ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. А. И. Перов, И. Д. Коструб

Посвящается светлой памяти
Марка Александровича Красносельского

С помощью теории коммутативных банаховых алгебр устанавливается оценка решений линейного однородного матричного дифференциального уравнения, коэффициенты которого попарно перестановочны между собой. Из полученной оценки выводится признак асимптотической устойчивости по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0374064121120025

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$A_0X^{(n)} + A_1X^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}\dot X + A_nX = 0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, $\ldots$, A_n – постоянные $m\times m$-матрицы, причём матрица A_0 является невырожденной $(\det A_0 \ne 0)$, и $X^{(k)} = d^kX/dt^k$ при $0\leqslant k\leqslant n$. Близкие уравнения встречаются, например, в теории колебаний [1, с. 358–378]. Нас интересуют условия, при выполнении которых рассматриваемое уравнение асимптотически устойчиво по Ляпунову [2, с. 198].

Через $S(A)$ обозначим спектр матрицы A, т.е. совокупность всех её собственных значений, при этом кратность собственных значений (если таковые имеются) никак не учитывается. Поэтому $S(A)$ – непустое конечное множество, лежащее в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрим скалярное алгебраическое уравнений n-й степени

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{2}$$

где $a_k\in S(A_k)$ при $0\leqslant k\leqslant n$. Так как по предположению A_0 является невырожденной, то всегда $a_0\ne 0$. При каждом фиксированном выборе указанным способом коэффициентов a_0, a_1, $\ldots$, a_n уравнение (2) имеет n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность [3, с. 145]. Эти корни образуют непустое конечное множество в $\mathbb{C}$, при этом кратность корней никак не учитывается.

Если составить характеристическое уравнение для уравнения (1), то оно имеет степень nm. Семейство уравнений (2) конечно; таких уравнений не более m^{n+1}. Совокупность всех корней, получающихся указанным выше способом, обозначим через $\mathcal{R}$, это непустое конечное множество в $\mathbb{C}$. Положим

$$\beta = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda\in\mathcal{R}\}. \tag{3}$$

Гипотеза. При сделанных выше предположениях для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую постоянную $C(\varepsilon)$, что для любого решения $X(t)$ матричного дифференциального уравнения (1) справедлива оценка

$$\|X^{(j)}(t)\| \leqslant C(\varepsilon)e^{t(\beta+\varepsilon)}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\|X^{(k)}(0)\| \quad \text{при} \quad 0\leqslant t<\infty \quad \text{для} \quad 0\leqslant j\leqslant n-1, \tag{4}$$

где постоянная β определена соотношением (3).

Поэтому, если выполнено условие

$$\beta<0, \tag{5}$$

то матричное дифференциальное уравнение (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причём в силу оценки (4) получаем

$$\|X^{(j)}(t)\| \leqslant C(\varepsilon)e^{t(\beta+\varepsilon)} \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} \|X^{(k)}(0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty \quad \text{для} \quad 0\leqslant j\leqslant n-1, \tag{6}$$

и правая часть стремится к нулю по экспоненциальному закону ($\varepsilon > 0$ выбираем так, чтобы $\beta+\varepsilon < 0$).

Вторая часть высказанной гипотезы, содержащая *спектральный признак экспоненциальной устойчивости*, и дала название статье. Остановимся на нём более подробно. Прежде всего отметим, что условие (5) выполнено тогда и только тогда, когда каждое алгебраическое уравнение семейства (2) гурвицево (т.е. все его корни лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$).

Если все коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ в уравнении (2) вещественные, то для проверки гурвицевости этого уравнения можно воспользоваться критерием Рауса–Гурвица [4]. Если среди коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ имеются комплексные, то для проверки гурвицевости нужно использовать критерий [5, с. 533–534, теорема 23].

