ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1564–1567

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2021 г. С. А. Алдашев

Приводится пример смешанной области, в которой решение задачи Трикоми тривиально. Получен также критерий единственности классического решения этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121110133

Введение. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$ пространственных $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $m\geqslant 2$, и временнóй $t\geqslant 0$ переменных, то, согласно принципу Гамильтона, приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, вследствие принципа Гамильтона получаем также многомерное уравнение Лапласа.

Таким образом, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать многомерным уравнением Лаврентьева–Бицадзе [1, с. 276; 2, с. 33].

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена (см., например, монографии [2, 3] и приведённые в них библиографии).

Проблема корректности смешанных задач для гиперболо-эллиптических уравнений в многомерных ограниченных областях все ещё остаётся нерешённой [4, с. 110].

Многомерный аналог задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе сформулирован в [4, с. 110; 5] (см. также [6]). В работах [7, 8] доказано, что эта задача в многомерном случае может иметь не единственное решение. Отметим также работу [9], в которой изучается задача Трикоми в трёхмерной области.

Естественно, возникает важный вопрос: в какой смешанной области решение задачи Трикоми является единственным. В настоящей работе приводится пример такой смешанной области. Получен также критерий единственности классического решения.

Постановка задачи и результат. Пусть Ω_ε – конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ сферической поверхностью $\Gamma:|x|^2+t^2=1$, а при $t<0$ конусами $K_\varepsilon:|x|=-t+\varepsilon$, $K_1:|x|=1+t$, $(\varepsilon-1)/2\leqslant t\leqslant 0$, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, а $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^-_ε части области Ω_ε, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$ соответственно, через S^ε – общую часть границ областей Ω^+ и Ω^-_ε, представляющую собой множество $\{t=0,\ 0<|x|<1\}$ точек из $\mathbb{R}^m$. Часть конуса K_ε, ограничивающего область Ω^-_ε, обозначим через S_ε.

В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\Delta_x u+(\operatorname{sgn} t)u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\ \ldots,\ x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ \ldots,\ x_m$, t к сферическим r, $\theta_1,\ \ldots,\ \theta_{m-1}$, t, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=\overline{2,m-1}$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

В качестве многомерной задачи Трикоми рассматривается следующая

Задача 1. Найти решение из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\bigcap C^2(\Omega^+\bigcup\Omega^-_\varepsilon)$ уравнения (1) в области Ω_ε при $t\neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma=0, \tag{2}$$

$$u|_{S_\varepsilon}=0. \tag{3}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$; через $W^l_2(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначаем пространства Соболева функций, определённых на множестве S.

Имеет место (см., например, [10, с. 142])

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S^\varepsilon)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом $f^k_n(r) = \int_H f^k_n(r,\theta) Y^k_{n,m}(\theta)\,dH$, где H – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$.

Тогда справедлива

Теорема. *Решение $u(r,\theta,t)$ задачи 1 тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [10, с. 143]

$$u_{rr} + (m-1)r^{-1}u_r - \delta r^{-2}u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно, что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω^+ принадлежит классу $C(\overline{\Omega^+}) \bigcap C^2(\Omega^+)$, то это решение можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя представление (5) в уравнение (4) и учитывая ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [10, с. 144], будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr} + (m-1)r^{-1}\bar{u}^k_{nr} + \bar{u}^k_{ntt} - \lambda_n r^{-2}\bar{u}^k_n = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

при этом краевое условие (2) в силу леммы запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(r, \sqrt{1-r^2}) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{7}$$

В (6), (7) сделаем замену $\bar{u}^k_n(r,t) = r^{(1-m)/2}u^k_n(r,t)$, затем, положив $r = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\sin\varphi$, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, получим

$$\upsilon^k_{n\rho\rho} + \rho^{-1}\upsilon^k_{n\rho} + \rho^{-2}\upsilon^k_{n\varphi\varphi} + \overline{\lambda}_n\rho^{-2}(\sec^2\varphi)\upsilon^k_n = 0, \tag{8}$$

$$\upsilon^k_n(1,\varphi) = 0, \tag{9}$$

где

$$\upsilon^k_n(\rho,\varphi) = u^k_n(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), \quad \overline{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4.$$

Решение задачи (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=R(\rho)\phi(\varphi). \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (8), будем иметь

$$\rho^2 R_{\rho\rho}+\rho R_\rho-\mu R=0,\quad \mu=\mathrm{const}, \tag{11}$$

$$\phi_{\varphi\varphi}+(\mu+\overline{\lambda}_n\sec^2\varphi)\phi=0. \tag{12}$$

Если решение уравнение Эйлера (11) будем искать в виде $R(\rho)=\rho^s$, $0\leqslant s=\mathrm{const}$, то получим, что $s^2=\mu$.

