ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 11, с. 1573–1586

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2021 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2021. Т. 57. № 6).

DOI: 110.31857/S0374064121110157

А. Н. Ветохин (Москва) "Об одном свойстве линейных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами, обобщённо приводимых к упорядоченно-диагональному виду" (24 сентября 2021 г.).

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с ограниченной непрерывной оператор-функцией $A,$ которую мы отождествляем с самой системой (1) и поэтому пишем $A \in \mathcal{M}_n.$ По линейной системе $A \in \mathcal{M}_n$ зададим на пространстве $\mathbb{R}^n$ набор метрик

$$d_t^A(x_0, y_0) = \max_{\tau \in [0,t]} \|x(\tau, x_0) - x(\tau, y_0)\|, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $x(\,\cdot\,, a)$ – решение системы $A,$ удовлетворяющее условию $x(0, a) = a,$ а $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$ (для определённости $\|x\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$). Пусть $N_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t)$ – *ε-ёмкость* компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ с метрикой d_t^A [1] (т.е. максимальное число точек, попарные d_t^A-расстояния между которыми больше ε), тогда топологическая энтропия системы (1) определяется формулой

$$h_{\mathrm{top}}(A) = \sup_{\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln N_{\|\cdot\|}(A, \mathcal{K}, \varepsilon, t)$$

(её правая часть не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|,$ поэтому определение корректно).

В докладе [2] введён класс EI_n таких систем $A \in \mathcal{M}_n,$ что для всякой непрерывной оператор-функции B с отрицательным характеристическим показателем

$$\chi(B) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \|B(t)\| < 0 \tag{2}$$

система $A+B$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система A (здесь $\|\cdot\|$ – какая-либо матричная норма). Известно [3], что класс правильных (по Ляпунову) систем содержится в $\mathrm{EI}_n.$ В докладе [4] предложено естественное расширение класса правильных систем с сохранением свойства инвариантности показателей Ляпунова относительно экспоненциально убывающих возмущений их матриц коэффициентов, а именно – класс GROD_n систем из $\mathcal{M}_n,$ обобщённо ляпуновски эквивалентных системам с упорядоченной диагональю. Напомним, что системы

---

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков. В настоящее время руководители семинара – Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

A и B (матрицы коэффициентов которых не обязательно ограничены на полуоси) называются *обобщённо ляпуновски эквивалентными*, если некоторое дифференцируемое линейное преобразование координат с матрицей $L(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условию

$$\chi(\|L\| + \|L^{-1}\|) \leqslant 0,$$

переводит систему A в систему B. В работе [5] для каждого $n \in \mathbb{N}$ установлено, что класс GROD_n содержится в классе EI_n, но не совпадает с ним для каждого $n \geqslant 2$ (при $n = 1$ оба эти класса совпадают с $\mathcal{M}_1$).

Обозначим через EITE_n класс таких систем $A \in \mathcal{M}_n$, что для всякой непрерывной оператор-функции B с отрицательным характеристическим показателем (2) система $A + B$ имеет ту же топологическую энтропию, что и система A.

Теорема 1. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место включение* $\mathrm{GROD}_n \subset \mathrm{EITE}_n$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное включение $\mathrm{EITE}_n \subset \mathrm{GROD}_n$? Для ответа на него рассмотрим систему

$$\dot{x} = \mathrm{diag}\,[a_1(t), a_2(t), \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}]x, \tag{3}$$

$$a_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 6], \\ 1, & t \in ((3k)!, (3k+1)! - 1], \\ 0, & t \in [(3k+1)!, (3k+2)!], \\ 1, & t \in [(3k+2)! + 1, (3k+3)!], \end{cases} \qquad a_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 6], \\ 1, & t \in ((3k)!, (3k+1)!], \\ 1, & t \in ((3k+1)!, (3k+2)! - 1], \\ 0, & t \in [(3k+2)!, (3k+3)!], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$, причём функция $a_1(t)$ аффинно линейна по t на отрезках $[(3k+1)! - 1, (3k+1)!]$ и $[(3k+2)!, (3k+2)! + 1]$, а функция $a_2(t)$ – на отрезках $[(3k+2)! - 1, (3k+2)!]$.

Теорема 2. *Для любого* $n \geqslant 2$ *система (3) принадлежит классу* EITE_n, *но не принадлежит классу* GROD_n.

Литература. 1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 179. № 3. С. 585–589. 2. Миллионщиков В.М. Экспоненциально-инвариантные системы // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2014. 3. Гробман Д.М. Характеристические показателей систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166. 4. Миллионщиков В.М. Об одном классе линейных систем // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 1090–1091. 5. Ветохин А.Н. О несовпадении двух множеств линейных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 6. С. 784–788.

И. Н. Сергеев (Москва) “Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости” (1 октября 2021 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ рассмотрим дифференциальную (вообще говоря, нелинейную) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её первого приближения

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \equiv f'(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку: $h(t,x) \equiv f(t,x) - A(t)x = o(x)$ при $x \to 0$, обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем.

