ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.935

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С РЕЖИМАМИ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

© 2021 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова, С. И. Миняев

Исследуется задача стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Для решения этой задачи предлагается подход к построению стабилизирующего регулятора, основанный на методе расширения динамического порядка и решении систем линейных матричных неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064121110121

1. Постановка задачи. Настоящая статья является продолжением исследований работ [1, 2] по стабилизации параметрически неопределённых скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Предлагаемые в данной статье подходы к решению указанной задачи основываются на методе расширения динамического порядка [3, с. 205] и существенно опираются на результаты работ [1, 4]. Отметим, что в [4] введена необходимая терминология и достаточно подробно описана процедура применения метода расширения динамического порядка для построения алгоритма стабилизации по состоянию для переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков.

Итак, в соответствии с терминологией работы [4] рассматривается переключаемая интервальная линейная система, скалярная относительно входа и заданная следующим уравнением состояния:

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i, j) \in \Omega\}, \tag{1}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке, I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ $([A_i] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i})$ и переключающего сигнала σ, $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ $([b_i] \in \in \mathbb{R}^{n_i \times 1})$; пары матриц $([A_i], [b_i])$, $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий скалярный вход; $\Omega \subseteq I \times I$ – множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. пара индексов (i, j) принадлежит множеству Ω, если и только если возможно переключение с j-го на i-й режим функционирования; $S(\Omega)$ – множество допустимых переключающих сигналов σ, т.е. если $\tilde{t}$ – точка разрыва функции $\sigma \in S(\Omega)$ и

$$\lim_{t \to \tilde{t} - 0} \sigma(t) = j, \quad \lim_{t \to \tilde{t} + 0} \sigma(t) = i,$$

то выполняется включение $(i, j) \in \Omega$. Содержательный смысл входящего в задание системы (1) множества $Z(\Omega)$ описывается ниже.

Под i-м *режимом функционирования* системы (1) понимается динамическая система

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u.$$

При этом предполагается, что, в общем случае, режимы функционирования имеют различные динамические порядки, определяемые векторами состояния

$$x^{(i)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_i}}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad j_1 < \ldots < j_{n_i}, \quad \{j_1, \ldots, j_{n_i}\} \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

где $n = \max\{j_{n_1}, \ldots, j_{n_m}\}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ для каждого $i = \overline{1,m}$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\}$ через Γ_i, а множество $\{1, \ldots, n\}$ через Γ. Далее будем обозначать через $\tilde{x}^{(i)}$ вектор из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого с индексами из множества $\Gamma \backslash \Gamma_i$ равны нулю. Заметим, что если для различных режимов (i-го и j-го) совпадают наборы переменных состояния, то в этом случае $\Gamma_i = \Gamma_j$.

В силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$ переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Так как различные режимы могут отличаться динамическими порядками и/или набором переменных состояний, то необходимо обеспечить преемственность [5, с. 18] между каждой парой соседних режимов. Для этого задаётся множество $Z(\Omega)$, состоящее из матриц $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $(i,j) \in \Omega$, называемых *матрицами преемственности*. Каждая матрица Z_{ij} определяет линейное преобразование конечного состояния предыдущего j-го режима $x^{(j)}(t_{ij})$ в начальное состояние текущего i-го режима $x^{(i)}(t_{ij})$ (t_{ij} – момент переключения между j-м и i-м режимами), т.е.

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij}).$$

Более точно,

$$x^{(i)}(t_{ij}) = \lim_{t \to t_{ij}+0} x^{(i)}(t), \quad x^{(j)}(t_{ij}) = \lim_{t \to t_{ij}-0} x^{(j)}(t).$$

Отметим, что систему (1) также можно интерпретировать как интервальное семейство переключаемых линейных систем

$$\dot{x}^{(\sigma)} = A_\sigma x^{(\sigma)} + b_\sigma u \tag{2}$$

с режимами (A_i, b_i)

$$\dot{x}^{(i)} = A_i x^{(i)} + b_i u, \tag{3}$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$. Далее каждую такую систему (2) будем называть *элементом* интервального семейства (1).