Но в рассматриваемом признаке асимптотической устойчивости проверке на гурвицевость подвергается не одно уравнение, а целое семейство. Если коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ вещественные и $\alpha_k \leqslant a_k \leqslant \beta_k$ для $0\leqslant k\leqslant n$, то для выяснения гурвицевости семейства многочленов достаточно выяснить гурвицевость лишь четырёх специально построенных многочленов этой совокупности [6]. Если среди коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ имеются комплексные, вещественные и мнимые части которых удовлетворяют указанным выше оценкам, то для проверки гурвицевости семейства многочленов достаточно выяснить гурвицевость только восьми специально построенных комплексных многочленов. Это следует из результатов В.Л. Харитонова [7]. Ранее на эту тему была опубликована статья С. Фаэдо [8].

В качестве первого примера рассмотрим матричное дифференциальное уравнение вида

$$a_0X^{(n)} + a_1X^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{X} + a_nX = 0, \tag{7}$$

т.е. уравнение (1), в котором $A_k = a_kE$, где E – единичная $m\times m$-матрица, $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ – комплексные числа, причём $a_0 \neq 0$. Соответствующее семейство алгебраических уравнений (2) состоит из одного-единственного уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что поведение решений уравнения (7) полностью определяется корнями уравнения (8). Этот пример тесно связан с теоремой Гамильтона–Кэли.

В качестве примера применения указанного выше признака экспоненциальной устойчивости приведём матричное дифференциальное уравнение второго порядка, возникающее в теории колебаний,

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = 0, \tag{9}$$

в котором матричные коэффициенты являются самосопряжёнными и положительно определёнными: $A^* = A > 0,\ B^* = B > 0,\ C^* = C > 0$. Самосопряжённость гарантирует вещественность спектра, а положительная определённость – его положительность. Поэтому соответствующие квадратные уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad a\in S(A), \quad b\in S(B), \quad c\in S(C),$$

с вещественными коэффициентами являются гурвицевыми, так как $a>0,\ b>0,\ c>0$. Поэтому уравнение (9) экспоненциально устойчиво. Приведём явное выражение для величины

$$\beta = \max\{\beta(a,b,c) : a\in S(A), \quad b\in S(B), \quad c\in S(C)\},$$

где

$$\beta(a,b,c) = \begin{cases} (-b+\sqrt{b^2-4ac})/(2a), & \text{если } b^2-4ac > 0, \\ -b/(2a), & \text{если } b^2-4ac \leqslant 0. \end{cases}$$

Сформулированная гипотеза предполагает знание спектров матричных коэффициентов $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$, что само по себе предполагает серьезную вычислительную задачу. В этом направлении может оказаться полезным пособие [9].

Полученный результат. Проведём доказательство предложенной гипотезы при дополнительном предположении о попарной перестановочности между собой матричных коэффициентов, т.е. $A_jA_k = A_kA_j$ при $j \neq k$ и $0 \leqslant j,k \leqslant n$. Пусть $\mathbb{B}$ – коммутативная банахова алгебра [10, с. 255], состоящая из комплексных квадратных матриц m-го порядка, содержащая матричные коэффициенты $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$. Для них определены алгебраические операции сложения и умножения, а также умножения на комплексные числа с обычными свойствами. Кроме того, эта совокупность рассматривается как (конечномерное) банахово пространство [11, с. 68], норма в котором обладает свойствами $\|A\| \geqslant 0$; $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$; $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ и $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. Кроме того, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ и $\|E\| = 1$. Здесь A и B из $\mathbb{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathbb{B}^n$ банахову алгебру, элементами которой являются столбцы $\mathbf{X}$ с компонентами $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ из $\mathbb{B}$, т.е. $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}\times\ldots\times\mathbb{B}$ – прямая сумма (прямое произведение). В $\mathbb{B}^n$ алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы алгебры $\mathbb{B}$) и умножения вводятся покомпонентно. Норма в $\mathbb{B}^n$ определяется следующим образом: $\|\mathbf{X}\| = \max\|X_j\|$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Введём банахову алгебру $\mathbb{B}^{n\times n}$, элементами которой являются всевозможные блочные матрицы $\mathbf{A} = (A_{jk})$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$, где A_{jk} из $\mathbb{B}$. В этой совокупности и определены алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы алгебры $\mathbb{B}$) и умножения (по правилу строка на столбец). Между блочными матрицами в $\mathbb{B}^{n\times n}$ и линейными ограниченными операторами, действующими в банаховом пространстве $\mathbb{B}^n$, существует естественное взаимно однозначное соответствие, именно, блочной матрице $\mathbf{A} = (A_{jk})$ поставим в соответствие оператор $\mathbf{A} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, действующий по правилу $Y_j = A_{j1}X_1 + \ldots + A_{jn}X_n$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. При этом норма матрицы $\mathbf{A}$ определяется как операторная: $\|\mathbf{A}\| = \max\|\mathbf{AX}\|$, где максимум берётся по $\|\mathbf{X}\| = 1$, $\mathbf{X} \in \mathbb{B}^n$.