Через $x_f(\,\cdot\,, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через $S_*(f)$ и S_A – множество всех ненулевых решений системы (1) и, соответственно, всех решений системы (2).

Ниже в определении 1 вводятся [1] три основных разновидности функционала K, по которым затем в определении 2 строятся соответствующие им показатели $\varkappa$.

Определение 1. Функционалы $\mathrm{K}(t,u)$ определены на парах $t \in \mathbb{R}_+$ и $u\colon [0,t] \to \mathbb{R}^n$, принимают значение $+\infty$ всякий раз, когда функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$, отвечают показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho \quad \text{при} \quad \mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta, \mathrm{P} \quad \text{соответственно} \tag{3}$$

и описывают следующие свойства решений:

1) *колеблемость* ($\varkappa = \nu$), если $\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{N}(t,u)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $(0,t]$ функции $P_1 u$, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)^{\cdot}$), то считаем $\mathrm{N}(t,u) = +\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*, $\varkappa = \theta$), если $\mathrm{K}(t,u) = \Theta(t,u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ – модуль *ориентированного* угла $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0,t]$, то считаем $\Theta(t,u) = +\infty$;

3) *блуждаемость* ($\varkappa = \rho$), если

$$\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{P}(t,u) \equiv \int\limits_0^t \bigl|(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}\bigr|\, d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0,t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* или *частотную вращаемость* [1], *поворачиваемость k-го ранга* [2], а также *плоскую вращаемость* [3].

Определение 2. Для каждого функционала из числа описанных в определении 1 зададим:

а) *слабый* и *сильный нижние линейные* показатели (3) решения $x \in S_*(f)$, определённого на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, по формулам

$$\check{\varkappa}^{\circ}(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\mathrm{K}(t, Lx), \quad \check{\varkappa}^{\bullet}(x) \equiv \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\mathrm{K}(t, Lx); \tag{4}$$

б) *слабый* и *сильный нижние радиальные* показатели (3) задачи Коши системы (1) с начальным значением $x_0 \in G$ по формулам [4]

$$\check{\varkappa}_r^{\circ}(f, x_0) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L), \quad \check{\varkappa}_r^{\bullet}(f, x_0) \equiv \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L), \tag{5}$$

где для момента $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденного преобразования $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ обозначено

$$\check{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L) = \varliminf_{\mu\to+0} \mathrm{K}(t, Lx_f(\,\cdot\,, \mu x_0)), \quad \hat{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L) = \varlimsup_{\mu\to+0} \mathrm{K}(Lx_f(t, \cdot\,, \mu x_0));$$

в) *слабый* и *сильный верхние линейные* $\hat{\varkappa}^{\circ}(x)$, $\hat{\varkappa}^{\bullet}(x)$ и *радиальные* $\hat{\varkappa}_r^{\circ}(x_0, f)$, $\hat{\varkappa}_r^{\bullet}(x_0, f)$ показатели по тем же формулам (4) и (5) соответственно, но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ верхними, а функционалов $\check{\mathrm{K}}_r$ функционалами $\hat{\mathrm{K}}_r$;

г) *точные* или *абсолютные* разновидности тех же показателей, которые возникают при совпадении соответствующих значений нижнего и верхнего показателей или соответственно слабого и сильного показателей: в первом случае будем опускать в их обозначении галочку и крышечку, а во втором – пустой и полный кружочек.

Введение радиальных, сферических [5] и шаровых [6] показателей обусловлено тем, что решения нелинейной системы (1) могут оказаться определёнными не на всей временно́й полуоси. Некоторые свойства всех этих показателей описаны в работе [7]. Ниже изучается возможная связь между радиальными показателями нелинейной системы (1) и системы её первого приближения (2) (для последней они равны линейным показателям).

С одной стороны, радиальные показатели блуждаемости полностью совпадают с соответствующими линейными показателями системы первого приближения, причём в двумерном случае аналогичное совпадение наблюдается и для показателей вращаемости, что утверждают

Теорема 1. *Для любой системы (1) и любого ненулевого решения* $x \in S_A$ *системы её первого приближения (2) для функционалов блуждаемости выполнены равенства*

$$\check{\mathrm{P}}_r(f, x(0), t, L) = \hat{\mathrm{P}}_r(f, x(0), t, L) = \mathrm{P}(Lx, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n,$$

а для всех показателей блуждаемости – равенства

$$\tilde{\rho}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\rho}^*(x), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

Теорема 2. *При* $n = 2$ *для любой системы (1) и любого ненулевого решения* $x \in S_A$ *системы её первого приближения (2) для функционалов вращаемости выполнены равенства*

$$\check{\Theta}_r(f, x(0), t, L) = \hat{\Theta}_r(f, x(0), t, L) = \Theta(Lx, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n,$$

а для всех показателей вращаемости – равенства

$$\tilde{\theta}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\theta}^*(x), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

С другой стороны, уже в трёхмерном автономном случае радиальные показатели вращаемости, равно как и колеблемости, вообще говоря, не совпадают с соответствующими линейными показателями системы первого приближения, а для показателей колеблемости аналогичное несовпадение наблюдается даже и в двумерном случае, как показывают