Решением системы (1) при фиксированных режимах $(A_i,\, b_i)$ $(A_i \in [A_i],\ b_i \in [b_i],\ i = \overline{1,m})$, заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ называется кусочно-дифференцируемая [6, с. 477] вектор-функция $x(t) \in \mathbb{R}^n$, терпящая потерю дифференцируемости и непрерывности разве что в моменты переключения режимов и совпадающая на каждом промежутке активности i-го режима $(i \in I)$ с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$. При этом вектор-функция $\tilde{x}^{(i)}(t)$ порождается решением линейной системы (3) на соответствующем промежутке активности i-го режима $[t_{ij}, t_{li}]$ с начальными условиями

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij}),$$

где $x^{(j)}(t_{ij})$ – конечное значение j-го режима на предыдущем промежутке времени.

При замыкании системы (1) регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ его действие на каждый режим определяется следующими системами:

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i] x^{(i)} + [b_i] u(\tilde{x}^{(i)}), \quad i = \overline{1,m}.$$

Пучком траекторий системы (1) назовём множество $\mathfrak{X}$ её решений $x(t)$ для всех возможных элементов интервального семейства при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$.

Сечением пучка траекторий $\mathfrak{X}$ системы (1) в момент времени $t = t^*$ называется множество $\mathfrak{X}_{t^*}$ значений решений $x \in \mathfrak{X}$ при $t = t^*$ при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$, т.е. $\mathfrak{X}_{t^*} = \{x(t^*) : x(\cdot) \in \mathfrak{X}\}$.

Норму сечения пучка траекторий $\|\mathfrak{X}_{t^*}\|$ определим следующим образом:

$$\|\mathfrak{X}_{t^*}\| = \sup_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}} \|x(t^*)\|.$$

Будем говорить, что система (1), замкнутая регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ $(u(0) = 0)$, $S(\Omega)$-*устойчива*, если для любого переключающего сигнала $\sigma \in S(\Omega)$ и произвольного начального условия $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ для соответствующего пучка траекторий $\mathfrak{X}$ выполняется соотношение

$$\|\mathfrak{X}_t\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Постановка задачи стабилизации. Для переключаемой интервальной линейной системы вида (1) требуется построить регулятор в форме статической обратной связи по состоянию $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ u(0) = 0)$, обеспечивающий $S(\Omega)$-устойчивость замкнутой системы.

В настоящей работе стабилизирующий регулятор, решающий сформулированную задачу, будем искать в виде линейной стационарной обратной связи

$$u(x) = -k^{\mathrm{T}} x, \tag{4}$$

где $k \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор параметров обратной связи. В связи с этим далее под замкнутой переключаемой системой понимаем систему с реализованным управлением вида (4).

2. Приведение к единому динамическому порядку. В соответствии с методом расширения динамического порядка [3, с. 205], аналогично работе [4], поставим в соответствие системе (1) переключаемую интервальную линейную n-мерную систему

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma]x + [\tilde{b}_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

для которой режимы функционирования задаются уравнениями

$$\dot{x} = [\tilde{A}_i]x + [\tilde{b}_i]u, \quad i = \overline{1,m},$$

где $[\tilde{A}_\sigma] = [\tilde{A}] \circ \sigma$ – композиция отображения $[\tilde{A}] : I \to \{[\tilde{A}_1], \ldots, [\tilde{A}_m]\}$ $([\tilde{A}_i] \in \mathbb{R}^{n\times n})$ и переключающего сигнала σ, $[\tilde{b}_\sigma] = [\tilde{b}]\circ\sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[\tilde{b}] : I \to \{[\tilde{b}_1], \ldots, [\tilde{b}_m]\}$ $([\tilde{b}_i] \in \mathbb{R}^n)$;

$$[\tilde{A}_i] = T_i[A_i]T_i^{\mathrm{T}} + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^{\mathrm{T}}, \quad [\tilde{b}_i] = T_i[b_i]. \tag{6}$$

Здесь $\hat{A}_i$ – некоторые фиксированные устойчивые матрицы порядка $n - n_i$, $T_i \in \mathbb{R}^{n\times n_i}$ – матрица, содержащая $n - n_i$ нулевых строк и n_i строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = \overline{1, n_i}$, $j_k \in \Gamma_{n_i}$, $\hat{T}_i \in \mathbb{R}^{n\times(n-n_i)}$ – матрица, содержащая n_i нулевых строк и $n - n_i$ строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = \overline{1, n_i}$, $j_k \in \Gamma\backslash\Gamma_i$.

