ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1604–1609

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:531.32

# ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА–ФОЙГТА

© 2021 г. Е. С. Барановский

Изучается задача протекания для трёхмерных уравнений Навье–Стокса–Фойгта с неоднородным краевым условием Дирихле. Доказана теорема о существовании и единственности сильного решения в предположении, что нормы функций, описывающих внешние силы, начальное поле скоростей и потоки на границе, достаточно малы.

DOI: 10.31857/S0374064121120037

**Введение.** Задачи о протекании вязкой жидкости через заданную пространственную область долгое время привлекают внимание математиков. Согласно подсчётам авторов статьи [1] задаче протекания для уравнений Навье–Стокса посвящено более ста работ, выполненных учёными из одиннадцати стран. При этом количество статей по данной тематике постоянно увеличивается. Несмотря на большое число работ, в основном исследован случай стационарных (т.е. не зависящих от времени) течений, а в качестве уравнений движения чаще всего используются классические уравнения Навье–Стокса. Однако поведение многих встречающихся на практике жидкостей не может быть адекватно описано в рамках модели Навье–Стокса. Такие жидкости называют *неньютоновскими* [2]. В их число входят, например, жидкости дифференциального типа, у которых тензор напряжений Коши зависит от градиента скорости и его производных по времени [3].

В настоящей работе изучается разрешимость (в классе сильных решений) нестационарной задачи протекания для уравнений Навье–Стокса–Фойгта [4], которые можно рассматривать как одну из базовых моделей движения неньютоновских жидкостей дифференциального типа:

$$\mathbb{P}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right] - \nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u} - \alpha\mathbb{P}\frac{\partial(\Delta\boldsymbol{u})}{\partial t} = \mathbb{P}\boldsymbol{f} \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi} \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{4}$$

где $\Omega$ – ограниченная трёхмерная область с $C^2$-гладкой границей $\partial\Omega$; $(0,T)$ – заданный промежуток времени; $\boldsymbol{u}$ – скорость течения жидкости; $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{u}_0$ – заданные вектор-функции, которые описывают соответственно поле внешних сил, скорость течения на границе $\partial\Omega$ и распределение скоростей в начальный момент времени $t=0$; $\mathbb{P}$ – проектор Лерэ; $\alpha$ и $\nu$ – положительные материальные константы. Символы $\nabla$ и $\Delta$ обозначают соответственно градиент и лапласиан по пространственным переменным $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Исследование модели (1), (2) и некоторых её модификаций восходит к работам А.П. Осколкова [5, 6], в которых рассматривались задачи о движении жидкости внутри ограниченной трёхмерной (или двумерной) области с гладкой границей. Данная статья является продолжением работы [4], в которой установлены существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи (1)–(4) в предположении, что $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$, т.е. при стандартном граничном условии прилипания на непроницаемой твёрдой поверхности.

Другой подход к моделированию течения вязкой жидкости через заданную область основан на использовании краевых условий для давления [7] или напора [8, 9] на тех участках границы, где происходит протекание жидкости.

**1. Понятие сильных решений.** Введём необходимые функциональные пространства и операторы. Будем использовать пространство Лебега $L^2(\Omega)$, пространства Соболева $H^m(\Omega)$ и пространства следов $H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $m=1,2$ (см. [10, гл. III]). Для соответствующих классов вектор-функций $\boldsymbol{v}\colon \Omega\to\mathbb{R}^3$ используем те же самые обозначения, выделяя при этом первую букву жирным шрифтом, т.е. $\boldsymbol{L}^2(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}L^2(\Omega)^3$, $\boldsymbol{H}^1(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}H^1(\Omega)^3$ и т.п.

Через $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}$ обозначим линейный непрерывный оператор следа, действующий из $\boldsymbol{H}^m(\Omega)$ в $\boldsymbol{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)$. Отметим, что $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}$ для любой вектор-функции $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^m(\Omega)\bigcap\boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$.

Введём также подпространства соленоидальных вектор-функций:

$$\boldsymbol{H}^m_\sigma(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^m(\Omega)\colon \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \ \text{ в } \ \Omega\},\quad m=1,2,$$

и подпространства следов, удовлетворяющих условию нулевого суммарного потока на границе области течения:

$$\boldsymbol{H}^{m-1/2}_0(\partial\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{H}^{m-1/2}(\partial\Omega):\int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}\,dS=0\right\},\quad m=1,2,$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{V}(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{C}^\infty(\Omega)\bigcap\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega):\operatorname{supp}\boldsymbol{\eta}\subset\Omega\}$. Введём обозначения: $\boldsymbol{V}^0(\Omega)$ – замыкание множества $\mathcal{V}(\Omega)$ в пространстве $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{V}^1(\Omega)$ – замыкание множества $\mathcal{V}(\Omega)$ в пространстве $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, $\boldsymbol{V}^2(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{H}^2(\Omega)\bigcap\boldsymbol{V}^1(\Omega)$. Очевидно, что $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, если $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^k(\Omega)$, $k=1,2$.

