ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1589–1598

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4+517.927.25

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2021 г. Д. В. Валовик, Г. В. Чалышов

Предложен новый подход к изучению нелинейных по спектральному параметру задач Штурма–Лиувилля. Он основывается на введении связанной с изучаемой задачей трансцендентной функции, названной интегральной характеристической функцией и определяющей собственные значения рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля. Исследование этой функции позволяет доказать разрешимость задачи, найти асимптотику собственных значений, получить теоремы сравнения, ввести естественную нумерацию собственных значений и нулей собственных функций. С помощью предложенного подхода изучена нелинейная задача Штурма–Лиувилля на отрезке с краевыми условиями первого рода.

DOI: 10.31857/S0374064121120013

1. Постановка задачи и вводные замечания. Рассмотрим уравнение

$$(P(x,\lambda)y'(x))' + Q(x,\lambda)y(x) = 0, \tag{1.1}$$

где λ – спектральный параметр $\lambda \in \Lambda := [b, +\infty)$, b – вещественная постоянная, $\bar{\mathrm{x}} = [0, a]$, $1 < a < \infty$. Функции P и Q предполагаются непрерывными по совокупности переменных $(x,\lambda) \in \bar{\mathrm{x}} \times \Lambda$, а P ещё и однократно непрерывно дифференцируемой по x при $x \in \bar{\mathrm{x}}$; кроме того $P(x,\lambda) > 0$ и $Q(x,\lambda) > 0$ при $(x,\lambda) \in \bar{\mathrm{x}} \times \Lambda$.

Задачей $\mathcal{P}$ назовём задачу определения тех (собственных) значений параметра λ, при которых существует нетривиальное классическое решение $y \equiv y(x;\lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0;\lambda) = 0, \quad y(1;\lambda) = 0. \tag{1.2}$$

При изучении разрешимости задачи $\mathcal{P}$ будут введены дополнительные ограничения (по второму аргументу), которым должны удовлетворять функции P и Q (см. п. 2.2). Отметим, что в рамках излагаемого ниже подхода можно изучать задачу $\mathcal{P}$ и в том случае, когда аргумент λ коэффициентов P и Q принадлежит ограниченному множеству, а сами коэффициенты не обязательно всюду непрерывны по λ. Также можно рассмотреть случай, когда функции P и/или Q обращаются в нуль в некоторых точках своей области определения.

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения (1.1) изучалась многими авторами, укажем здесь работы [1–6]. Отметим, что в нашем рассмотрении условия на коэффициенты P и Q уравнения являются менее ограничительными, чем используемые в [1].

Задачи Штурма–Лиувилля, коэффициенты или краевые условия в которых зависят от спектрального параметра, в том числе нелинейно, возникают в различных вопросах как чистой, так и прикладной математики и поэтому активно исследуются (см., например, работы [2, 7–17] и приведённую в них библиографию). Интерес для исследователей представляют свойства собственных значений и собственных функций, в частности, вопросы, связанные с базисностью собственных функций [6, 18–20] таких задач.

Один из способов исследования задачи Штурма–Лиувилля основывается на изучении отвечающей ей характеристической функции, которая определяется следующим образом. Рассмотрим семейство тех решений уравнения (1.1), для которых выполняется только условие задачи Штурма–Лиувилля при $x = 0$. Обозначим это семейство снова через $y(x;\lambda)$, не отмечая его зависимости ещё от одного вещественного параметра – значения производной решения при $x = 0$. Тогда, требуя, чтобы для решений этого семейства выполнялось ещё и условие задачи Штурма–Лиувилля при $x = 1$, получаем уравнение $y(1;\lambda) = 0$ относительно спектрального параметра λ; очевидно, что множество нулей этого уравнения совпадает с множеством собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Такое уравнение в теории задач Штурма–Лиувилля называется *характеристическим уравнением*, а его левая часть – *характеристической функцией* (параметра λ) [21, с. 31].

В настоящей работе мы также используем для уравнения (1.1) решение $y(x;\lambda)$ вспомогательной задачи Коши (см. задачу (2.2) ниже) для построения функции относительно спектрального параметра λ, нули которой и только они являются собственными значениями исследуемой задачи Штурма–Лиувилля. Другими словами, построенная таким образом функция имеет смысл характеристической функции. В связи с тем, что она задаётся в виде интеграла от некоторого выражения, её естественно называть *интегральной характеристической функцией* (ИХФ). Приравняв к нулю ИХФ, получаем уравнение относительно λ, которое будем называть *интегральным характеристическим уравнением* (ИХУ). Оказывается, что с помощью элементарных оценок можно получить результаты о разрешимости ИХУ, а следовательно, и результаты о разрешимости исследуемой задачи и свойствах собственных значений и собственных функций. Подчеркнём, что предлагаемый здесь подход, по-видимому, является новым, в частности, в нём не используется ни анализ функции Грина [16], ни теория целых функций, которая обычно применяется для исследования характеристической функции $y(1;\lambda)$ [21, 22].