Замечание. Здесь и далее мы используем следующее определение для арифметических операций над интервальными матрицами [7, с. 75; 8, с. 46]:

$$[A] * [B] = \square\{A * B : A \in [A], \quad B \in [B]\},$$

где $* \in \{+, -, \cdot\}$, а через $\square\{\cdot\}$ обозначается интервальная оболочка соответствующего множества матриц или векторов.

Множество матриц преемственности $\tilde{Z}(\Omega)$ для системы (5) формируется на основе соответствующего множества $Z(\Omega)$ системы (1) следующим образом:

$$\tilde{Z}_{ij} = T_i Z_{ij} T_j^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

для всех $(i,j) \in \Omega$. Множество $\tilde{Z}(\Omega)$ обеспечивает для системы (5) преемственность между каждой парой соседних режимов аналогично тому, как это определено выше для системы (1). Заметим, что для любой матрицы $Z_{ij} \in Z(\Omega)$ и соответствующей ей матрицы $\tilde{Z}_{ij} \in \tilde{Z}(\Omega)$ выполняется также равенство

$$Z_{ij} = T_i^{\mathrm{T}} \tilde{Z}_{ij} T_j.$$

Переключаемую систему (5) будем называть *динамическим расширением* системы (1).

Рассмотрим теперь систему (5), замкнутую обратной связью $u = -k^{\mathrm{т}}x$:

$$\dot{x} = ([\tilde{A}_\sigma] - [\tilde{b}_\sigma]k^{\mathrm{т}})x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Систему (7) понимаем как семейство переключаемых систем вида

$$\dot{x} = (\tilde{A}_\sigma - \tilde{b}_\sigma k^{\mathrm{т}})x, \quad \sigma \in S(\Omega),$$

где $\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i]$, $\tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]$.

Решением системы (7) при фиксированных режимах $(\tilde{A}_i, \tilde{b}_i)$ $(\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i],\ \tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i],\ i = \overline{1,m})$, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть кусочно-дифференцируемое решение $x(t)$ линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = (\tilde{A}_{\sigma(t)} - \tilde{b}_{\sigma(t)}k^{\mathrm{т}})x, \quad x(0) = x_0.$$

В силу соотношений (6) и леммы 1 работы [4] справедлива следующая

Лемма 1. *Для любых фиксированных режимов* (A_i, b_i) $(A_i \in [A_i],\ b_i \in [b_i],\ i = \overline{1,m})$, *заданного управления* $u = -k^{\mathrm{т}}x$, *переключающего сигнала* $\sigma \in S(\Omega)$ *и произвольного вектора* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *решение* $x(t)$ *системы (1) с начальным условием* $x^{(\sigma(0))}(0) = T^{\mathrm{т}}_{\sigma(0)}x_0$ *совпадает с решением соответствующей системы (7) для режимов*

$$\tilde{A}_i = T_iA_iT_i^{\mathrm{т}} + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^{\mathrm{т}}, \quad \tilde{b}_i = T_ib_i$$

с начальным условием $x(0) = T_{\sigma(0)}T^m_{\sigma(0)}x_0$.

Скажем, что система (5), замкнутая обратной связью (4), $S(\Omega)$-*устойчива*, если для любых $\sigma \in S(\Omega)$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего пучка траекторий $\mathfrak{X}$ системы (7) выполняется соотношение

$$\|\mathfrak{X}_t\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

При этом обратную связь (4) называем $S(\Omega)$-*стабилизирующей*. Лемма 1 позволяет сформулировать следующее утверждение о связи свойства устойчивости замкнутых систем (1) и (5).