Напомним, что имеет место ортогональное разложение $\boldsymbol{L}^2(\Omega)=\boldsymbol{V}^0(\Omega)\bigoplus\nabla H^1(\Omega)$, а ортогональный проектор $\mathbb{P}$ из $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ в $\boldsymbol{V}^0(\Omega)$ называется *проектором Лерэ* (см. [10, гл. IV]).

Как обычно, $\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{X})$ – пространство непрерывных функций из отрезка $[0,T]$ в $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{X})\overset{\mathrm{def}}{=}\{\boldsymbol{w}\colon[0,T]\to\boldsymbol{X}:\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{X}),\,\boldsymbol{w}'\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{X})\}$, где $\boldsymbol{X}$ – банахово пространство, а $'$ обозначает производную по $t$.

**Определение.** *Сильным решением* начально-краевой задачи (1)–(4) будем называть вектор-функцию $\boldsymbol{u}\colon\overline{\Omega}\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ такую, что $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$, $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}$ и

$$\mathbb{P}\boldsymbol{u}'+\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^3u_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right]-\nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}-\alpha\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}'=\mathbb{P}\boldsymbol{f}\ \text{ в } \ \Omega\times(0,T).$$

**2. Основной результат работы.**

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)),\quad \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^{3/2}_0(\partial\Omega)),\quad \boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega),\quad \boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{\varphi}(0). \tag{5}$$

*Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что если*

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^{3/2}_0(\partial\Omega))}+\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)}\leqslant\varepsilon_0, \tag{6}$$

*то начально-краевая задача (1)–(4) имеет единственное сильное решение $\boldsymbol{u}$ в некоторой открытой окрестности $\boldsymbol{U}$ нулевой вектор-функции в пространстве $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$.*

**3. Вспомогательные результаты.** В этом пункте приводятся утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1. Далее для линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ через $\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

**Теорема 2.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ – изоморфные вещественные банаховы пространства, $\boldsymbol{A}\colon\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ – изоморфизм, т.е. линейное непрерывное биективное отображение, $\boldsymbol{B}\colon\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ – непрерывно дифференцируемое по Фреше отображение, для которого $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ и норма производной Фреше $\boldsymbol{DB}(\boldsymbol{0})$ удовлетворяет оценке*

$$\|\boldsymbol{DB}(\boldsymbol{0})\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})}<\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})}. \tag{7}$$

*Тогда существуют число* $\epsilon > 0$ *и открытая окрестность* $\mathcal{U}$ *нулевого элемента в* $\boldsymbol{E}$ *такие, что для любого элемента* $\boldsymbol{g}$ *из шара* $\mathfrak{B}_\epsilon(\boldsymbol{0}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{F} : \|\boldsymbol{q}\|_{\boldsymbol{F}} < \epsilon\}$ *уравнение*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{g} \tag{8}$$

*имеет единственное решение* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_g}$, *принадлежащее множеству* $\mathcal{U}$.

**Доказательство.** Рассмотрим оператор $\boldsymbol{T}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, заданный формулой $\boldsymbol{T} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{A}^{-1} \circ \boldsymbol{B}$. Применив оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ к обеим частям уравнения (8), получим

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{I}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ – тождественный оператор. Очевидно, что уравнения (8) и (9) эквивалентны.

Заметим, что $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T})(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Кроме того, используя неравенство (7), получаем оценку

$$\|\boldsymbol{DT}(\boldsymbol{0})\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})} = \|\boldsymbol{A}^{-1} \circ \boldsymbol{DB}(\boldsymbol{0})\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})} \leqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})}\|\boldsymbol{DB}(\boldsymbol{0})\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})} < 1,$$

из которой следует, что оператор $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{DT}(\boldsymbol{0})\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ непрерывно обратим. Поэтому, согласно теореме об обратной функции, существуют открытые окрестности $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ нулевого элемента в пространстве $\boldsymbol{E}$ такие, что отображение $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}|_{\mathcal{U}_1}\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ биективно.

Пусть $\epsilon$ – положительное число такое, что $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g} \in \mathcal{U}_2$ для любого элемента $\boldsymbol{g}$ из открытого шара $\mathfrak{B}_\epsilon(\boldsymbol{0})$. Тогда в качестве $\mathcal{U}$ можно взять множество $\mathcal{U}_1$. В самом деле, для любого $\boldsymbol{g} \in \mathfrak{B}_\epsilon(\boldsymbol{0})$ единственным (в множестве $\mathcal{U}$) решением уравнения (9) будет элемент $\boldsymbol{w_g} \stackrel{\text{def}}{=} [(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T})^{-1} \circ \boldsymbol{A}^{-1}]\boldsymbol{g}$. Теорема 2 доказана.