2. Основные результаты. Собственные значения задачи $\mathcal{P}$ будем обозначать как $\widetilde{\lambda}_n$, так и $\widetilde{\lambda}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$ – индекс, равный числу нулей соответствующей собственной функции $y \equiv \equiv y(x;\widetilde{\lambda}_n)$ при $x \in (0,1)$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$ предполагаются упорядоченными по возрастанию.

Из свойств функций $P(x,\lambda)$ и $Q(x,\lambda)$ следует, что

$$0 < p_-(\lambda) \leqslant P(x,\lambda) \leqslant p_+(\lambda), \quad 0 < q_-(\lambda) \leqslant Q(x,\lambda) \leqslant q_+(\lambda), \tag{2.1}$$

где

$$p_-(\lambda) = \min_{x\in\bar{\mathrm{x}}} P(x,\lambda), \quad q_-(\lambda) = \min_{x\in\bar{\mathrm{x}}} Q(x,\lambda) \quad \text{и} \quad p_+(\lambda) = \max_{x\in\bar{\mathrm{x}}} P(x,\lambda), \quad q_+(\lambda) = \max_{x\in\bar{\mathrm{x}}} Q(x,\lambda).$$

Обозначим через $y \equiv y(x;\lambda)$, где $x \in \bar{\mathrm{x}}$, решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными данными

$$y(0;\lambda) = 0, \quad y'(0;\lambda) = 1. \tag{2.2}$$

Известно, что задача Коши (1.1), (2.2) глобально однозначно разрешима [22, с. 12; 23, с. 62].

2.1. Интегральное характеристическое уравнение задачи $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Пусть при некотором $\lambda \in \Lambda$ решение $y \equiv y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) имеет ровно $n+1$ нуль $x_1,\ldots,x_{n+1} \in \mathrm{x}$, где $\mathrm{x} = (0,a]$, и $0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant a$. Число n и точки x_i, вообще говоря, зависят от λ. Так как $y(x;\lambda) \not\equiv 0$, то $y'(x_i;\lambda) \neq 0$ при $i = \overline{0,n+1}$, где $x_0 = 0$.

Пусть $\mathrm{x}_i := (x_i, x_{i+1})$, где $i = \overline{0,n}$, а $x_0 = 0$. При $x \in \bigcup_{i=0}^n \mathrm{x}_i$ существует и непрерывна функция

$$\eta(x;\lambda) = \frac{P(x,\lambda)y'(x;\lambda)}{y(x;\lambda)}.$$

Принимая во внимание уравнение (1.1), несложно убедиться, что для функции η имеет место равенство

$$\eta' = -w(\eta,x;\lambda), \tag{2.3}$$

в котором $w(\eta,x;\lambda) = Q(x,\lambda) + \eta^2/P(x,\lambda)$ при $x \in \bigcup_{i=0}^n \mathrm{x}_i$.

Замечание. Равенство (2.3) представляет собой относительно η уравнение Риккати, которое часто используется в теории задач Штурма–Лиувилля [23, с. 392; 24, с. 243] (см. также [1, с. 193]).

Из условий $P(x,\lambda) > 0$, $Q(x,\lambda) > 0$ при $(x,\lambda) \in \bar{\mathrm{x}} \times \Lambda$ вытекает неравенство

$$w(x,\eta;\lambda) > 0 \tag{2.4}$$

при $(x,\eta,\lambda) \in \bar{\mathrm{x}} \times \mathbb{R} \times \Lambda$.

Из соотношений (2.3) и (2.4) следует, что $\eta' < 0$, а значит, функция $\eta \equiv \eta(x;\lambda)$, определённая при $x \in \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{x}_i$, монотонно убывает на каждом интервале x_i. Тогда очевидно, что

$$\lim_{x\to x_0+0} \eta(x;\lambda) = +\infty; \quad \lim_{x\to x_i\pm 0} \eta(x;\lambda) = \pm\infty, \quad i=\overline{1,n}; \quad \lim_{x\to x_{n+1}-0} \eta(x;\lambda) = -\infty. \tag{2.5}$$

Отсюда вытекает, что существуют непрерывные биекции $g_i : \mathbb{R} \to \mathrm{x}_i$ $(\eta \mapsto x)$ при $i = \overline{0,n}$ (рисунок). Другими словами, определены положительные монотонно убывающие непрерывные функции $x = g_i(\eta;\lambda)$, где $\eta \in \mathbb{R}$, а $x \in \mathrm{x}_i$. Отметим, что последнее соотношение в (2.5) имеет место только при условии, что рассматриваемое решение $y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) обращается в нуль при $x = x_{n+1}$. Если это не так, то, во-первых, указанный предел является некоторой функцией от λ (которая обращается в $-\infty$, когда $y(x;\lambda)|_{x=x_{n+1}} = 0$), а во-вторых, область определения отображения g_n, вообще говоря, отлична от $\mathbb{R}$ (и совпадает с $\mathbb{R}$, когда $y(x;\lambda)|_{x=x_{n+1}} = 0$).