Рассмотрим в коммутативной банаховой алгебре $\mathbb{B}$ дифференциальное уравнение (1) с постоянными коэффициентами A_i из $\mathbb{B}$, $i = \overline{0,n}$, причём коэффициент A_0 обратим $(\det A_0 \neq 0)$. Если по методу Эйлера искать решение уравнения (1) в виде $X = \exp(t\Lambda)$, где $\Lambda \in \mathbb{B}$, то придём к алгебраическому матричному уравнению n-й степени

$$A_0\Lambda^n + A_1\Lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Lambda + A_n = 0, \tag{10}$$

которое естественно назвать *характеристическим*. Однако в развиваемой нами теории играет важную роль не многочлен из (10), а многочлен

$$L_n(\lambda) \equiv A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B},$$

который мы, за неимением лучшего, назовём *скалярным характеристическим многочленом* (пучком), имея в виду, что областью определения этого многочлена является поле скаляров $\mathbb{C}$. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых элемент $L_n(\lambda)$ не имеет обратного $(\det L_n(\lambda) = 0)$, образуют *спектр* S (замкнутое множество) скалярного характеристического многочлена, являющееся непустым конечным множеством в $\mathbb{C}$. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых элемент $L_n(\lambda)$ обратим $(\det L_n(\lambda) \neq 0)$, образуют *резольвентное множество* R (открытое) скалярного характеристического многочлена.

Пусть элемент C из $\mathbb{B}$ обратим $(\det C \neq 0)$. Вместо уравнения (1) рассмотрим эквивалентное (т.е. имеющее те же самые решения) дифференциальное уравнение n-го порядка

$$B_0X^{(n)} + B_1X^{(n-1)} + \ldots + B_{n-1}\dot{X} + B_nX = 0,$$

где $B_k = CA_k$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Вместе с этим уравнением появляется характеристическое уравнение

$$B_0\Lambda^n + B_1\Lambda^{n-1} + \ldots + B_{n-1}\Lambda + B_n = 0$$

и скалярный характеристический многочлен

$$M_n(\lambda) \equiv B_0\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B}.$$

Отметим, что несмотря на то, что внешне и дифференциальное уравнение, и скалярный характеристический многочлен подверглись изменению, спектр скалярного характеристического многочлена остался неизменным, поскольку $\det M_n(\lambda) = \det C \det L_n(\lambda)$ и $\det C \neq 0$.

Запишем уравнение (1) в приведённом виде

$$X^{(n)} + B_1 X^{(n-1)} + \ldots + B_{n-1}\dot{X} + B_n X = 0, \tag{11}$$

где $B_j = A_0^{-1}A_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Представим дифференциальное уравнение (9) в виде системы n дифференциальных матричных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & E & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -B_n & \ldots & \ldots & \ldots & -B_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Матрица $\mathbf{A}$ из $\mathbb{B}^{n\times n}$ называется *сопровождающей* (скалярный характеристический многочлен $M_n(\lambda)$) *матрицей Фробениуса*. Здесь

$$M_n(\lambda) = E\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B}. \tag{13}$$

Обозначим через $S(\mathbf{A})$ спектр линейного ограниченного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$. В рассматриваемом случае спектр – непустое конечное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через α *спектральную абсциссу* оператора $\mathbf{A}$, т.е.

$$\alpha = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in S(\mathbf{A})\}. \tag{14}$$

Отметим, что решение уравнения (11) имеет вид $\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}(0)$. В рассматриваемом случае для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую постоянную $C(\varepsilon) > 0$, что справедлива оценка

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant C(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{15}$$

где постоянная α определена соотношением (14) [12, с. 86].