**Лемма 1.** *Существует линейный непрерывный оператор**)

$$\boldsymbol{\ell}_\Omega\colon \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)) \to \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{H}_\sigma^2(\Omega))$$

*такой, что* $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}[\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\psi}(t)] = \boldsymbol{\psi}(t)$ *для любой вектор-функции* $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega))$ *и всех* $t \in [0,T]$.

**Доказательство.** Пусть $\boldsymbol{a}$ – произвольная вектор-функция из пространства $\boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)$. Согласно классическим результатам о разрешимости стационарных уравнений Стокса с неоднородными краевыми условиями (см., например, [11, гл. I]) существует единственная вектор-функция $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}_\sigma^2(\Omega)$, которая удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{y} = 0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{10}$$

и для которой выполнена оценка

$$\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{H}_\sigma^2(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)} \tag{11}$$

с некоторой константой $C(\Omega)$.

Обозначим через $\boldsymbol{R}$ разрешающий оператор задачи (10), т.е. по определению $\boldsymbol{Ra} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{y}$. Из оценки (11) вытекает включение $\boldsymbol{R} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega), \boldsymbol{H}_\sigma^2(\Omega))$.

Оператор поднятия $\boldsymbol{\ell}_\Omega$ определим по формуле $[\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\psi}](t) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}[\boldsymbol{\psi}(t)]$, где $\boldsymbol{\psi}$ – вектор-функция из пространства $\boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega))$ и $t \in [0,T]$. Очевидно, что оператор $\boldsymbol{\ell}_\Omega$ удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Пусть

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{C}([0,T]; \boldsymbol{V}^0(\Omega)) \times \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)) \times \boldsymbol{H}_\sigma^2(\Omega) : \boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{b}\}.$$

*) Этот оператор называется *оператором поднятия.*

**Лемма 2.** *Линейный оператор* $\mathbb{A}\colon \boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)) \to \mathfrak{F}$, *заданный формулой*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{P}\boldsymbol{u}' - \nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u} - \alpha\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}(0)),$$

*является изоморфизмом.*

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что справедлива оценка

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_{\mathfrak{F}} \leqslant C(\Omega,\alpha,\nu)\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))}, \quad C(\Omega,\nu,\alpha) = \text{const},$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$. Следовательно,

$$\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)), \mathfrak{F}).$$

Далее, покажем, что $\mathbb{A}$ – инъективный оператор. Пусть $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ – вектор-функции из пространства $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$ и $\mathbb{A}\boldsymbol{u}_1 = \mathbb{A}\boldsymbol{u}_2$. Обозначим $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$. Из равенства $\mathbb{A}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$, в частности, следует, что

$$\mathbb{P}\widetilde{\boldsymbol{u}}' - \nu\mathbb{P}\Delta\widetilde{\boldsymbol{u}} - \alpha\mathbb{P}\Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}' = \boldsymbol{0} \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T). \tag{12}$$

Умножим обе части (12) на $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ и проинтегрируем по области $\Omega$:

$$\int\limits_\Omega \mathbb{P}\widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} - \nu\int\limits_\Omega \mathbb{P}\Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} - \alpha\int\limits_\Omega \mathbb{P}\Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} = 0, \quad t\in(0,T). \tag{13}$$

Так как $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$ и $\boldsymbol{\gamma}_{\partial\Omega}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$, то $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{V}^2(\Omega))$. Поэтому $\mathbb{P}\widetilde{\boldsymbol{u}}' = \widetilde{\boldsymbol{u}}'$ и для любой вектор-функции $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ выполняется равенство $(\mathbb{P}\boldsymbol{w},\widetilde{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = (\boldsymbol{w},\widetilde{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$. Таким образом, равенство (13) принимает вид

$$\int\limits_\Omega \widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} - \nu\int\limits_\Omega \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} - \alpha\int\limits_\Omega \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} = 0, \quad t\in(0,T). \tag{14}$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемые из левой части (14), получаем

$$\int\limits_\Omega \widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} + \nu\int\limits_\Omega |\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2\,\boldsymbol{dx} + \alpha\int\limits_\Omega \nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}' : \nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} = 0, \quad t\in(0,T), \tag{15}$$

где через : обозначено скалярное произведение матриц. Замечая, что

$$\int\limits_\Omega \widetilde{\boldsymbol{u}}'\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2\,\boldsymbol{dx}, \quad \int\limits_\Omega \nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}' : \nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2\,\boldsymbol{dx}, \quad t\in(0,T),$$

