ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1568–1572

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОДНОРОДНЫЕ СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. **Ю. Л. Сачков**

Описаны однородные субримановы геодезические для стандартной субримановой структуры на группе собственных движений плоскости SE(2). Показано, что эта структура не является геодезически орбитальной, несмотря на инвариантность времени разреза при сдвиге начальной точки вдоль геодезических.

DOI: 10.31857/S0374064121110145

В римановой геометрии известны понятия однородных геодезических и геодезически орбитальных пространств [1–5]. В субримановой геометрии по этой тематике ряд результатов получен в работах В.Н. Берестовского и И.А. Зубаревой [6–12]: доказана геодезическая орбитальность осесимметричных левоинвариантных субримановых метрик на группах SU(2), SO(3), SL(2), $\mathrm{SO}_0(2,1)$ и всех локально изоморфных и локально изометричных накрытий последней группы с упомянутыми субримановыми метриками. Все эти метрики реализуемы как инвариантные метрики на соответствующих слабо симметрических по А. Сельбергу пространствах.

1. Однородные и эквиоптимальные субримановы геодезические на группах Ли. Пусть на гладком многообразии M задана субриманова структура [13, с. 22; 14, с. 76]. Обозначим через $\mathrm{Isom}\,(M)$ группу изометрий субриманова многообразия M.

Субриманова геодезическая $\gamma \subset M$ называется *однородной*, если она является однородным пространством некоторой однопараметрической подгруппы группы $\mathrm{Isom}\,(M)$. Субриманово многообразие называется *геодезически орбитальным*, если все его геодезические однородны.

Временем разреза для геодезической $g(t)$, $t \geqslant 0$, соответствующим начальному моменту $t=0$, называется величина $t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) = \sup\{T>0 : g(t)$ оптимальна при $t\in[0,T]\}$. Геодезическая $g(t)$, $t\in[0,T]$, где $T = t_{\mathrm{cut}}(g(\cdot)) < +\infty$, называется *непродолжаемой кратчайшей*.

Пусть на группе Ли G задана левоинвариантная субриманова структура с ортонормированным репером $(X_1,\ldots,X_k)$, $X_i \in \mathrm{Vec}(G)$. Будем говорить, что *геодезическая* $\{g(t)\}\subset G$ *соответствует управлению* $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_k(t))$, $u_i\in L^\infty$, если выполняется равенство

$$\dot g(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X_i(g(t)).$$

Согласно принципу максимума Понтрягина [15, с. 25; 16, с. 176] любая нормальная геодезическая $\{g(t)\}\subset G$ является проекцией нормальной экстремали $\{\lambda(t)\}\subset T^*G$:

$$\dot\lambda(t) = \vec H(\lambda(t)), \quad \lambda(t)\in T^*_{g(t)}G, \tag{1}$$

где $\vec H \in \mathrm{Vec}(T^*G)$ – гамильтоново векторное поле с гамильтонианом

$$H = \frac12\sum_{i=1}^k h_i^2 \in C^\infty(T^*G), \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(\pi(\lambda))\rangle,$$

и $\pi : T^*G\to G$ – каноническая проекция.

Кокасательное расслоение T^*G группы Ли G левыми сдвигами $L_g : g_0\mapsto gg_0$, $g, g_0\in G$, тривиализуется:

$$\Phi : \mathfrak g^*\times G \to T^*G, \quad (p,g)\mapsto L^*_{g^{-1}}p,$$

$$\langle L^*_{g^{-1}}p, L_{g*}\xi\rangle = \langle p,\xi\rangle, \quad p\in\mathfrak g^*, \quad \xi\in\mathfrak g, \quad g\in G,$$

где $\mathfrak{g} = T_{\mathrm{Id}}G$ – алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{g}^*$ – сопряжённое к $\mathfrak{g}$ пространство. В этой тривиализации гамильтонова система (1) становится треугольной (см. [16, с. 251]):

$$\dot{p} = \left(\mathrm{ad}\frac{\partial H}{\partial p}\right)^* p, \quad p \in \mathfrak{g}^*, \tag{2}$$

$$\dot{g} = L_{g*}\frac{\partial H}{\partial p}, \quad g \in G.$$

Обозначим вертикальную компоненту гамильтонова поля в правой части уравнения (2) через $\vec{H}_v \in \mathrm{Vec}(\mathfrak{g}^*)$.