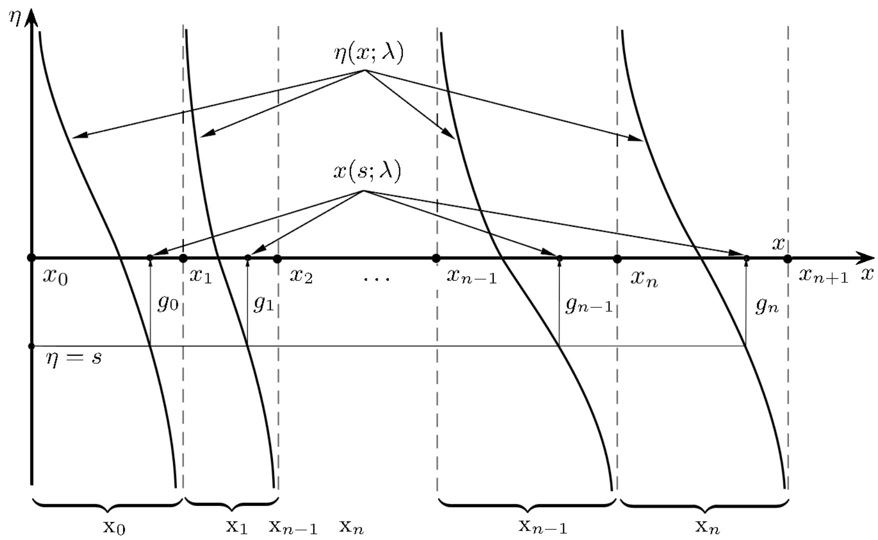

Рисунок. Функция $\eta(x;\lambda)$ и отображения g_i.

Проведённые рассуждения позволяют для каждого $i = \overline{0,n}$ корректно определить выражение

$$T_i(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)}, \tag{2.6}$$

где $\varsigma_i(v;\lambda) = Q(g_i(v;\lambda);\lambda) + v^2/P(g_i(v;\lambda);\lambda)$ при $v \in \mathbb{R}$. Сразу отметим, что функция $T_i(\lambda)$ определена только для тех λ, при которых решение $y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) имеет не менее $i+2$ нулей в $\bar{\mathrm{x}}$ (множество таких λ обозначим через Λ_i). Если указанное выше решение $y(x;\lambda)$ обращается в нуль в $\bar{\mathrm{x}}$ меньше, чем $i+2$ раз, то функция $T_i(\lambda)$ не определена.

Зададим функцию

$$\Phi(\lambda;n) := \sum_{i=0}^{n} T_i(\lambda). \tag{2.7}$$

Как отмечено выше, областью определения функции Φ является множество $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}_+}(\Lambda_j \times \{j\})$.

Важнейшим результатом является

Теорема 1 (об эквивалентности). *Число $\widetilde{\lambda} \in \Lambda$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$, если и только если найдётся $\widetilde{n} \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\lambda = \widetilde{\lambda}$ при $n = \widetilde{n}$ удовлетворяет уравнению*

$$\Phi(\lambda;n) - 1 = 0. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) представляет собой семейство уравнений относительно λ при различных $n = 0, 1, \ldots;$ также (2.8) можно трактовать как одно уравнение (относительно λ), зависящее от параметра n. Уравнение (2.8) назовём ИХУ задачи $\mathcal{P}$, а функцию $\Phi(\lambda; n) - 1$ – ИХФ этой задачи.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\lambda = \widetilde{\lambda}$ – решение уравнения (2.8) при $n = \widetilde{n}$. Тогда при $\lambda = \widetilde{\lambda}$ решение $y \equiv y(x; \widetilde{\lambda})$ задачи Коши (1.1), (2.2) удовлетворяет краевым условиям (1.2) и имеет $\widetilde{n}+2$ простых (кратности 1) нуля $x_j \in [0, 1]$, $j = \overline{0, \widetilde{n}+1}$.*

Если $\widetilde{n} \geqslant 1$, то $x_j = \Phi(\widetilde{\lambda}; j-1)$, где $1 \leqslant j \leqslant \widetilde{n}$.

Отсюда получаем, что расстояние между двумя последовательными нулями x_i и x_{i+1} собственной функции $y(x; \widetilde{\lambda})$ определяется формулой

$$x_{i+1} - x_i = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \widetilde{\lambda})}.$$

Вопрос о нахождении верхней и нижней оценок расстояния между последовательными нулями решения уравнения второго порядка является классическим [25, с. 122, 138]. Верхняя и нижняя оценки для приведённого выше интеграла $\int_{\mathbb{R}}$ являются соответственно верхней и нижней оценками для указанного расстояния, которые согласуются с известным результатом из монографии [25, с. 138].