из равенства (15) выводим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2 + \alpha|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2)\,\boldsymbol{dx} + 2\nu\int\limits_\Omega |\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2\,\boldsymbol{dx} = 0, \quad t\in(0,T). \tag{16}$$

Проинтегрируем обе части равенства (16) по $t$ от 0 до $s$. С учётом того, что $\widetilde{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{0}$, получаем

$$\int\limits_\Omega (|\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)|^2 + \alpha|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)|^2)\,\boldsymbol{dx} + 2\nu\int\limits_0^s\int\limits_\Omega |\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)|^2\,\boldsymbol{dx}dt = 0, \quad s\in(0,T),$$

откуда следует равенство $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$. Таким образом, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что $\mathbb{A}$ – сюръективный оператор. Возьмём произвольную тройку $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{b})\in\mathfrak{F}$. Требуется установить разрешимость уравнения $\mathbb{A}\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{b})$. Это уравнение эквивалентно следующей начально-краевой задаче:

$$\mathbb{P}\boldsymbol{u}'-\nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}-\alpha\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{z},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\phi} \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{b} \ \text{ в } \ \Omega. \tag{19}$$

Неизвестную вектор-функцию $\boldsymbol{u}$ представим в виде суммы $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\phi}$, где $\boldsymbol{v}$ – новая неизвестная вектор-функция. Тогда задача (17)–(19) сводится к следующей задаче:

$$\boldsymbol{v}'-\nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{v}-\alpha\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{v}'=\widehat{\boldsymbol{z}},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{v}(0)=\widehat{\boldsymbol{b}} \ \text{ в } \ \Omega, \tag{22}$$

где $\widehat{\boldsymbol{z}}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{z}-\mathbb{P}\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\phi}'+\nu\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\phi}+\alpha\mathbb{P}\Delta\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\phi}'\in\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{V}^0(\Omega))$ и $\widehat{\boldsymbol{b}}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{\ell}_\Omega\boldsymbol{\phi}](0)\in\boldsymbol{V}^2(\Omega)$.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применяются для доказательства теоремы 1 из [4], можно показать, что начально-краевая задача (20)–(22) имеет единственное решение $\boldsymbol{v}$ в пространстве $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{V}^2(\Omega))$. Следовательно, уравнение $\mathbb{A}\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{b})$ однозначно разрешимо. Лемма доказана.

**4. Доказательство теоремы 1.** Начально-краевая задача (1)–(4) в "сильной" формулировке (см. определение в п. 1) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u}+\mathbb{B}(\boldsymbol{u})=(\mathbb{P}\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u}_0)$$

с линейным оператором $\mathbb{A}\colon \boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))\to\mathfrak{F}$, который определён в лемме 2, и нелинейным оператором $\mathbb{B}\colon \boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))\to\mathfrak{F}$, заданным формулой

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{u})\overset{\text{def}}{=}\left(\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^3 u_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right],\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\right).$$

Заметим, что отображение $\mathbb{B}$ непрерывно дифференцируемо по Фреше и

$$[\boldsymbol{D}\mathbb{B}(\boldsymbol{u})]\boldsymbol{h}=\left(\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^3 h_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right]+\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^3 u_i\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial x_i}\right],\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\right)$$

для любых вектор-функций $\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$. В частности, $\boldsymbol{D}\mathbb{B}(\boldsymbol{0})$ – нулевой оператор и, следовательно, справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{D}\mathbb{B}(\boldsymbol{0})\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)),\mathfrak{F})}<\|\mathbb{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega)),\mathfrak{F})}.$$

Кроме того, согласно лемме 2, оператор $\mathbb{A}$ – изоморфизм. Поэтому, применяя соответствующим образом теорему 2, заключаем, что при выполнении условий (5) и (6) задача (1)–(4) имеет единственное сильное решение $\boldsymbol{u}$ в некоторой открытой окрестности $\boldsymbol{U}$ нулевой вектор-функции в пространстве $\boldsymbol{C}^1([0,T];\boldsymbol{H}^2_\sigma(\Omega))$. Теорема 1 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначев В.В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. Вып. 6. С. 115–176.
2. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3–98.

3. *Cioranescu D., Girault V., Rajagopal K.R.* Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type. Cham, 2016.
4. *Baranovskii E.S.* Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. Art. ID 181.
5. *Осколков А.П.* О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 145–160.
6. *Осколков А.П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 127. С. 32–57.
7. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Art. ID 133.
8. *Барановский Е.С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
9. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 317–327.
10. *Boyer F., Fabrie P.* Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models. New York, 2013.
11. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.09.2021 г.
После доработки 11.10.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.