Из (15) вытекает следующая оценка для решений дифференциального уравнения (12): $\|\mathbf{X}(t)\| \leqslant \|e^{t\mathbf{A}}\|\|\mathbf{X}(0)\|$, т.е.

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leqslant C(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)}\|\mathbf{X}(0)\| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{16}$$

Центральная часть доказательства. Покажем, что

$$\alpha \leqslant \beta, \tag{17}$$

где α определяется формулой (14), а β – формулой (3). Это неравенство немедленно вытекает из включения

$$S(\mathbf{A}) \subseteq \Lambda, \tag{18}$$

к доказательству которого мы и переходим.

Согласно [13, теорема 5] справедливо равенство

$$S(\mathbf{A}) = S' \quad (R(\mathbf{A}) = R'),$$

где $S(\mathbf{A})$ и $R(\mathbf{A})$ – это спектр и резольвентное множество оператора $\mathbf{A}$, а S' и R' – это спектр и резольвентное множество скалярного характеристического многочлена $M_n(\lambda)$, определяемого формулой (13). Так как по доказанному $S' = S$ и $R' = R$, где S и R – это спектр и резольвентное множество скалярного характеристического многочлена $L_n(\lambda)$, то

$$S(\mathbf{A}) = S \quad (R(\mathbf{A}) = R). \tag{19}$$

Перейдём к доказательству включения (18). Пусть $\lambda \in S(\mathbf{A})$. Тогда, согласно (19), $\lambda \in S$. Последнее означает, что

$$0 \in S(A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n). \tag{20}$$

Так как для коммутативных банаховых алгебр многозначное отображение $A \mapsto S(A)$ обладает свойствами: $S(A+B) \subseteq S(A)+S(B)$ и $S(A\mu) = S(A)\mu$ для любых A и B из $\mathbb{B}$ и μ из $\mathbb{C}$, то

$$S(A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n) \subseteq S(A_0)\lambda^n + S(A_1)\lambda^{n-1} + \ldots + S(A_{n-1})\lambda + S(A_n).$$

Поэтому из включения (20) вытекает, что

$$0 \in S(A_0)\lambda^n + S(A_1)\lambda^{n-1} + \ldots + S(A_{n-1})\lambda + S(A_n). \tag{21}$$

Любой элемент из написанной в правой части включения (21) суммы имеет вид

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

где $a_k \in S(A_k)$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому включение (21) означает, что коэффициенты a_k можно выбрать такими, чтобы $0 = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Видим, что число λ является корнем уравнения (2), и поэтому $\lambda \in \mathcal{R}$. Включение (18) установлено.

Из оценки (16) и неравенства (17) следует основная оценка (4).

Работа Перова А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19–01–00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М., 1964.
2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 198s4.
3. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 1968.
4. *Понтрягин А.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965.
5. *Гантамхер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1983.
6. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
7. *Харитонов В.Л.* Проблема Рауса–Гурвица для семейства полиномов и квазиполиномов // Мат. физика. 1979. № 26. С. 69–79.
8. *Faedo S.* Un nuova problema di stabilita per le equazione algebriche a coefficienti reali // Ann. Scuola Norm. Super. Piza, 1953. V. 7. № 1–2. С. 53–63.
9. *Курбатов В.Г., Курбатова И.В.* Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж, 2019.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
11. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М., 1982.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
13. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Докл. РАН. 2020. Т. 491. № 4. С. 83–87.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.06.2021 г.
После доработки 06.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.