Введённое выше обозначение $\widetilde{\lambda}_n$ для собственных значений задачи $\mathcal{P}$ связывает номер n собственного значения $\widetilde{\lambda}_n$ с числом нулей соответствующей собственной функции $y_n \equiv \equiv y(x; \widetilde{\lambda}_n)$, лежащих внутри интервала $\mathrm{x} = (0, 1)$. Другими словами, индекс n в обозначении собственного значения $\widetilde{\lambda}_n$ означает, что пара $(\widetilde{\lambda}_n, n)$ является решением уравнения (2.8). Заметим, что поскольку уравнение (2.8) содержит $n+1$ слагаемое, то очевидно, что оценки для $\widetilde{\lambda}_n$ будут выражаться через функции от $(n+1)$-го аргумента; приведение таких оценок к стандартному виду, когда оценка для $\widetilde{\lambda}_n$ выражается через функцию от аргумента n, достижимо при изменении нумерации.

Если уравнение (2.8) при одном и том же значении $n = \widetilde{n}$ имеет $k > 1$ различных решений $\lambda = \widetilde{\lambda}$, то во избежание путаницы достаточно эти решения снабдить ещё одним индексом, например, $\widetilde{\lambda}_{\widetilde{n},1}, \ \ldots, \ \widetilde{\lambda}_{\widetilde{n},k}$, где для определённости перечисленные решения упорядочены по возрастанию. В дальнейшем мы не будем акцентировать на этом внимание.

Так как линейное уравнение (1.1) при данном λ имеет не более двух линейно независимых решений, то отсюда следует, что совокупность всех собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, является конечномерным векторным пространством размерности, не большей двух. Размерность этого пространства совпадает с наибольшим числом линейно независимых решений краевой задачи (1.1), (1.2) при данном собственном значении $\lambda = \widetilde{\lambda}$; это число называется *кратностью* собственного значения [22], а собственное значение кратности 1 – *простым собственным значениемы.*

Справедливо

Утверждение 1. *Всякое собственное значение $\widetilde{\lambda}$ задачи $\mathcal{P}$ является простым.*

Полезным будет

Утверждение 2. *Если функция $T_i(\lambda)$ определена, то она является положительной и непрерывно зависит от $\lambda \in \Lambda_i$.*

Разрешимость уравнения (2.8) позволяет сформулировать

Утверждение 3. *Для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ при $\lambda \in \Lambda_i \neq \varnothing$ справедливы оценки*

$$\pi \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leqslant T_i(\lambda) \leqslant \pi \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}. \tag{2.9}$$

Из утверждения 3 и определения (2.7) элементарно вытекает

Следствие 2. *Для* $\lambda \in \Lambda_n \neq \varnothing$ *имеет место двусторонняя оценка*

$$\pi(n+1)\frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leqslant \Phi(\lambda; n) \leqslant \pi(n+1)\frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}. \tag{2.10}$$

Оценки (2.9) и (2.10) являются основным инструментом при исследовании разрешимости уравнения (2.8) и доказательстве существования собственных значений задачи $\mathcal{P}$.

2.2. Существование собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Чтобы получить содержательные результаты о разрешимости уравнения (2.8), а следовательно, и задачи $\mathcal{P}$, необходимо наложить дополнительные ограничения на функции P и Q. Естественно получить условия, из которых будет следовать существование бесконечного числа собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Некоторые из возможных условий такого рода указаны в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. *Если*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = 0, \tag{2.11}$$

то найдётся такое $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *что уравнение (2.8) имеет не меньше одного решения* $\lambda = \widetilde{\lambda}_n \in \Lambda$ *для каждого* $n = n_0, n_0+1, \ldots;$ *при этом* $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\lambda}_n = +\infty$ *и* Λ_i *являются неограниченными множествами для всех* $i \in \mathbb{Z}_+$.

Из теоремы 2 очевидно вытекает

Следствие 3 (теорема I о разрешимости). *Если выполняется условие (2.11), то задача* $\mathcal{P}$ *имеет бесконечное число собственных значений* $\widetilde{\lambda}_n$ *с точкой накопления на бесконечности.*

Теорема 3. *Пусть для достаточно больших* λ *справедливы оценки*

$$\frac{p_-(\lambda)}{q_+(\lambda)} = O(\lambda^{-2c_1}) \quad \text{и} \quad \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = O(\lambda^{-2c_2}), \tag{2.12}$$

где c_1, c_2 – *положительные вещественные постоянные,* $c_1 \geqslant c_2$, *и без потери общности предполагается, что коэффициенты первых членов асимптотик в (2.12) равны единице. Тогда найдётся такое* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *что уравнение (2.8) имеет не меньше одного решения* $\lambda = \widetilde{\lambda} \in \Lambda$ *для каждого* $n = n_0, n_0+1, \ldots$ *и для достаточно больших* λ *справедливы неравенства*

$$(\pi n)^{1/c_1} - \Delta \leqslant \widetilde{\lambda}_{n-1} \leqslant (\pi n)^{1/c_2} + \Delta, \tag{2.13}$$

где $\Delta > 0$ – *постоянная. Если же* $c_1 = c_2 = c > 0$, *то*

$$\widetilde{\lambda}_{n-1} = O(n^{1/c}), \tag{2.14}$$

где коэффициент при главном члене асимптотики (2.14) равен $\pi^{1/c}$.