Переходя к натурально параметризованным геодезическим $(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \equiv 1)$, будем считать, что $p \in C := \mathfrak{g}^* \bigcap \{H = 1/2\}$. Тогда время разреза t_{cut} на нормальных геодезических $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$ становится функцией $C \to (0, +\infty]$.

Пусть $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – натурально параметризованная геодезическая в субримановом многообразии M. Геодезическая $g(t)$ называется *эквиоптимальной*, если она удовлетворяет следующему свойству: если $g(t)$, $t \in [0, T]$, – непродолжаемая кратчайшая, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ геодезическая $g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, – также является непродолжаемой кратчайшей. Субриманово многообразие M называется *эквиоптимальным*, если любая его натурально параметризованная геодезическая эквиоптимальна.

Лемма. *Пусть $\{g(t)\} \subset G$ – субриманова геодезическая с управлением $u(t)$. Тогда для любого $g_1 \in G$ кривая $\widetilde{g}(t) = g_1 g(t + \tau)$ является субримановой геодезической с управлением $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$.*

Доказательство. Кривая $g(t + \tau)$ – геодезическая по определению геодезической, а её левый сдвиг $\widetilde{g}(t) = L_{g_1}(g(t + \tau))$ является геодезической в силу левоинвариантности субримановой структуры. Вычислим управление $\widetilde{u}(t)$, соответствующее геодезической $\widetilde{g}(t)$:

$$\dot{\widetilde{g}}(t) = \frac{d}{dt}L_{g_1}(g(t+\tau)) = L_{g_1*}\dot{g}(t+\tau) = L_{g_1*}\sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(g(t+\tau)) =$$

$$= \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)L_{g_1*}X_i(g(t+\tau)) = \sum_{i=1}^k u_i(t+\tau)X_i(\widetilde{g}(t)),$$

поэтому $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Нормальная геодезическая $g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(p, \mathrm{Id})$, $t \in \mathbb{R}$, эквиоптимальна тогда и только тогда, когда время разреза инвариантно относительно выбора начального момента, т.е.*

$$t_{\mathrm{cut}} \circ e^{\tau\vec{H}_v}(p) = t_{\mathrm{cut}}(p), \quad p \in C, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Геодезическая $\overline{g}(t) = g(t + \tau)$, $t \in [0, T]$, является непродолжаемой кратчайшей тогда и только тогда, когда непродолжаемой кратчайшей является геодезическая $\widetilde{g}(t) = g_1^{-1}\overline{g}(t) = g_1^{-1}g(t + \tau)$, $g_1 = g(\tau)$, $t \in [0, T]$. Если геодезическая $g(t)$ соответствует управлению $u(t)$, то геодезическая $\widetilde{g}(t)$ – управлению $\widetilde{u}(t) = u(t + \tau)$ (см. лемму). Наконец, равенство (3) означает, что для любого $T > 0$ управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, и $u(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, одновременно оптимальны или неоптимальны.

Следствие. *Стандартные левоинвариантные субримановы структуры на следующих группах Ли эквиоптимальны:*

1) группа Гейзенберга;

2) группы SO(3), SU(2), SL(2) *с осесимметричной субримановой метрикой;*

3) группы SE(2) *и* SH(2);

4) группы Энгеля и Картана.

Доказательство. Все геодезические для указанных групп Ли нормальны. Свойство (3) инвариантности времени разреза для групп Ли 1)–4) доказано соответственно в статьях: 1) [17]; 2) [7, 9, 18]; 3) [19, 20]; 4) [21].