Теорема 3. *При* $n = 3$ *и* $G = \mathbb{R}^3$ *существует такая автономная система (1), что для любого ненулевого решения* $x \in S_A$ *системы её первого приближения (2) решение* $x_f(\,\cdot\,, x(0))$ *также определено на всей полуоси* $\mathbb{R}_+$, *причём значения всех показателей вращаемости и колеблемости точны, абсолютны и для некоторого двумерного подпространства* $S \subset S_A$ *удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \theta_r(f, x(0)) = \nu_r(f, x(0)) \leqslant \theta(x) = \nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in S \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{если} \quad x \notin S. \end{cases}$$

Теорема 4. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2$ *существует такая система (1), что для любого ненулевого решения* $x \in S_A$ *системы её первого приближения (2) решение* $x_f(\,\cdot\,, x(0))$ *также определено на всей полуоси* $\mathbb{R}_+$, *причём значения всех показателей колеблемости точны, абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \nu_r(f, x(0)) < \nu(x) = 1.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 5. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 6. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 7. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

И. Н. Сергеев (Москва) “Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем” (8 октября 2021 г.).

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, что удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) удовлетворяет требованию (2).

Для определения же соответствующих *ляпуновских* свойств [3, гл. II, § 1] системы (1) нужно:

4) в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

а в п. 3) в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2 (см. [4]). Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства системы (1) назовём *массивными*: при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$ (допускается даже $S = S_* \setminus S_\delta$ [5]), накладывается определённое условие – требование (2), (3) или его отрицание. Каждому массивному свойству из определения 1 поставим в соответствие его *почти массивный* аналог, а именно: *почти устойчивость*, *почти полную* (*почти глобальную*) *неустойчивость* и *почти асимптотическую* (*почти глобальную*) *устойчивость*, в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству (назовём его *множеством вырождения*) нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Оказывается, свойства ляпуновской устойчивости и ляпуновской почти устойчивости в действительности неразличимы между собой, о чём и говорит

Теорема 1. *Если система (1) ляпуновски почти устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Если ляпуновскую асимптотическую (глобальную) устойчивость, означающую одновременное выполнение двух условий: ляпуновской устойчивости и верхнепредельной асимптотической (глобальной) устойчивости, ослабить до ляпуновской почти асимптотической (почти глобальной) устойчивости, то первого условия, а именно ляпуновской устойчивости, это ослабление не коснётся, как показывает

Теорема 2. *Если система (1) ляпуновски почти асимптотически или почти глобально устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Логическая иерархия, действующая между массивными свойствами, не только полностью распространяется на их почти массивные аналоги, но и, более того, справедлива

Теорема 3. *Если для каких-либо двух массивных свойств имеет место импликация, то она имеет место и для их почти массивных аналогов, а если какие-либо два массивных свойства несовместны, то несовместны и их почти массивные аналоги.*

Указанный в теореме 1 пример массивного свойства, неразличимого со своим почти массивным аналогом, оказывается уникальным в том смысле, который подразумевают

Теорема 4. *При $n = 2$ существует автономная линейная диагональная система (1), не обладающая ни ляпуновской, ни перроновской, ни верхнепредельной полной неустойчивостью, но почти глобально неустойчивая и ляпуновски, и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 5. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не устойчивая ни перроновски, ни верхнепредельно, но почти глобально устойчивая и перроновски, и верхнепредельно.*

Теорема 6. *При $n = 2$ существует автономная система (1), не обладающая ляпуновской асимптотической устойчивостью, но ляпуновски почти глобально устойчивая.*

Заметим, что теорема 6 распространяет на ляпуновские свойства утверждение теоремы 5 в максимально возможной степени общности – ровно в той, в какой оно не противоречит теореме 1. Множества вырождения почти массивных свойств в примерах систем из теорем 4–6 можно выбрать совпадающими с одной из координатных осей или полуосей. Примером, подтверждающим справедливость теоремы 4, служит гиперболическая нулевая особая точка автономной линейной системы (ляпуновски условно устойчивая [3, гл. IV, § 7]).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831. 5. Бондарев А.А. Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.

В. В. Малыгина (Пермь) "О некоторых признаках устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа" (15 октября 2021 г.).

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение (с интегралом Римана–Стилтьеса)

$$\dot{x}(t) + \int\limits_s^t x(\tau)\, d_\tau r(t,\tau) = f(t), \quad r(t,s) = 0, \quad t \geqslant s, \tag{1}$$

где функция $r(\,\cdot\,,\tau)\colon [s,+\infty) \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, а функция $r(t,\cdot)\colon [s,t] \to \mathbb{R}$ нестрого возрастает и имеет ограниченную локально суммируемую вариацию $\rho(t) = \operatorname*{Var}_{\tau\in[s,t]} r(t,\tau)$.