В силу теорем 2 и 3 получаем

Следствие 4 (теорема II о разрешимости). *Если выполняются условия (2.11) и (2.12), то задача* $\mathcal{P}$ *имеет бесконечное число собственных значений* $\widetilde{\lambda}_n$ *с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров* n *справедливы оценка (2.13) и, если* $c_1 = c_2 = c > 0$, *оценка (2.14).*

Исследование асимптотического поведения собственных значений задачи Штурма–Лиувилля является классической задачей спектральной теории (см., например, [1, с. 204; 21, с. 35; 22, с. 52; 26 с. 12]). Следствие 4 содержит результат об асимптотическом поведении собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Техника получения оценок (2.13) и (2.14) позволяет устанавливать аналогичные оценки и в случае других свойств функций P и Q.

2.3. Сравнение собственных значений задач типа $\mathcal{P}$. Рассмотрим две задачи типа $\mathcal{P}$, которые обозначим $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$. Все величины, входящие в постановку этих задач, имеют те же свойства, что и аналогичные величины в задаче $\mathcal{P}$ (см. п. 1); буквенные обозначения используемых величин те же, что и в задаче $\mathcal{P}$, но дополнены верхним индексом 1 или 2 соответственно.

Итак, пусть $\Phi^1(\lambda;n)-1=0$ и $\Phi^2(\lambda;m)-1=0$ – ИХУ задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно. Как и в п. 2, обозначим

$$p^i_+(\lambda)=\max_{x\in\bar{\mathrm{x}}}P^i(x,\lambda),\quad q^i_-(\lambda)=\min_{x\in\bar{\mathrm{x}}}Q^i(x,\lambda),\quad i=1,2,$$

$$p^i_-(\lambda)=\min_{x\in\bar{\mathrm{x}}}P^i(x,\lambda),\quad q^i_+(\lambda)=\max_{x\in\bar{\mathrm{x}}}Q^i(x,\lambda),\quad i=1,2,$$

где P^1, Q^1 и P^2, Q^2 – коэффициенты задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{p^1_+(\lambda)}{q^1_-(\lambda)}=0\quad \textit{и}\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{p^2_+(\lambda)}{q^2_-(\lambda)}=0 \tag{2.15}$$

и, кроме того, при больших λ справедливо неравенство

$$\frac{p^1_+(\lambda)}{q^1_-(\lambda)}\leqslant\frac{p^2_-(\lambda)}{q^2_+(\lambda)}. \tag{2.16}$$

Тогда каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda;n)-1=0$ и $\Phi^2(\lambda;m)-1=0$ имеет бесконечное число решений $\widetilde{\lambda}^1_{n^1_0}$, $\widetilde{\lambda}^1_{n^1_0+1}$, … и $\widetilde{\lambda}^2_{n^2_0}$, $\widetilde{\lambda}^2_{n^2_0+1}$, … соответственно, где n^1_0 и n^2_0 – некоторые целые неотрицательные числа; при этом для достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$\widetilde{\lambda}^1_n\leqslant\widetilde{\lambda}^2_n, \tag{2.17}$$

которое переходит в строгое неравенство, если неравенство (2.16) строгое.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 5 (теорема сравнения). *Если выполнены условия теоремы 4, то каждая из задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ имеет бесконечное число собственных значений $\{\widetilde{\lambda}^1_n\}^{+\infty}_{n=n^1_0}$ и $\{\widetilde{\lambda}^2_n\}^{+\infty}_{n=n^2_0}$; при этом для всех достаточно больших номеров n собственные значения $\widetilde{\lambda}^1_n$ задачи $\mathcal{P}^1$ и $\widetilde{\lambda}^2_n$ задачи $\mathcal{P}^2$ удовлетворяют неравенству (2.17), которое переходит в строгое неравенство, если неравенство (2.16) является строгим.*

3. Доказательства.

3.1. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть число λ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$, т.е. решение $y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) является собственной функцией задачи $\mathcal{P}$. Пусть это решение имеет n нулей x_1, …, x_n на интервале $(0,1)$. По решению $y(x;\lambda)$ построим, как в п. 2.1, функцию $\eta=\eta(x;\lambda)$, определённую на $\bigcup_{i=0}^n\mathrm{x}_i$.

Используя отображения g_i и заданные с их помощью непрерывные при $\eta\in\mathbb{R}$ функции $P(g_i(\eta;\lambda);\lambda)$ и $Q(g_i(\eta;\lambda);\lambda)$, заключаем, что функция $\eta=\eta(x;\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta'=-\varsigma_i(\eta;\lambda), \tag{3.1}$$

правая часть которого определена после равенства (2.6).

