2) для системы четвёртого $(n = 4)$ порядка условия (14)–(16) являются необходимыми и достаточными условиями существования единственного оптимального фильтра третьего порядка, в котором элементы матриц T и M определяются по формулам (12), (13), а передаточные функции $W_{\rm ew}$ и $W_{\rm ev}$ имеют вид (17); при этом если условие (14) нарушено, то существует множество наблюдателей третьего порядка, у которых коэффициенты характеристического полинома имеют вид (18), а передаточные функции $W_{\rm ew}$ и $W_{\rm ev}$ – вид (11);

3) для системы порядка выше четвёртого $(n > 4)$ условия (8), (9) являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра второго порядка, в котором элементы матриц T и M задаются равенствами

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_n & t_{2n} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - (\alpha_n - l_2) t_{2n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n,$$

а передаточные функции $W_{\rm ew}$ и $W_{\rm ev}$ имеют вид

$$W_{\rm ew}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \big(f_1(s + l_2) + f_2 \quad \ldots \quad f_{n-1}(s + l_2) + f_n \quad f_n(s + l_2) + t_{2n} \big),$$

$$W_{\rm ev}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \Bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + t_{2n} \bigg)(s + l_2) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + (\alpha_n - l_2) t_{2n} - l_1 f_n \Bigg);$$

4) для системы порядка выше шестого $(n > 6)$ условия

$$f_5 \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 f_4) + f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2}, \tag{20}$$

$$
\begin{gathered}
f_i = -l_1 f_{i-3} - l_2 f_{i-2} - l_3 f_{i-1}, \quad i = \overline{7, n}, \\
l_1 = \frac{f_4(f_4^2 - f_3 f_5) + f_5(f_2 f_5 - f_3 f_4) + f_6(f_3^2 - f_2 f_4)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_2 = \frac{f_4(f_2 f_5 - f_3 f_4) + f_5(f_3^2 - f_1 f_5) + f_6(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_3 = \frac{f_4(f_3^2 - f_2 f_4) + f_5(f_1 f_4 - f_2 f_3) + f_6(f_2^2 - f_1 f_3)}{f_5(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\
l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_3 > 0, \quad l_2 l_3 - l_1 > 0
\end{gathered}
$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования фильтра третьего порядка, в котором элементы матриц T *и* M *задаются равенствами*

$$
T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{n-1} & f_n & t_{2n} \\ f_3 & f_4 & \ldots & f_n & t_{2n} & t_{3n} \end{pmatrix},
$$

$$
M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - \alpha_n t_{2n} - t_{34} \\ -\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} - (\alpha_{n-1} - l_2) t_{2n} - (\alpha_n - l_3) t_{3n} + l_1 f_n \end{pmatrix},
$$

$$
t_{2n} = -l_1 f_{n-2} - l_2 f_{n-1} - l_3 f_n, \quad t_{3n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n - l_3 t_{2n},
$$

а передаточные функции W_{ew} *и* W_{ev} *имеют вид*

$$
W_{\mathrm{ew}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \begin{pmatrix} f_1(s^2 + l_3 s + l_2) + f_2(s + l_3) + f_3 \\ \ldots \\ f_{n-2}(s^2 + l_3 s + l_2) + f_{n-1}(s + l_3) + f_n \\ f_{n-1}(s^2 + l_3 s + l_2) + f_n(s + l_3) + t_{2n} \\ f_n(s^2 + l_3 s + l_2) + t_{2n}(s + l_3) + t_{3n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

$$
\begin{gathered}
W_{\mathrm{ev}}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + t_{2n} \right) (s^2 + l_3 s + l_2) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + \alpha_n t_{2n} + t_{34} \right) (s + l_3) \right) + \\
+ \frac{1}{\beta(s)} \left(\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} + (\alpha_{n-1} - l_2) t_{2n} + (\alpha_n - l_3) t_{3n} - l_1 f_n \right),
\end{gathered}
$$

при этом условие (20) исключает возможность существования фильтра второго порядка для систем порядка выше четвёртого ($n > 4$)*, так как в этом случае нарушается условие (9).*

3. Вычисление критерия оптимальности. Так как шумы $w(t)$ и $v(t)$ не коррелированы между собой, то [12, с. 21]

$$
J = \lim_{t \to \infty} E[e^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\mathrm{ew}}(j\omega) Q W_{\mathrm{ew}}^{\mathrm{T}}(-j\omega) + W_{\mathrm{ev}}(j\omega) R W_{\mathrm{ev}}^{\mathrm{T}}(-j\omega))\, d\omega,
$$

если передаточные функции W_{ew} и W_{ev} устойчивы. Согласно теореме это условие устойчивости выполняется, если выполнены условия (6) для фильтров второго и третьего порядков.