Частными случаями уравнения (1) являются обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение с запаздывающим аргументом (как сосредоточенным, так и распределённым) и интегро-дифференциальное уравнение. Уравнение (1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, а его решение представимо в виде [1, с. 84]

$$x(t) = C(t,s)x(s) + \int\limits_s^t C(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant s,$$

через функцию Коши $C(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Она является центральным объектом при изучении линейных функционально-дифференциальных уравнений, так как в терминах её свойств легко описываются все виды устойчивости для уравнения (1). Приведём ряд утверждений об асимптотическом поведении решений этого уравнения с использованием оценок функции Коши.

Обозначим $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2\colon t \geqslant s\}$ и $h(t) = \inf\{\tau\colon r(t,\tau) \neq 0\}$.

Теорема 1. *Если выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^t \rho(\tau)\, d\tau < 3/2, \tag{2}$$

то для некоторых положительных K, γ функция Коши уравнения (1) удовлетворяет оценке

$$|C(t,s)| \leqslant K e^{-\gamma \int_s^t \rho(\tau)\, d\tau}, \quad (t,s) \in \Delta.$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 1 и интеграл $\int_s^{+\infty} \rho(\tau)\, d\tau$ расходится, то уравнение (1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Если выполнено неравенство*

$$\sup_{t\geqslant 0}\int\limits_{h(t)}^{t}\rho(\tau)\,d\tau\leqslant 3/2, \tag{3}$$

то для некоторого $K>0$ *функция Коши уравнения (1) удовлетворяет оценке*

$$|C(t,s)|\leqslant K,\quad (t,s)\in\Delta.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 уравнение (1) равномерно устойчиво.*

Теоремы 1 и 2 обобщают и уточняют известный признак устойчивости (“3/2-теорему”) А.Д. Мышкиса [2]. Постоянная 3/2 в теоремах 1 и 2 является точной [2, 3]: в оценке (2) нельзя, без потери свойства асимптотической устойчивости, заменить строгое неравенство нестрогим, а в оценке (3) увеличение 3/2 на сколь угодно малую величину или даже замена точной верхней грани верхним пределом приводит к появлению у уравнения (1) неограниченных решений.

Литература. 1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991. 2. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. № 3. С. 641–658. 3. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.

В. В. Быков, **А. В. Равчеев** (Москва) “Описание линейного эффекта Перрона при сколь угодно быстро убывающих параметрических возмущениях системы с неограниченными коэффициентами” (22 октября 2021 г.).

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ показатели Ляпунова системы (1), а через $\Lambda(A)=(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A))$ – их спектр. Так как мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси, их показатели Ляпунова могут принимать, вообще говоря, несобственные значения, т.е. являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}\equiv\mathbb{R}\bigsqcup\{-\infty,+\infty\}$, которая наделяется стандартным порядком и порядковой топологией.

Обозначив через Φ множество всех непрерывных функций $\varphi:\mathbb{R}_+\to(0,+\infty)$, для системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n$, метрического пространства M и подмножества $\Psi\subset\Phi$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}_n^\Psi[A](M)$ непрерывных матриц-функций $Q\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих для любого $\psi\in\Psi$ условию

$$\lim_{t\to+\infty}(\psi(t))^{-1}\sup_{\mu\in M}\|Q(t,\mu)\|=0$$

и таких, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q,\mu)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A+Q,\mu)$ системы $A+Q$ (зависящие от параметра $\mu\in M$) не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A, т.е.

$$\lambda_k(A+Q,\mu)\geqslant\lambda_k(A),\quad k=\overline{1,n},\quad \mu\in M.$$

Отметим, что для любой системы $A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}_n^\Psi[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит тождественно нулевая матрица Q.

Ставится задача для каждых $n\in\mathbb{N}$, метрического пространства M и множества $\Psi\subset\Phi$ дать полное дескриптивно-множественное описание класса

$$\Pi\mathcal{Q}_n^\Psi(M)=\{(\Lambda(A),\Lambda(A+Q,\cdot)):A\in\widetilde{\mathcal{M}}_n,\ Q\in\mathcal{Q}_n^\Psi[A](M)\},$$

т.е. описать все пары, составленные из спектров систем A и $A+Q$, где при каждом фиксированном $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ матрица-функция Q пробегает класс $\mathcal{Q}_n^{\Psi}[A](M)$. Эту задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных систем.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty])$ замкнутого луча $[r, +\infty]$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, $(^*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи для счётного множества Ψ содержит следующая

Теорема. *Для каждых метрического пространства M, числа $n \geqslant 2$ и счётного множества $\Psi \subset \Phi$ пара (l, f), где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to (\overline{\mathbb{R}})^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n^{\Psi}(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$;

3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $\mu \in M$ и $i = \overline{1, n}$;

4) для каждого $i = \overline{1, n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.

Замечание. Эта теорема представляет собой аналог теоремы, установленной в работе [3] для класса систем с ограниченными коэффициентами.

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при условии, что каждый показатель Ляпунова возмущённой системы не меньше соответствующего показателя Ляпунова исходной системы) можно получить в классе сколь угодно быстро убывающих возмущений. Эта свойство является специфичным именно для систем с неограниченными коэффициентами, поскольку показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

Б. С. Калитин (Минск) “О проблеме Немыцкого” (29 октября 2021 г.).