Очевидно, что справедливы соотношения

$$\eta(x_j\pm0;\lambda)=\pm\infty,\quad j=\overline{0,n+1}. \tag{3.2}$$

Интегрируя автономное уравнение (3.1) на интервале x_i, где $i=\overline{0,n}$, и учитывая, что функция $\eta=\eta(x;\lambda)$ является решением этого уравнения, получаем равенство

$$-\int\limits_\alpha^\beta\frac{d\eta(x;\lambda)}{\varsigma_i\big(\eta(x;\lambda);\lambda\big)}=\int\limits_\alpha^\beta dx, \tag{3.3}$$

справедливое для любых $\alpha, \beta \in \text{x}_i$. Сделав в определённом интеграле в левой части равенства (3.3) замену переменной $v = \eta(x;\lambda)$, будем иметь

$$-\int\limits_{\eta(\alpha;\lambda)}^{\eta(\beta;\lambda)} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)} = \beta - \alpha.$$

Устремляя в этом равенстве α к $x_i + 0$ и β к $x_{i+1} - 0$, получаем, учитывая соотношения (3.2), равенство

$$-\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)} = x_{i+1} - x_i, \tag{3.4}$$

где $i = \overline{0, n}$. Так как правые части равенств (3.4) конечны, то конечны и их левые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов. Почленно суммируя равенства (3.4) по $i = \overline{0, n}$, приходим к соотношению

$$\Phi(\lambda; n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)} = x_{n+1}. \tag{3.5}$$

Так как $y(x;\lambda)$ – собственная функция задачи $\mathcal{P}$, то в рассматриваемом случае $x_{n+1} = 1$, а следовательно, $\Phi(\lambda; n) - 1 = 0$. Заметим, что в общем случае, т.е. когда решение $y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) не обязательно является собственной функцией задачи $\mathcal{P}$, $x_{n+1} \leqslant a$.

Из проведённых рассуждений следует, что всякое решение (собственное значение) задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению (2.8) при некотором $n = \widetilde{n}$.

Достаточность. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – решение уравнения (2.8) при $n = \widetilde{n}$. Так как имеет место равенство $\Phi(\widetilde{\lambda}; n) - 1 = 0$, то это означает, что в силу (3.5) решение $y(x;\widetilde{\lambda})$ задачи Коши (1.1), (2.2) удовлетворяет равенству $y(1;\widetilde{\lambda}) = 0$ и что число нулей функции $y(x;\widetilde{\lambda})$ на интервале $(0,1)$ равно в точности $\widetilde{n}$. Равенство $y(1;\widetilde{\lambda}) = 0$ для решения задачи Коши (1.1), (2.2) равносильно тому, что $\widetilde{\lambda}$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}$. Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство следствия 1. То, что функция $y(x;\widetilde{\lambda})$ удовлетворяет краевым условиям (1.2), следует из доказательства теоремы 1.

Если $y(x_i;\lambda) = y'(x_i;\lambda) = 0$, то $y(x;\lambda) \equiv 0$, а это противоречит условию $y'(0;\lambda) = 1 \neq 0$. Отсюда следует результат об однократности нулей x_i.

Формулы (3.4) дают расстояния между соседними нулями решения $y(x;\widetilde{\lambda})$. Складывая первые j членов в (3.4), приходим к формуле для j-го нуля. Следствие 1 доказано.

3.3. Доказательство утверждения 1. Предположим, что найдётся такое собственное значение $\widetilde{\lambda} \in \Lambda$, что ему отвечают два линейно независимых решения $y \equiv y_1(x;\widetilde{\lambda})$ и $y \equiv y_2(x;\widetilde{\lambda})$ задачи (1.1), (1.2). Пусть $W(x)$ – определитель Вронского, составленный для этих двух решений. Так как y_1 и y_2 – линейно независимые решения уравнения (1.1), то $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [0,1]$. Но, как легко видеть,

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0;\widetilde{\lambda}) & y_2(0;\widetilde{\lambda}) \\ y_1'(0;\widetilde{\lambda}) & y_2'(0;\widetilde{\lambda}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(0;\widetilde{\lambda}) & y_2'(0;\widetilde{\lambda}) \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что решения y_1 и y_2, вопреки первоначальному предположению, линейно зависимы. Отсюда следует, что всякое собственное значение $\widetilde{\lambda} \in \Lambda$ задачи $\mathcal{P}$ является простым. Утверждение 1 доказано.

3.4. Доказательство утверждения 2. Так как $w(x,\eta;\lambda) > 0$, а значит, и $\varsigma_i(v;\lambda) > 0$, то $T_i(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \in \Lambda_i$ и всякого $i \in \mathbb{Z}_+$.

Решение $y \equiv y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) непрерывно зависит от λ при $\lambda \in \Lambda$ в силу классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23, с. 117]. Учитывая это и принимая во внимание способ построения отображений g_i, получаем, что функции $x \equiv g_i(\eta;\lambda)$ непрерывны по аргументам η и λ при $(\eta,\lambda) \in \mathbb{R}\times\Lambda_i$. Но тогда подынтегральные выражения в $T_i(\lambda)$ непрерывны при $(\eta,\lambda) \in \mathbb{R}\times\Lambda_i$ как суперпозиции непрерывных функций. Отсюда следует, что при каждом значении индекса i функция $T_i(\lambda)$ непрерывно зависит от λ при $\lambda \in \Lambda_i$. Утверждение 2 доказано.