Лемма 2. *Пусть линейная стационарная обратная связь* $u = -k^{\mathrm{т}}x$ $(k \in \mathbb{R}^n)$ *является* $S(\Omega)$-*стабилизирующей для системы (5). Тогда эта же обратная связь будет* $S(\Omega)$-*стабилизирующей и для системы (1).*

Таким образом, лемма 2 позволяет свести задачу стабилизации системы (1) к задаче стабилизации соответствующей расширенной системы (5).

Отметим, что в общем случае замкнутая система (7) не является интервальной, что существенно усложняет проверку её устойчивости. Поэтому наряду с системой (7) будем рассматривать интервальную систему

$$\dot{x} = [\tilde{\Lambda}_\sigma(k)]x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (i,j) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

с режимами

$$[\tilde{\Lambda}_i(k)] = \square\{\tilde{A}_i - \tilde{b}_ik^{\mathrm{т}} : \tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i],\ \tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]\}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Систему (8) назовём *интервальной оболочкой системы* (7), а её решения и $S(\Omega)$-устойчивость определяем так же, как и для системы (7). Если рассматривать системы (7) и (8) как семейства переключаемых систем, то очевидно, что семейство систем (7) является подмножеством интервального семейства (8). Учитывая этот факт, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть для некоторого* $k \in \mathbb{R}^n$ *система (8) является* $S(\Omega)$-*устойчивой. Тогда при этом* k *система (7) будет также* $S(\Omega)$-*устойчивой.*

Лемма 3 позволяет свести задачу стабилизации системы (1) к задаче поиска вектора $k \in \mathbb{R}^n$, для которого система (8) является $S(\Omega)$-устойчивой.

3. Решение задачи стабилизации. Рассмотрим для произвольной интервальной матрицы $[A] = ([\underline{a}_{kj}, \overline{a}_{kj}])_{k,j=\overline{1,n}}$ параллелотоп $P(A) = \prod_{k,j=\overline{1,n}}[\underline{a}_{kj}, \overline{a}_{kj}]$ в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Каждому вектору $q = (q_1, \ldots, q_{n^2})^{\mathrm{T}} \in P(A)$ поставим в соответствие матрицу

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ q_{n+1} & \ldots & q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n(n-1)+1} & \ldots & q_{n^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $[A] = \{A(q) : q \in P(A)\}$. Пусть $G(A) = \{q_A^{(\nu)} : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$ – множество всех вершин параллелотопа $P(A)$, откуда следует, что $P(A) = \operatorname{Conv}\{q_A^{(\nu)} : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$, а значит, и $[A] = \operatorname{Conv}\{A(q_A^{(\nu)}) : \nu = \overline{1, 2^{n^2}}\}$. Матрицы $A(q_A^{(\nu)})$ называют *вершинными* матрицами для интервальной матрицы $[A]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) при некотором векторе $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Hx$ $(H \succ 0)$ для семейства систем

$$\dot{x} = Q_l^{(i)}x, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}, \tag{9}$$

где $Q_l^{(i)}$ – вершинные матрицы i-го режима соответствующей системы (8);

2) для матриц преемственности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (8) выполняются неравенства

$$\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2 \leqslant \theta \quad \text{для всех} \quad (i, j) \in \Omega, \tag{10}$$

где $\theta = \lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H)$ $(\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы H соответственно).

Тогда система (8) является $S(\Omega)$-устойчивой.

Доказательство. Покажем сначала, что если выполнено условие (10), то в моменты смены режимов, когда могут происходить скачкообразные изменения вектора состояния системы (8), определяемые матрицами преемственности $\tilde{Z}_{ij}$, значение функции $V(x)$ не возрастает, т.е.

$$V(\tilde{Z}_{ij}x) \leqslant V(x) \tag{11}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $(i, j) \in \Omega$.