Вычисление интеграла J сводится [13, с. 334] к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{b_0(j\omega)^{\nu-1}+b_1(j\omega)^{\nu-2}+\ldots+b_{\nu-1}}{a_0(j\omega)^{\nu}+a_1(j\omega)^{\nu-1}+\ldots+a_\nu}\right|^2 d\omega, \tag{21}$$

коэффициенты a_i, b_i в которых зависят от неизвестных параметров фильтра (5), указанных в теореме. Индекс ν в формуле (21) равен порядку (степени полинома знаменателя) передаточных функций $W_{\text{ew}}(s)$ и $W_{\text{ev}}(s)$. При этом для расчёта интегралов (21) существуют специальные таблицы [13, с. 742]. Для случая $\nu = 2$ значение интеграла (21) следующее:

$$\bar{J}_2 = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2}. \tag{22}$$

Для систем четвёртого порядка и фильтров третьего порядка, как очевидно следует из вида передаточных функций W_{ew} и W_{ev}, приведённых в сформулированной теореме, функционал в задаче оптимизации является рациональной функцией, т.е. отношением двух полиномов от переменных t_{24}, t_{34}.

4. Пример. Проведём численный эксперимент на примере системы (1), (4) четвёртого порядка $(n = 4)$, в которой

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{т}},$$

$$Q = P_0 = I, \quad R = 1, \quad B = 0.$$

Фильтра первого порядка $(k = 1)$, восстанавливающего несмещённую оценку скалярного функционала (2), не существует. Фильтр второго порядка $(k = 2)$, восстанавливающий несмещённую оценку скалярного функционала (2), имеет вид (5), в котором

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения вычисляется по формуле (22):

$$J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|j\omega+2|^2+|j\omega+1|^2+|2j\omega+1|^2+|5j\omega+2|^2+|2j\omega+1|^2}{|(j\omega)^2+3j\omega+1|^2}\,d\omega = \frac{23}{3} \approx 7.6667.$$

Если условие (14) нарушено $(t_{24} = 13)$, то наблюдатели третьего $(k = 3)$ порядка имеют вид (5), а

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 - C_1 & 8 - 3C_1 & -C_1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \\ 2 & -5 & 13 & -34 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad C_1 > 3.$$

Значение J в критерии оптимальности в этом случае для фильтров третьего порядка находится так же, как и для фильтра второго порядка и равно

$$J = 23/3 \approx 7.6667.$$

Следовательно, для случая $t_{24}=13$ существует множество наблюдателей, у которых коэффициенты характеристического полинома $\beta(s)$ находятся на пересечении линейного многообразия решений системы уравнений (19) с $s_{1,2}=(-3\pm\sqrt{5})/2$ и области гурвицевости матрицы N.

Если условие (14) выполнено $(t_{24}\neq 13)$, то существует функциональный оптимальный наблюдатель (5) третьего порядка, решающий задачу оптимальной фильтрации, в котором для нахождения неизвестных переменных $(t_{24},\ t_{34})$ решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением на параметры, которые должны быть такими, чтобы характеристический полином наблюдателя был устойчив. Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [14, гл. 18], дают следующие значения:

$$N\approx\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2.0493&-4.1196&-3.5352\end{pmatrix},\quad T\approx\begin{pmatrix}1&-1&2&-5\\-1&2&-5&11.4859\\2&-5&11.4859&-24.1049\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix},\quad M\approx\begin{pmatrix}-0.4859\\1.1614\\-2.6394\end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения в этом случае $J\approx 7.0675$.

Таким образом, критерий оптимальности (3) для фильтра третьего порядка оказался меньше, чем для фильтра второго порядка.

Заключение. В работе предложены необходимые и достаточные условия существования и единственности фильтров второго и третьего порядков. С помощью канонических представлений линейных систем получены аналитические выражения как для передаточных функций систем в отклонениях, так и для коэффициентов характеристического полинома функциональных фильтров. Приведён пример системы четвёртого порядка, для которой построены фильтры второго и третьего порядков и проведено сравнение по среднеквадратичному критерию оптимальности полученных фильтров. Показано, что по сравнению с фильтром второго порядка фильтр третьего порядка может дать выигрыш по квадратичному критерию оптимальности в установившемся режиме.

Статья опубликована при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-37-90065-Аспиранты, 20-08-00073-А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaplan E., Hegarty C.* Understanding GPS: Principles and Applications. Boston, 2005.
2. *El Husseini A.H., Simon E.P., Ros L.* Second-order autoregressive model-based Kalman filter for the estimation of a slow fading channel described by the Clarke model: optimal tuning and interpretation // Digital Signal Processing. 2019. V. 90. P. 125–141.
3. *Shu H., Simon E.P., Ros L.* Third-order kalman filter: tuning and steady-state performance // IEEE Signal Proc. Lett. 2013. V. 20. № 11. P. 1082–1085.
4. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 4. С. 19–26.
5. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Численное моделирование линейной стохастической системы в задаче оптимальной фильтрации пониженного порядка // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1142–1143.
6. *Каменщиков М.А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 2. С. 19–28.
7. *Красовский А.А.* О степени устойчивости линейных систем // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1948.

8. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М., 1973.
9. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
10. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. London, 1983.
11. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
12. *Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P.* Filtering Theory. With Applications to Fault Detection, Isolation, and Estimation. Basel, 2007.
13. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб., 2003.
14. *Nocedal J., Wright S.* Numerical Optimization. New York, 2006.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт системного анализа РАН, г. Москва,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский
технологический университет “МИСиС”, г. Москва

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.
После доработки 10.06.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.