3.5. Доказательство утверждения 3. Рассмотрим функцию $T_i(\lambda)$, заданную равенством (2.6). Введём обозначение

$$\xi_i(v,t;\lambda) := Q(g_i(t;\lambda);\lambda) + \frac{v^2}{P(g_i(t;\lambda);\lambda)}$$

и пусть $\xi_i^+(v;\lambda) := \max\limits_{t\in\mathbb{R}} \xi_i(v,t;\lambda)$ и $\xi_i^-(v;\lambda) := \min\limits_{t\in\mathbb{R}} \xi_i(v,t;\lambda)$.

Тогда, как легко видеть, выполняются неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^+(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^-(v;\lambda)}, \tag{3.6}$$

где величина $\varsigma_i(v;\lambda)$ определена равенством (2.6).

Величины $\xi_i^+(v;\lambda)$ и $\xi_i^-(v;\lambda)$ оцениваются следующим образом:

$$\xi_i^+(v;\lambda) \leqslant \max_{i=\overline{0,n}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \xi_i(v,t;\lambda) \leqslant \xi^+(v;\lambda) \quad \text{и} \quad \xi_i^-(v;\lambda) \geqslant \min_{i=\overline{0,n}} \inf_{t\in\mathbb{R}} \xi_i(v,t;\lambda) \geqslant \xi^-(v;\lambda),$$

где $\xi^+(v;\lambda) = q_+ + v^2/p_-$ и $\xi^-(v;\lambda) = q_- + v^2/p_+$, а $p_\pm$ и $q_\pm$ определены после неравенств (2.1) и зависят от λ. Согласно предыдущему, если t пробегает вещественную ось, то значения $x = g_i(t,\lambda)$ пробегают интервал x_i.

Тогда неравенство (3.6) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{ds}{\xi^+(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^+(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^-(v;\lambda)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi^-(v;\lambda)}.$$

Вследствие предыдущего получаем оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\xi^+(v;\lambda)} \leqslant T_i(\lambda) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^-(v;\lambda)}. \tag{3.7}$$

Интегралы в левой и правой частях двойного неравенства (3.7) вычисляются точно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^+(v;\lambda)} = \frac{\pi\sqrt{p_-}}{\sqrt{q_+}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^-(v;\lambda)} = \frac{\pi\sqrt{p_+}}{\sqrt{q_-}}. \tag{3.8}$$

С учётом (3.8) неравенство (3.7) принимает вид (2.9). Утверждение 3 доказано.

3.6. Доказательство теоремы 2. Из оценок (2.9) и условия (2.11) следует, что, во-первых, Λ_i являются неограниченными множествами для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, а во-вторых, для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ найдётся неограниченное связное множество $\widetilde{\Lambda}_i \subset \Lambda_i$.

Далее, из оценок (2.9), (2.10) и условия (2.11) вытекает, что $\min\limits_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda;n) < 1$. В силу того, что Φ – это сумма расстояний между нулями x_i решения $y(x;\lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2), то, начиная с некоторого $n = n_0 \geqslant 0$, получаем

$$\max_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda;n) = a > 1.$$

Так как $\min\limits_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}_n}\Phi(\lambda;n) < 1$, а $\max\limits_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}_n}\Phi(\lambda;n) > 1$, то в силу непрерывности $T_i(\lambda)$ по λ при $\lambda\in\widetilde{\Lambda}_i$ найдётся такое значение $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\Lambda}_n$, что $\Phi(\widetilde{\lambda};n)=1$.

Проведённое рассуждение справедливо для каждого $n=n_0,n_0+1,\ldots,$ и, значит, для каждого $n=n_0,n_0+1,\ldots$ существует по крайней мере одно решение $\lambda=\widetilde{\lambda}_n\in\Lambda$ уравнения (2.8). Другими словами, при условии (2.11) существует бесконечное число решений $\widetilde{\lambda}_n\in\Lambda$ уравнения (2.8).

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\lambda}_n=+\infty$. Теорема 2 доказана.

3.7. Доказательство теоремы 3. Так как из условий (2.12) вытекает условие (2.11), то результат о существовании бесконечного числа решений $\widetilde{\lambda}_n\in\Lambda$ уравнения (2.8), где $n = n_0,n_0+1,\ldots,$ следует из теоремы 2.

Докажем оценку (2.13). В силу оценки (2.10) и соотношений (2.12) заключаем, что найдутся такие положительные числа δ_1, δ_2, для которых при всех достаточно больших λ имеет место соотношение

$$C_1-\delta_1\leqslant\Phi(\lambda;n)\leqslant C_2+\delta_2, \tag{3.9}$$

в котором $C_i=\pi(n+1)\lambda^{-c_i}+O(\lambda^{-c_i-\delta_i})$, $i=1,2$. Заменяя в (3.9) Φ единицей и обращая полученные неравенства, приходим к оценке (2.13).

Если положить $c_1=c_2=c>0$, то оценка (2.13) переходит в оценку (2.14). При этом коэффициент при главном члене асимптотической формулы (2.14) равен $\pi^{1/c}$. Теорема 3 доказана.