Действительно, как известно, для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ верны оценки

$$\lambda_{\min}(H)\|x\|_2^2 \leqslant V(x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\|x\|_2^2.$$

Поэтому имеем

$$V(\tilde{Z}_{ij}x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}x\|_2^2 \leqslant \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2\|x\|_2^2.$$

Тогда

$$V(x) - V(\tilde{Z}_{ij}x) \geqslant \lambda_{\min}(H)\|x\|_2^2 - \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2\|x\|_2^2 =$$

$$= (\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\max}(H)\|\tilde{Z}_{ij}\|_2^2)\|x\|_2^2 \geqslant \left(\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\max}(H)\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}\right)\|x\|_2^2 =$$

$$= (\lambda_{\min}(H) - \lambda_{\min}(H))\|x\|_2^2 = 0.$$

Таким образом, неравенства (11) доказаны.

Далее, пусть переключаемая система

$$\dot{x} = \Lambda_\sigma(k)x \tag{12}$$

является некоторым элементом интервального семейства (8). Рассмотрим производную

$$\dot{V}|_{(i)}(x) = x^{\mathrm{T}}(\Lambda_i(k)^{\mathrm{T}}H + H\Lambda_i(k))x$$

общей квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^{\text{т}}Hx$ в силу i-го режима

$$\dot{x} = \Lambda_i(k)x, \quad \Lambda_i(k) \in [\tilde{\Lambda}_i(k)] \tag{13}$$

системы (12).

Заметим, что $\Lambda_i(k) = \sum \alpha_l Q_l^{(i)}$, где $\alpha_l \geqslant 0$, $\sum \alpha_l = 1$, $Q_l^{(i)}$ – вершинные матрицы для интервальной матрицы $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Тогда

$$\dot{V}|_{(i)}(x) = x^{\text{т}}((\sum \alpha_l Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + H(\sum \alpha_l Q_l^{(i)}))x = \sum \alpha_l (x^{\text{т}}((Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + HQ_l^{(i)})x) \leqslant \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2,$$

где $\lambda_l^{(i)}$ – максимальное собственное значение матрицы $(Q_l^{(i)})^{\text{т}}H + HQ_l^{(i)}$.

Пусть

$$-\lambda = \max_{i,l} \lambda_l^{(i)},$$

где максимум берётся по всем вершинным матрицам всех интервальных матриц $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Очевидно, что $-\lambda < 0$.

Тогда получаем следующую оценку:

$$\dot{V}|_{(i)}(x) \leqslant \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2 \leqslant -\lambda \|x\|^2 \sum \alpha_l = -\lambda \|x\|^2 < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{14}$$

Предположим, что при выполнении условий теоремы 1 соответствующая система (8) всё же не является $S(\Omega)$-устойчивой. Тогда в силу (14) для некоторого переключающего сигнала $\hat{\sigma} \in S(\Omega)$ и начального условия $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ найдётся такое $\mu > 0$, что для любого $t^* > 0$ будет существовать хотя бы одно решение $x(t)$ из соответствующего пучка $\mathfrak{X}$, которое не попадает в область $\omega_0 = \{x : V(x) < \mu\}$ при $t \in [0, t^*]$. Пусть r – радиус некоторого принадлежащего области ω_0 шара с центром в нуле. Зафиксируем произвольное $t^* > 0$. Тогда в соответствии со сделанным предположением найдётся решение $\hat{x}(t) \in \mathfrak{X}$, для которого выполняется неравенство $\|\hat{x}(t)\| > r$ при всех $t \in [0, t^*]$. Пусть $\hat{x}(t)$ является решением некоторой системы (12).

Обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_l$ все моменты переключения системы (12) на промежутке $[0, t^*]$, обусловленные переключающим сигналом $\hat{\sigma}(t)$. Пусть

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < t_{l+1} = t^*.$$

Пусть на некотором промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ активным является i-й режим (13). Тогда на этом промежутке в силу оценки (14) и выбора константы r выполняется неравенство