Далее уравнение (12) запишем следующим образом:

$$\phi_{\varphi\varphi}=(l(l-1)\sec^2\varphi-s^2)\phi,\quad l=-n-(m-3)/2. \tag{13}$$

Сделав в уравнении (13) замену $\xi=\sin^2\varphi$, приходим к уравнению

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi}+((\alpha+\beta+1)\xi-1/2)g_\xi+\alpha\beta g=0, \tag{14}$$

$$g(\xi)=\phi(\varphi)\sec^l\varphi,\quad \alpha=(l+s)/2,\quad \beta=(l-s)/2.$$

Общее решение уравнение (14) представимо по формуле (см. [11, гл. 2, с. 421])

$$g_s(\xi)=c_{1s}F(\beta,\gamma,1/2;\xi)+c_{2s}\sqrt{\xi}F(\beta+1/2,\gamma+1/2,3/2;\xi), \tag{15}$$

которая периодическая по φ, если $s\in\mathbb{Z}_+$, где c_{1s}, c_{2s} – произвольные независимые постоянные, а $F(\beta,\gamma,\alpha;\xi)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, из равенств (10), (15) вытекает, что общее решение уравнения (8) записывается в виде

$$\upsilon_{n,\mu}^k(\rho,\varphi)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\cos^l\varphi\left[c_{1s}F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)+c_{2s}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{16}$$

Так как $|\upsilon_n^k(\rho,\pi/2)|<\infty$, то из представления (16) следует, что

$$c_{1s}F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};1\right)+c_{2s}F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{3}{2},\frac{3}{2};1\right)=0,$$

или

$$c_{2s}=-\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\gamma)}c_{1s}, \tag{17}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=\sum_{s=0}^{\infty}c_{1s}\rho^s\cos^l\varphi\left[F\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\gamma)}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{18}$$

Подчинив функцию (18) граничному условию (9), найдём, что $c_{1s}=0$, $s\in\mathbb{Z}_+$, и, значит, $\bar{u}_n^k(\rho,\varphi)\equiv 0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Тогда из равенства (5) в свою очередь вытекает, что решением задачи (1), (2) в области Ω^+ является функция $u(r,\theta,t) \equiv 0$, откуда при $t \to +0$ имеем

$$u(r,\theta,t) = 0, \quad \varepsilon < r < 1. \tag{19}$$

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (19), получаем в области Ω_ε^- задачу Дарбу–Проттера для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \tag{20}$$

с краевыми условиями

$$u|_{S_\varepsilon \bigcup S^\varepsilon} = 0. \tag{21}$$

При $\varepsilon > 0$, из результатов работ [12, 13] следует, что решение $u(r,\theta,t)$ задачи (20), (21) тождественно нулевое. Следовательно, и решение задачи 1 тривиальное.

Пусть теперь решение $u(r,\theta,t)$ задачи 1 тождественно нулевое. Покажем, что $\varepsilon > 0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon = 0$.

Если $\varepsilon = 0$, то, как показано выше, задача 1 сводится к задаче Дарбу–Проттера для уравнения (20) с условием

$$u|_{S_0 \bigcup S^0} = 0. \tag{22}$$

В работах [13, 14] доказано, что задача (20), (22) имеет ненулевое решение. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
3. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М., 2006.
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
5. *Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. С. 901–902.
6. *Пулькин С.В.* Сингулярная задача Трикоми // Тр. Третьего всесоюз. математического съезда. Т. 1. М., 1956. С. 65–66.
7. *Алдашев С.А.* Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Матер. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теории приближений", посвящ. 100-летию акад. С.Л. Соболева. Новосибирск, 2008. С. 93.
8. *Алдашев С.А.* Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 2. С. 265–269.
9. *Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холомеева А.А.* Аналоги задач Трикоми и Франкля в трёхмерных областях для уравнения Ларентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1672–1675.
10. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
12. *Алдашев С.А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 3–8.
13. *Алдашев С.А.* О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1289–1292.
14. *Алдашев С.А.* О критериях единственность и решения задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Мат. журн. Алматы. 2002. Т. 2. № 4 (6). С. 26–29.

Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
г. Алматы

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.
После доработки 06.02.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.