Проблема Немыцкого [1] тесно связана с нахождением условий, при которых в динамической системе $(X, \mathbb{R}, \pi)$ существуют точки покоя эллиптического типа. Решение этой проблемы было получено Н.Н. Ладисом [2], обнаружившим, что в связном локально-компактном, но не компактном метрическом пространстве X не существует точек покоя эллиптического типа. В обобщённой формулировке, где вместо точки покоя изучается произвольное компактное инвариантое подмножество $M \subset X$, а вместо эллиптического типа рассматривается слабо эллиптический тип, проблема решена в [3] для локально компактной динамической системы (откуда следует и результат [2]).

Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X с метрикой d и фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$, удовлетворяющим трём аксиомам динамической системы [4, с. 14] с обозначениями: $\pi(x,t) \equiv xt$, $YT \equiv \{yt : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$ при $Y \subset X$, $T \subset \mathbb{R}$ и $B(M, \varepsilon) \equiv \{x \in X : d(M, x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $L^+(x)$ $(L^-(x))$ – ω-предельное (α-предельное) множество для точки $x \in X$, а

$$A^+(M) \equiv \{x \in X : \lim_{t \to +\infty} d(M, xt) = 0\}, \quad A^+_\omega(M) \equiv \{x \in X : \varliminf_{t \to +\infty} d(M, xt) = 0\}$$

– область притяжения и, соответственно, область слабого притяжения для M.

Определение 1 [4, с. 32]. Пусть M – замкнутое инвариантное подмножество метрического пространства X. Тогда точка $x \in X$ называется:

1) *слабо эллиптической* для M, если $L^+(x) \bigcap M \neq \varnothing$ и $L^-(x) \bigcap M \neq \varnothing$;

2) *эллиптической* для M, если $\varnothing \neq L^+(x) \subset M$ и $\varnothing \neq L^-(x) \subset M$.

Обозначив через $E(M)$ (соответственно $E_\omega(M)$) множество всех эллиптических (слабо эллиптических) для M точек $x \in X$, по определению имеем $M \subset E(M) \subset E_\omega(M)$. Будем говорить, что M – множество *эллиптического* (*слабо эллиптического*) типа, если некоторая его окрестность целиком содержится в $E(M)$ (соответственно в $E_\omega(M)$).

Компактное подмножество $M \subset X$ называется:

а) *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $B(M,\delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M,\varepsilon)$;

б) *притягивающим*, если для некоторого $\delta > 0$ при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\tau > 0$, что $B(M,\delta)[\tau,+\infty) \subset B(M,\varepsilon)$;

в) *асимптотически устойчивым*, если оно и устойчивое, и притягивающее.

Определение 2 [5, 6]. Динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ называется *асимптотически компактной* на подмножестве $W \subset X$, если для любой пары последовательностей $t_1, t_2, \ldots > 0$ и $x_1, x_2, \ldots \in W$, удовлетворяющей условиям: $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $x_n[0,t_n] \subset W$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Приведём обобщение теоремы о структуре окрестности притягивающего множества, сформулированной в [4, с. 138] для случая локально компактной динамической системы.

Теорема 1. *Если M – связное компактное притягивающее подмножество метрического пространства X, а динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ асимптотически компактна в замыкании $\overline{A^+(M)}$ его области притяжения, то множество $E_\omega(M)$ – наименьшее компактное инвариантное асимптотически устойчивое множество, содержащее M, причём*

$$A^+(E_\omega(M)) = A^+(M).$$

Решение одного обобщения проблемы Немыцкого [1; 2; 4, с. 151] содержит

Теорема 2. *Если M – связное компактное притягивающее подмножество некомпактного метрического пространства X, а динамическая система $(X,\mathbb{R},\pi)$ асимптотически компактна в замыкании $\overline{A^+(M)}$ его области притяжения, то M не является множеством слабо эллиптического типа.*

Отметим, что в идейном плане решения проблемы Немыцкого в работах [2, 3] и в теореме 2 близки друг к другу по представлению результатов.

Литература. 1. Немыцкий В.В. Топологическая классификация особых точек многомерных систем // Тез. кратких науч. сообщ. “Международный конгресс математиков”. Секция 6. М., 1966. С. 40. 2. Ладис Н.Н. Отсутствие двусторонних точек притяжения // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 6. С. 1157. 3. Калитин Б.С. О структуре окрестности слабо притягивающих компактных инвариантных множеств // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 565–574. 4. Калитин Б.С. Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Минск, 2002. 5. Ladyzhenskaya O. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge; New York, 1991. 6. Arredondo J.H., Seibert P. On a characterization of asymptotic stability // Aport. Mat. Ser. Comunicationes. 2001. V. 29. P. 11–16.

В. В. Амелькин (Минск), **В. Ю. Тыщенко** (Гродно) “Продолжимость решений неавтономных дифференциальных систем” (12 ноября 2021 г.).

Рассмотрим неавтономную систему в дифференциалах

$$dx = F(t,x)dt, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}}, \quad t = (t_1, \ldots, t_m)^{\mathrm{т}}, \tag{1}$$

где ранг матрицы (точнее, матричной функции) $F = (F_{ij}) \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{n\times m})$ почти всюду на $\mathbb{R}^{m+n}$ равен $r \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$.