3.8. Доказательство теоремы 4. Если выполняются соотношения (2.15), то, согласно теореме 2, найдутся такие целые неотрицательные числа n_0^1 и n_0^2, что каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda;n)-1=0$ и $\Phi^2(\lambda;n)-1=0$ имеет не меньше одного решения $\lambda=\widetilde{\lambda}^1\in\Lambda$ и $\lambda=\widetilde{\lambda}^2\in\Lambda$ при $n=n_0^1,\ n_0^1+1,\ldots$ и $n=n_0^2,\ n_0^2+1,\ \ldots$ соответственно. Таким образом, если выполняются условия (2.15), то каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda;n)-1=0$ и $\Phi^2(\lambda;n)-1=0$ имеет бесконечное число решений $\widetilde{\lambda}^1_{n_0^1},\ \widetilde{\lambda}^1_{n_0^1+1},\ \ldots$ и $\widetilde{\lambda}^2_{n_0^2},\ \widetilde{\lambda}^2_{n_0^2+1},\ \ldots$ соответственно.

Используя следствие 3, получаем оценки

$$\pi(n+1)\frac{\sqrt{p^i_-(\lambda)}}{\sqrt{q^i_+(\lambda)}}\leqslant\Phi^i(\lambda;n)\leqslant\pi(n+1)\frac{\sqrt{p^i_+(\lambda)}}{\sqrt{q^i_-(\lambda)}},\quad i=1,2, \tag{3.10}$$

где функции $p^i_+(\lambda)$, $p^i_-(\lambda)$ и $q^i_+(\lambda)$, $q^i_-(\lambda)$ определены в п. 2.3.

Если справедливо неравенство (2.16), то, как нетрудно видеть, из оценок (3.10) следует, что

$$\Phi^1(\lambda;n)\leqslant\pi(n+1)\frac{\sqrt{p^1_+(\lambda)}}{\sqrt{q^1_-(\lambda)}}\leqslant\pi(n+1)\frac{\sqrt{p^2_-(\lambda)}}{\sqrt{q^2_+(\lambda)}}\leqslant\Phi^2(\lambda;n),$$

т.е. $\Phi^1(\lambda;n)\leqslant\Phi^2(\lambda;n)$. Полученное неравенство влечёт за собой неравенство (2.17). Теорема 4 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I. М., 1953.
2. *Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A.* On the eigenvalue accumulation of Sturm–Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. 1998. Bd. 189. Hf. 1. S. 157–170.
3. *Bohner M., Kratz W., Hilscher R. Š.* Oscillation and spectral theory for linear hamiltonian systems with nonlinear dependence on the spectral parameter // Math. Nachr. 2012. Bd. 285. Hf. 11–12. S. 1343–1356.

4. *Hilscher R.Š.* Eigenvalue theory for time scale symplectic systems depending nonlinearly on spectral parameter // Appl. Math. and Comput. 2012. V. 219. № 6. P. 2839–2860.
5. *Hartman P.* Boundary value problems for second order, ordinary differential equations involving a parameter // J. of Differ. Equat. 1972. V. 12. № 1. P. 194–212.
6. *Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R.* Sturm–Liouville problems with coefficients which depend analytically on the eigenvalue parameter // Acta Sci. Math. (Szeged). 1993. V. 57. № 1–4. P. 25–44.
7. *Валовик Д.В.* Об интегральной характеристической функции задачи Штурма–Лиувилля // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 11. С. 41–53.
8. *Hochstadt H.* Asymptotic estimates for the Sturm–Liouville spectrum // Comm. on Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. № 4. P. 749–764.
9. *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. 1994. V. 37. № 1. P. 57–72.
10. *Бен Амара Ж., Шкаликов А.А.* Задача Штурма–Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 163–172.
11. *Cocskun H., Bayram N.* Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm–Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // J. of Math. Anal. and Appl. 2005. V. 306. № 2. P. 548–566.
12. *Капустин Н.Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. P. 1024–1027.
13. *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 325–335.
14. *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, ii // J. of Comput. and Appl. Math. 2002. V. 148. № 1. P. 147–168.
15. *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Transformations between Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions // Bull. of the London Math. Soc. 2001. V. 33. № 6. P. 749–757.
16. *Смирнов Ю.Г.* Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 3. С. 460–468.
17. *Zhang Maozhu, Li Kun.* Dependence of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Appl. Math. and Comput. 2020. V. 378. Art. 125214.
18. *Алиев З.С., Дуньямалиева А.А.* Базисные свойства корневых функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН. 2013. Т. 451. № 5. С. 487–491.
19. *Керимов Н.Б., Поладов Р.Г.* Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 1. С. 14–19.
20. *Марченков Д.Б.* Базисность в пространстве $l_p(0,1)$ системы собственных функций, отвечающей задаче со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 847–849.
21. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев, 1972.
22. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
23. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
24. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М., 1968.
25. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М., 1962.
26. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.
После доработки 07.07.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.