Предложение 2. *Если субриманова геодезическая однородна, то она эквиоптимальна.*

Доказательство. Пусть геодезическая $\gamma = \{g(t) : t \in \mathbb{R}\}$ однородна, и пусть $\{\varphi_s : s \in \in \mathbb{R}\}$ – та однопараметрическая подгруппа в $\operatorname{Isom}(G)$, для которой γ является однородным пространством. Далее, пусть $g(t)$, $t \in [0, T,]$ – непродолжаемая кратчайшая. Возьмём любое $\tau \in \mathbb{R}$ и найдём такое $s \in \mathbb{R}$, что $\varphi_s(g(0)) = g(\tau)$. Тогда $g(t+\tau)$, $t \in [0, T]$, – непродолжаемая кратчайшая, так как $g(t+\tau) = \varphi_s(g(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

В следующем пункте работы на примере стандартной субримановой структуры на группе $\mathrm{SE}(2)$ [20, 22, 23] покажем, что утверждение, обратное к предложению 2, неверно.

2. Субримановы геодезические на группе SE(2). Группа собственных движений евклидовой плоскости $\mathrm{SE}(2)$ представляет собой полупрямое произведение группы параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ и группы вращений плоскости $\mathrm{SO}(2)$, т.е. $\mathrm{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$. Эта группа имеет линейное представление

$$\mathrm{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in S^1, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Наряду с матричным обозначением будем обозначать элементы этой группы как (x, y, θ).

Рассмотрим на группе $\mathrm{SE}(2)$ стандартную левоинвариантную субриманову структуру, порождённую ортонормированным репером

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Субримановы геодезические и оптимальный синтез для этой структуры описаны в работах [20, 22, 23].

Пример. Отметим следующие геодезические для этой структуры:

1) “движение вперед”: $e^{tX_1}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$;

2) “поворот на месте”: $e^{tX_2}(\mathrm{Id}) = (x, y, \theta)(t) = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Проекции всех остальных геодезических на плоскость (x, y) являются некомпактными кусочно-гладкими кривыми с точками возврата (см. [22]).

Группа $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ вычислена в работе [24], в которой показано, что

$$\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2)) \cong \mathrm{SE}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2). \tag{4}$$

Группа $\mathrm{SE}(2)$ действует на себе левыми сдвигами. В представлении (4) один сомножитель $\mathbb{Z}_2$ означает отражение относительно какой-либо оси на плоскости (x, y), а другой сомножитель $\mathbb{Z}_2$ – разворот. В частности, все однопараметрические подгруппы в $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$ будут однопараметрическими подгруппами в группе $\mathrm{SE}(2)$.

Теорема. *Однородными геодезическими в группе* $\mathrm{SE}(2)$ *являются только геодезические 1) и 2), указанные в примере.*

Группа $\mathrm{SE}(2)$ *не является геодезически орбитальным пространством.*

Доказательство. Вычислим однопараметрические подгруппы в $\operatorname{Isom}(\mathrm{SE}(2))$, т.е. в $\mathrm{SE}(2)$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{SE}(2)$ имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2) = \operatorname{span}(E_{13}, E_{23}, E_{21} - E_{12}),$$

где E_{ij} – 3×3-матрица с единственным ненулевым элементом на строке i и столбце j, равным 1. Однопараметрической подгруппой, соответствующей её элементу $X = aE_{13} + bE_{23} + + c(E_{21} - E_{12})$, будет $e^{sX} = (x(s), y(s), \theta(s))$, где координаты x, y, θ удовлетворяют задаче Коши

$$\dot{x} = -cy + a, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{y} = cx + b, \quad y(0) = 0,$$

$$\dot{\theta} = c, \quad \theta(0) = 0.$$

Поэтому $\theta(s)=cs$ и

$$x(s)=as,\quad y(s)=bs \ \text{ при } \ c=0,$$

$$x(s)=\frac{b}{c}(\cos(cs)-1)+\frac{a}{c}\sin(cs),\quad y(s)=\frac{b}{c}\sin(cs)+\frac{a}{c}(1-\cos(cs)) \ \text{ при } \ c\neq 0.$$

Орбита однопараметрической подгруппы $\{e^{sX}\}\subset \mathrm{SE}(2)$, проходящая через точку $(x_0,y_0,\theta_0)\in$ $\in \mathrm{SE}(2)$, представляется в виде:

$$(x_0+as,y_0+bs,\theta_0) \ \text{ при } \ c=0,$$

$$\left(\left(x_0+\frac{b}{c}\right)\cos cs+\left(\frac{a}{c}-y_0\right)\sin cs-\frac{b}{c},\left(y_0-\frac{a}{c}\right)\cos cs+\left(\frac{b}{c}+x_0\right)\sin cs+\frac{a}{c},\theta_0+cs\right) \ \text{ при } \ c\neq 0.$$

Эта орбита проекцией на плоскость (x,y) имеет следующую кривую:

1) прямую при $c=0$, $a^2+b^2\neq 0$;

2) точку при $c\neq 0$, $(x_0+b/c)^2+(a/c-y_0)^2=0$;

3) окружность при $c((x_0+b/c)^2+(a/c-y_0)^2)\neq 0$.