Назовём *локальным решением* $(\Omega, x; t_0, x_0)$ системы (1) функцию $x \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, определённую в некоторой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0$ и $dx(t) \equiv F(t, x(t))dt$, $t \in \Omega$. В дальнейшем будем предполагать, что система (1) *вполне разрешима*, т.е. для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ существует локальное решение $(\Omega, x; t_0, x_0)$, причём любое такое решение *единственно* в смысле [1, с. 21].

График локального решения в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ назовём *локальной интегральной поверхностью*, а его проекцию на пространство $\mathbb{R}^n$ – *локальной орбитой* $\operatorname{orb}(\Omega_0, x; t_0, x_0)$. Будем говорить, что решения $(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и $(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$, а также их орбиты $\operatorname{orb}(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и

$\operatorname{orb}(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$ являются *продолжениями друг друга через область* $\Omega_0 \subset \Omega_1 \bigcap \Omega_2 (\neq \varnothing)$, если $x^1(t) = x^2(t)$, $t \in \Omega_0$. При продолжении решений через некоторую область могут появляться многозначные функции (что невозможно в случае $m = 1$): например, функция $\operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ является бесконечнозначной на области $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Назовём решения системы (1) *эквивалентными в точке* t_0, если они продолжают друг друга через некоторую окрестность этой точки. *Ростком* $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ системы (1) в точке $t_0 \in \Omega$ назовём класс эквивалентности решений этой системы по отношению к введённому понятию эквивалентности, а *непродолжаемым* решением $(\Theta, x; t_0, x_0)$, порождённым ростком $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$, назовём множество всех ростков, которые можно получить в результате продолжений ростка $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ через всевозможные области. График в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, соответствующий непродолжаемому решению, – это *непродолжаемая интегральная поверхность*, а её проекция на пространство $\mathbb{R}^n$ – *орбита* $\operatorname{orb}(x_0)$. Понятие непродолжаемого решения можно также вводить [1, с. 27; 2; 3] при помощи поглощения областей определения решений.

Для системы (1) имеет место представление

$$F(t,x) \equiv f(t,x)\nu(t,x),$$

где на всём $\mathbb{R}^{m+n}$ ранг матрицы $f \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{n\times r})$ не превосходит r, а ранг матрицы $\nu \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{r\times m})$ равен r. Заданной невырожденной всюду на $\mathbb{R}^{m+n}$ матрице $\mu \in \in C^2(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{r\times r})$ и системе (1) поставим в соответствие неавтономную обыкновенную дифференциальную систему (при $r = 1$) или вполне разрешимую неавтономную систему в дифференциалах (при $r > 1$)

$$dx = f(\xi, x)\mu(\xi, x)d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)^{\text{т}} \tag{2}$$

и рассмотрим задачу: найти условия существования такой матрицы μ, что у системы (2) все решения определены на пространстве $\mathbb{R}^r$.

Системе (2) поставим в соответствие *вспомогательную* автономную систему в дифференциалах

$$d\begin{pmatrix}\xi\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ f(\xi,x)\mu(\xi,x)\end{pmatrix} d\zeta, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)^{\text{т}}, \tag{3}$$

где I_r – единичная матрица порядка r. Система (3) получена из системы (2) с помощью замены $\xi = \zeta + C$, где $C = (C_1, \ldots, C_r)^{\text{т}}$ – вектор, состоящий из произвольных постоянных, на основании чего приходим к выводу, что система (3) также является вполне разрешимой.

Невырожденную матрицу μ назовём *допустимой*, если автономная система уравнений в дифференциалах (2) является вполне разрешимой. Будем говорить, что вполне разрешимая неавтономная система уравнений в дифференциалах (1) *приводима*, если существует допустимая матрица μ, приводящая систему (1) к автономной системе (3), все решения которой определены на пространстве $\mathbb{R}^r$.

Теорема 1. *При* $r = 1$ *любая вполне разрешимая система (1) приводима.*

Следствие. *Любая обыкновенная дифференциальная система (1) приводима.*

Вполне разрешимую автономную систему в дифференциалах

$$dy = G(y)\,d\theta$$

с матрицей $G \in C^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p\times r})$ ранга r почти везде на $\mathbb{R}^p$ при $p > r > 1$ назовём *выпрямляемой*, если существует 2-диффеоморфизм $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, переводящий каждую орбиту этой системы в одну из r-мерных плоскостей семейства $y_k = C_k$, $k = \overline{1, p-r}$.

Теорема 2. *Вполне разрешимая система (1) приводима тогда и только тогда, когда вспомогательная автономная вполне разрешимая система*

$$d\begin{pmatrix}\xi\\ x\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ f(\xi,x)\mu(\xi,x) \\ I_r\end{pmatrix} d\tau, \quad \tau = \begin{pmatrix}\tau_1\\ \vdots \\ \tau_r\end{pmatrix}$$

выпрямляема.