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) < -\lambda r^2.$$

Теперь, учитывая неравенство (11), оценим значение $V(\hat{x}(t^*))$. Имеем

$$V(\hat{x}(t^*)) = V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) + (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2)) - V(\hat{x}(t_2))) + \ldots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) +$$
$$+ (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l)) - V(\hat{x}(t_l))) \leqslant V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) +$$
$$+ (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) + \ldots$$
$$\ldots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) = V(\hat{x}(0)) + \int\limits_0^{t_1} \dot{V}|_{\sigma(0)}\hat{x}(\tau)\, d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot V|_{\sigma(t_1)}\hat x(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_2}^{t_3} \dot V|_{\sigma(t_2)}\hat x(\tau)\,d\tau + \ldots + \int\limits_{t_l}^{t^*} \dot V|_{\sigma(t_l)}\hat x(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant V(\hat x(0)) + \int\limits_{0}^{t_1}(-\lambda r^2)\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2}(-\lambda r^2)\,d\tau + \int\limits_{t_2}^{t_3}(-\lambda r^2)\,d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_l}^{t^*}(-\lambda r^2)\,d\tau = V(\hat x(0)) - \lambda r^2 t^*.$$

Таким образом, пришли к неравенству

$$V(\hat x(t^*)) \leqslant V(\hat x(0)) - \lambda r^2 t^*.$$

Так как константа λr^2 не зависит от t^*, то при достаточно больших t^* верно неравенство $V(\hat x(t^*)) < 0$, а это противоречит положительной определённости функции $V(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Леммы 2, 3 и теорема 1 дают, фактически, конструктивный алгоритм для проверки того, является ли данная обратная связь $u = -k^{\mathrm{т}}x$ $(k \in \mathbb{R}^n)$ стабилизирующей для системы (1). Указанный алгоритм позволяет разрабатывать различные численные процедуры поиска вектора k стабилизирующей обратной связи для системы (1). Это могут быть либо обычные сеточные методы поиска, либо методы интеллектуального поиска на множестве параметров обратной связи.

Рассмотрим вопрос об аналитическом алгоритме поиска вектора k стабилизирующей обратной связи. Запишем в явном виде интервальные матрицы $[\tilde\Lambda_i(k)]$ $(i = \overline{1,m})$, являющиеся интервальными оболочками матричных семейств

$$\{\tilde A_i - \tilde b_i k^{\mathrm{т}} : \tilde A_i \in [\tilde A_i],\quad \tilde b_i \in [\tilde b_i]\},\quad i = \overline{1,m}.$$

Вследствие правил выполнения интервальных операций (сложения, вычитания и умножения) [7, с. 24; 8, с. 39] эти интервальные матрицы описываются следующим образом:

$$[\tilde\Lambda_i(k)] = ([\lambda_{pr}^{(i)}(k_r)])_{p,r=1}^n,$$

где k_r – r-я компонента вектора $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_{pr}(k_r) = \begin{cases} [\underline{a}_{pr}^{(i)} - \overline{b}_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r], & \text{если}\quad k_r \geqslant 0,\\ [\overline{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - \overline{b}_i^p k_r], & \text{если}\quad k_r \leqslant 0. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь b_i^p – p-я компонента вектора $\tilde b_i$.

Рассмотрим случай, когда для всех векторов $[b_i]$, определяющих режимы системы (1), выполняются условия $\underline{b_i} = \overline{b_i}$, т.е. когда эти векторы являются “точечными”. В этом случае поиск вектора k параметров стабилизирующей обратной связи можно свести к решению системы линейных матричных неравенств. Действительно, если векторы $[b_i]$ являются точечными, то в силу (15) получаем

$$[\tilde\Lambda_i(k)] = [\tilde A_i] - \tilde b_i k^{\mathrm{т}} = ([\underline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r])_{p,r=1}^n$$

и вершинные матрицы $Q_l^{(i)}$ для интервальной матрицы $[\tilde\Lambda_i(k)]$ имеют вид

$$Q_l^{(i)} = \tilde A_i^l - \tilde b_i k^{\mathrm{т}},$$

где $\tilde{A}_l^{(i)}$ – вершинные матрицы для $[\tilde{A}_i]$. Тогда условие существования общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем (9) равносильно разрешимости системы матричных неравенств

$$\begin{cases}(\tilde{A}_l^{(i)} - \tilde{b}_i k^{\text{т}})^{\text{т}} H + H(\tilde{A}_l^{(i)} - \tilde{b}_i k^{\text{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}, \\ H \succ 0,\end{cases}$$