Из описания проекций геодезических на плоскость (x,y) следует, что однопараметрические подгруппы в случае (3) не могут быть геодезическими. Значит, только геодезические из приведённого выше примера однородны (случаи 1), 2)).

Таким образом, на группе $\mathrm{SE}(2)$, во-первых, все геодезические эквиоптимальны (следствие), а во-вторых, однородны только геодезические типов 1), 2) примера. Поэтому группа $\mathrm{SE}(2)$ эквиоптимальна, но не геодезически орбитальна. Теорема доказана.

Глубинная причина эквиоптимальности группы $\mathrm{SE}(2)$ остаётся скрытой. С другой стороны, группы, перечисленные в пп. 1) и 2) следствия геодезически орбитальны и эквиоптимальны. Отметим также, что стандартная левоинвариантная субриманова структура на свободной двуступенной группе Карно с тремя образующими (вектор роста $(3,6)$) [25] эквиоптимальна, потому геодезически орбитальна согласно доказанному следствию.

Автор выражает благодарность А.В. Подобряеву за полезные обсуждения этой работы, а также рецензенту за ценную информацию о публикациях по теме статьи.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01387-П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrose W., Singer I.M.* On homogeneous Riemannian manifolds // Duke Math. J. 1958. V. 25. P. 647–669.
2. *Kaplan A.* On the geometry of groups of Heisenberg type // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 35–42.
3. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Un. Mat. Ital. 1991. V. 5. P. 189–246.
4. *Kowalski D., Szenthe J.* On the existence of homogeneous geodesics in honogeneous Riemannian manifolds // Geom. Dedicata. 2000. V. 81. № 1–3. P. 209–214.
5. *Berestovskii V., Nikonorov Yu.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Cham, 2020.
6. *Берестовский В.Н.* (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 3–22.
7. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SO}(3)$ // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 4. С. 762–774.
8. *Берестовский В.Н., Грибанова И.А.* Субриманово расстояние в группах Ли $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SO}(3)$ // Мат. тр. 2015. Т. 18. № 2. С. 3–21.
9. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $\mathrm{SL}(2)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 3. С.527–542.
10. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Локально изометричные накрытия группы Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ со специальной субримановой метрикой // Мат. сб. 2016. Т. 207. № 9. С. 35–56.
11. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SO}0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2016. Т 28. № 4. С. 62–79.

12. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Субриманово расстояние в группе Ли $\mathrm{SL}(2)$ // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 1. С. 22–35.
13. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannnian Geometries, their Geodesics and Applications. Providence, 2002.
14. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge, 2019.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
16. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
17. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. 1987. Т. 16. С. 5–85.
18. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SL}(2)$ and lens spaces // SIAM J. Contr. Optim. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
19. *Butt Y.A., Bhatti A.I., Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in sub-Riemannian problem on the Lie group $\mathrm{SH}(2)$ // J. of Dynam. and Contr. Systems. 2017. V. 23. P. 155–195.
20. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. P. 293–321.
21. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21. № 4. P. 958–988.
22. *Moiseev I., Sachkov Yu.L.* Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. P. 380–399.
23. *Sachkov Yu.L.* Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. P. 1018–1039.
24. *Ardentov A., Bor G., Le Donne E., Montgomery R., Sachkov Yu.* Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry // Nonlinearity. 2021. V. 34. P. 4661–4683.
25. *Myasnichenko O.* Nilpotent $(3,6)$ sub-Riemannian problem // J. of Dynam. and Contr. Systems. 2002. V. 8. № 4. P. 573–597.

Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.
После доработки 12.08.2021 г.
Принята к публикации 05.10.2021 г.