Литература. 1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004. 2. Мышкис А.Д. О продолжении решений уравнений Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1331–1337. 3. Сергеев И.Н. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений до непродолжаемого // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 847–848.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “О свойствах управляющей функции в экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения” (19 ноября 2021 г.).

Рассмотрим смешанную задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + d(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T \equiv (0,1) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \quad u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где a, b, d – достаточно гладкие в замыкании $\overline{Q}_T$ функции, $0 < a_0 \leqslant a(x,t) \leqslant a_1 < +\infty$, $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$. Для заданной точки $x_0 \in (0,1]$ и фиксированных ξ, ψ изучаем задачу управления с точечным наблюдением (возникающую в модели управления климатом в промышленных теплицах [1, 2]): управляя температурой $\varphi(t)$, сделать температуру $u(x_0,t)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0,T)$.

Постановки экстремальных задач для параболических уравнений можно найти в [3, 4], причём наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. В докладе, в развитие работ [1, 2, 5–8], исследуется более общее уравнение с переменным коэффициентом диффузии a, коэффициентом конвекции b и потенциалом d.

Обозначим через $V_2^{1,0}(Q_T)$ [9, с. 15] банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, для которых норма

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}$$

конечна и отображение $t \mapsto u(\,\cdot\,,t)$ из $[0,T]$ в $L_2(0,1)$ непрерывно, а через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество тех функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, для которых $\eta(\,\cdot\,,T) = \eta(0,\cdot\,) = 0$.

Определение. *Слабым* решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,) = \varphi$ и при всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (au_x\eta_x - bu_x\eta - du\eta - u\eta_t)\,dx\,dt = \int\limits_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [10, 11]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)})$$

с некоторой постоянной C_1, *не зависящей от* φ, ψ, ξ.

Теорема 2 (принцип максимума). *Если* $u = u_j$, $j = 1,2$, *– решения задачи (1), (2) при* $\varphi = \varphi_j$, $\psi = \psi_j$ *и* $\xi = \xi_j$, *причём* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ *и* $\xi_1 \leqslant \xi_2$, *то* $u_1 \leqslant u_2$.

С использованием теоремы 2 получена оценка сверху нормы решения задачи (1).

Теорема 3. *Если* $\varphi, \psi, \xi, a_t, b_x - d \geqslant 0 \geqslant b(1,\cdot\,)$ *и* $b(x,t) \geqslant 0$ *при* $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$, *то для решения задачи (1), (2) имеет место неравенство*

$$\|u(x_0,\cdot\,)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + C_2x_0(\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})$$

с некоторой постоянной C_2, *не зависящей от* φ, ψ, ξ.

Следствие. *В условиях теоремы 3 при* $\psi = \xi = 0$ *для решения задачи (1), (2) выполняется неравенство* $\|u(x_0,\cdot\,)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)}$.

Обозначим через $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ множество управляющих функций φ, которое будем далее считать непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а через $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим квадратичный функционал качества

$$J[z,\varphi] = \int\limits_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2\,dt, \quad x_0 \in (0,1), \quad z \in Z, \quad \varphi \in \Phi,$$

где $u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – решение задачи (1), (2) с данной управляющей функцией φ. Фиксировав функцию z, рассмотрим задачу минимизации функционала J: $m[z,\Phi] \equiv \inf\limits_{\varphi\in\Phi} J[z,\varphi]$.

Теорема 4 [8, 10, 11]. *Для любой* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой* $m[z,\Phi] = J[z,\varphi_0]$.

Из теоремы 3 следует оценка снизу нормы управляющей функции.

Теорема 5. *В условиях теоремы 3 имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \max\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \sqrt{TJ[z,\varphi]} - C_2x_0(\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})\},$$

где C_2 *– постоянная из теоремы 3.*

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204. 2. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math. 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8. 3. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 4. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 5. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределённым по времени функционалом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 53. № 6. С. 851–853. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 7. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 10. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157. 11. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 828–829.

Т. А. Корчёмкина (Москва) “О качественном поведении решений уравнений третьего порядка с положительным потенциалом и степенной нелинейностью общего вида” (26 ноября 2021 г.).

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''' + p_0|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\operatorname{sgn}(yy'y'') = 0, \quad p_0, k_0, k_1, k_2 > 0. \tag{1}$$

В случае $1 \ne k_0 > 0 = k_1 = k_2$ асимптотическое поведение решений уравнения (1) изучалось в работах [1, гл. 5–7] и [2]. Свойства решений уравнений высокого порядка, нелинейных относительно производных, исследовались в работах [3, 4], а нелинейных относительно y – в монографии [5, гл. 4]. В работе [6] рассматривался случай $p_0 < 0$.

Поведение решений уравнения (1) с положительными начальными данными вблизи правой границы области определения решения описывает

Теорема. *Если $y(x)$ – максимально продолженное вправо решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0) > 0$, то:*

1) если $0 < k_2 < 1$, то $y(x), y'(x) \to \mathrm{const}$, $y''(x) \to 0$ при $x \to x^* - 0$ для некоторого $x^* < +\infty$;

2) если $1 < k_2 < 2$, то $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to \mathrm{const}$, $y''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

3) если $2 < k_2 < 2 + k_0$, то $y(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$ и $y'(x) \to \mathrm{const}$ или $y'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

4) если $k_2 > 2 + k_0$, то $y(x), y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-90168).