которая является билинейной относительно неизвестной матрицы H и вектора k. Известно [9, с. 44], что умножение первого неравенства на матрицу H^{-1} слева и справа переводит эту пару неравенств в линейные матричные неравенства относительно новых матриц $\hat{H} = H^{-1}$ и $\hat{k}^{\text{т}} = k^{\text{т}} H^{-1}$:

$$\begin{cases}\hat{H}(\tilde{A}_l^{(i)})^{\text{т}} + \tilde{A}_l^{(i)} \hat{H} - (\hat{k}\tilde{b}_i^{\text{т}} + \tilde{b}_i \hat{k}^{\text{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \hat{H} \succ 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}.\end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, если система линейных матричных неравенств (16) имеет решения $\hat{H}$, $\hat{k}$, то система (8), для которой

$$[\tilde{\Lambda}_\sigma(k)] = [\tilde{A}_\sigma] - \tilde{b}_\sigma k^{\text{т}}, \tag{17}$$

при $k^{\text{т}} = \hat{k}^{\text{т}} \hat{H}^{-1}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Далее, в работе [4] показано, что условие

$$H - \tilde{Z}_{ij}^{\text{т}} H \tilde{Z}_{ij} \succeq 0, \quad (i, j) \in \Omega, \tag{18}$$

эквивалентно неравенству $V(x) - V(\tilde{Z}_{ij} x) \geqslant 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, требование условия 2) теоремы 1 можно заменить условием (18). Умножив теперь неравенства (18) слева и справа на матрицу H^{-1}, получаем

$$\hat{H} - \hat{H} \tilde{Z}_{ij}^{\text{т}} \hat{H}^{-1} \tilde{Z}_{ij} \hat{H} \succeq 0. \tag{19}$$

В работе [4] также показано, что система матричных неравенств, составленная из неравенств (16) и (19), эквивалентна системе линейных матричных неравенств

$$\begin{cases}\hat{H}(\tilde{A}_i^l)^{\text{т}} + \tilde{A}_i^l \hat{H} - (\hat{k}\tilde{b}_i^{\text{т}} + \tilde{b}_i \hat{k}^{\text{т}}) \prec 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \hat{H} \succ 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2}}, \\ \begin{pmatrix} \hat{H} & \tilde{Z}_{ij} \hat{H} \\ \hat{H} \tilde{Z}_{ij}^{\text{т}} & \hat{H} \end{pmatrix} \succeq 0.\end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, в случае, когда векторы $[b_i]$ системы (1) являются точечными, поиск стабилизирующей обратной связи для такой системы можно свести к решению системы линейных матричных неравенств (20). Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть для системы (1) вида*

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma] x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i, j) \in \Omega\} \tag{21}$$

разрешима система линейных матричных неравенств (20) относительно матрицы $\hat{H}$ *и вектора* $\hat{k}$ ($\tilde{A}_l^{(i)}$ *– вершинные матрицы для* $[\tilde{A}_i]$).

Тогда обратная связь $u = -k^{\text{т}} x$, *где* $k^{\text{т}} = \hat{k}^{\text{т}} \hat{H}^{-1}$, *является* $S(\Omega)$*-стабилизирующей для системы (21).*

В заключение отметим, что представленные в настоящей работе достаточные условия стабилизации переключаемых интервальных линейных систем с режимами различных динамических порядков (теоремы 1 и 2) носят конструктивный характер и допускают численную реализацию процесса поиска стабилизирующего регулятора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-0001, 20-07-00827, 19-07-00294) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М.* Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559.
2. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.
3. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.
4. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.
5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М., 2016.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М., 1981.
7. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. М., 2007.
8. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2007.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича, г. Москва,
АО “Корпорация “Московский институт теплотехники”

Поступила в редакцию 08.05.2021 г.
После доработки 08.05.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.