Литература. 1. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. С. 22–288. 2. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, 2016. V. 164. P. 191–204. 3. Евтухов В.М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 145. № 2. С. 269–273. 4. Евтухов В.М., Клопот А.М. Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65. № 3. С. 354–380. 5. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990. 6. Korchemkina T. On the behavior of solutions with positive initial data to third order differential equations with general power-law // Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. QUALITDE–2019, December 7–9. Tbilisi, Georgia, 2019. P. 112–117.

О. Д. Прокопенко (Москва) “О некоторых свойствах решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера с неограниченным потенциалом” (26 ноября 2021 г.).

Рассматриваются решения $y \in C^2(0, +\infty)$ дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера

$$y'' = x^k |y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy'), \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad n, m > 0. \tag{1}$$

Для уравнения

$$y'' = p(x, y, y') |y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy'), \quad n, m > 0, \tag{2}$$

где $p = p(x, u, v) > 0$ непрерывна по x и липшицева по u, v, в [1] изучен вопрос о локальной единственности решения задачи Коши. Для уравнения (2) с ограниченной и отделённой от нуля функцией p в [2] приведены результаты о качественном поведении решений в зависимости от показателей нелинейности n, m и в [3] найдена асимптотика решений, неограниченных вблизи границ их области определения.

С использованием результатов [1] и методов [4, 5] доказана

Теорема. *Если $n + m - 1 > 0$, то при $k + n + 1 < 0$ все положительные возрастающие решения уравнения (1) представимы в виде*

$$y(x) = Cx^\alpha (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 1,$$

а при $k - m + 2 > 0$ все отрицательные решения уравнения (1), стремящиеся к $-\infty$ при $x \to +0$, представимы в виде

$$y(x) = -Cx^\alpha (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to +0, \quad \alpha < 0,$$

где обозначено

$$\alpha = -\frac{k - m + 2}{m + n - 1}, \quad C = (|\alpha|^{1-m} |\alpha - 1|)^{1/(m+n-1)}.$$

Замечание. Теорема дополняет результаты работы [6], в которой для уравнения (1) в частном случае доказано существование положительных неограниченно возрастающих на бесконечности решений с заданной асимптотикой.

Литература. 1. Асташова И.В. Единственность решений уравнений второго порядка типа Эмдена–Фаулера // Проблемы мат. анализа. 2021. Т. 109. С. 11–16. 2. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second–order differential equation with general power–law nonlinearity // Mem. on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 73. P. 101–111. 3. Корчемкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 239–256. 4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 5. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. 2008. Т. 72. № 6. С. 103–124. 6. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078.

И. В. Асташова (Москва) “Замечание о непрерывной зависимости решений уравнения Риккати от правой части” (3 декабря 2021 г.).

Для числа $T>0$, функции $K\in C[0,T]$ и произвольного начального значения $u_0\in\mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Риккати

$$\dot u+u^2+K(t)=0,\quad u(0)=u_0 \tag{1}$$

и задачу Коши с тем же начальным условием для возмущённого уравнения

$$\dot v+v^2+K(t)+Q(t)=0,\quad v(0)=u_0,\quad Q\in C[0,T]. \tag{2}$$

Зададимся вопросом: верно ли, что если решение задачи (1) существует на отрезке $[0,T]$, то на этом же отрезке существует и решение задачи (2) при малом возмущении Q? Вопрос сформулирован недостаточно строго и, оказывается, допускает противоположные ответы при разных трактовках.

С одной стороны, имеет место следующий результат, уточняющий для рассматриваемого уравнения классическую теорему о непрерывной зависимости решения от правой части и начальных условий (см., например, теорему 6 из [1, § 7]).

Теорема 1. *Если решение $u(\cdot)$ задачи (1) определено на отрезке $[0,T]$, то для любой функции $Q\in C[0,T]$, удовлетворяющей условию*

$$|Q(t)|<\varepsilon=\left(4\int_0^T\exp\left(-2\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)dt\int_0^T\exp\left(2\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)dt\right)^{-1},\quad t\in[0,T],$$

решение задачи (2) также определено на всём отрезке $[0,T]$.

С другой стороны, если в формулировке теоремы 1 значение $\varepsilon>0$ заменить каким-либо другим значением, единым для всех решений u, то получившееся утверждение будет неверным.

Теорема 2. *При $T=\pi/2$ и $K(t)\equiv 1$ для любого $\varepsilon>0$ существует такое u_0, что решение задачи (1) определено на отрезке $[0,T]$, а решение задачи (2) при $Q(t)\equiv\varepsilon/2<\varepsilon$ определено не на всём отрезке $[0,T]$.*

Отметим также, что утверждение теоремы 1 станет неверным, если в нём отрезок $[0,T]$ заменить полуинтервалом $[0,T)$.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2007.