

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПО НАХОЖДЕНИЮ СОМНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2021 г. С. Н. Сидоров

Для заданного в прямоугольном параллелепипеде неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, неоднородность которого представляет собой произведение функций, зависящих только от пространственных и только от временной переменных, исследуется обратная задача по нахождению сомножителя неоднородности, зависящего от пространственных переменных. Установлен критерий единственности решения. Решение построено в виде суммы ряда по ортогональной системе функций. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов. Получены оценки, гарантирующие отдалённость от нуля знаменателей с указанием асимптотики, позволившие обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений. Установлена устойчивость найденного решения относительно возмущений граничных функций.

DOI: 10.31857/S0374064121120049

1. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородное уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu \equiv F(x, y, t), \quad (1)$$

здесь

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases} \quad F(x, y, t) \equiv \begin{cases} f(x, y)g_1(t), & t > 0, \\ f(x, y)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в области $Q = \{(x, y, t) : (x, y) \in D, t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, а α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное действительное число, и, обозначив $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$, поставим следующую задачу.

Задача. Найти функции $u(x, y, t)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \quad (2)$$

$$f(x, y) \in C(D) \cap L_2(D); \quad (3)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-; \quad (4)$$

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, y, t)|_{y=0} = u(x, y, t)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (6)$$

$$u(x, y, t)|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (7)$$

$$u(x, y, t)|_{t=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (8)$$

где $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1, 2] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для двумерного уравнения парабола-гиперболического типа в смешанной области, параболическая часть которой представляет собой прямоугольник, а гиперболическая часть – характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. В такой же области в [3] методами спектрального анализа изучены

задачи для парабола-гиперболических уравнений и соответствующие одномерные спектральные задачи.

В прямоугольной области начально-граничные задачи для однородного и неоднородного уравнений смешанного парабола-гиперболического типа впервые изучались в работах [4; 5, с. 56–94; 6], а в статьях [7–9] исследовались нелокальные задачи для однородного парабола-гиперболического уравнения.

Отметим также работы [10, 11], в которых для следующих трёх классов одномерных неоднородных парабола-гиперболических уравнений: уравнений с вырождающейся гиперболической частью, уравнений с вырождающейся параболической частью и уравнений со степенным вырождением, изучена начально-граничная задача в прямоугольной области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ с ненулевыми условиями на границе при $x = 0$, $x = l$ и $t = -\alpha$.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмологии, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных исследованы достаточно полно и приведены в монографиях [12–20].

В работах [20–23] для одномерных неоднородных парабола-гиперболических уравнений в прямоугольной области с неоднородностью, зависящей только от пространственной переменной, изучены обратные задачи по нахождению решения и неоднородности.

В работах [24, 25] в прямоугольной области для двух классов одномерных неоднородных парабола-гиперболических вырождающихся уравнений – уравнений с вырождающейся гиперболической частью и уравнений с вырождающейся параболической частью – с неоднородностью, представимой в виде произведения функций, зависящих только от пространственной и только от временной переменных, рассмотрены обратные задачи по нахождению решения и одной из функций неоднородности.

В настоящей работе, используя идеи работ [20, 26], для уравнения (1) смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде впервые исследована обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящего от пространственных переменных. Получен критерий единственности решения задачи (2)–(8). Её решение построено в явном виде – как сумм двумерных рядов по ортогональной системе функций. Для этих рядов возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов, которая существенно затрудняет обоснование их сходимости. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости построенных рядов найдены оценки, гарантирующие отделимость от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения, т.е. решения, удовлетворяющего условиям (2), (3). Установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи относительно возмущения граничных функций.

2. Единственность решения задачи. Пусть $u(x, y, t)$ – решение задачи (2)–(8). Введём функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (10)$$

– полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (10) образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Аналогично [4, 10] получим относительно функции (9) дифференциальные уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = g_1(t) f_{mn}, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = g_2(t) f_{mn}, \quad t < 0, \quad (12)$$

здесь

$$\lambda_{mn}^2 = b + \pi^2 \left[\left(\frac{m}{p} \right)^2 + \left(\frac{n}{q} \right)^2 \right], \quad (13)$$

$$f_{mn} = \iint_D f(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Далее в равенстве (13) считаем, что $b = \mu^2 \geq 0$ ($\mu \geq 0$), так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров n и m , правая часть в (13) принимает только положительные значения, т.е., как будет следовать из дальнейшего, знак коэффициента b не влияет на справедливость полученных результатов.

Общие решения уравнений (11) и (12) соответственно следующие [4, с. 75]:

$$u_{mn}(t) = a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)} ds, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$u_{mn}(t) = c_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + d_{mn} \sin(\lambda_{mn} t) - \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}} \int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds, \quad t < 0, \quad (16)$$

здесь a_{mn} , c_{mn} и d_{mn} – произвольные постоянные.

Функции (15) и (16) в силу требования (2) удовлетворяют условиям склеивания

$$u_{mn}(0+0) = u_{mn}(0-0), \quad u'_{mn}(0+0) = u'_{mn}(0-0), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

только тогда, когда $c_{mn} = a_{mn}$, $d_{mn} = -\lambda_{mn} a_{mn} + f_{mn} g_1(0)/\lambda_{mn}$. Вследствие этих равенств функции (15) и (16) принимают вид

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} I(t), & t \geq 0, \\ a_{mn} \delta_{mn}(t) + f_{mn} \omega_{mn}(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

здесь

$$I(t) = \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)} ds, \quad \delta_{mn}(t) = \cos(\lambda_{mn} t) - \lambda_{mn} \sin(\lambda_{mn} t), \quad (18)$$

$$\omega_{mn}(t) = \frac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin(\lambda_{mn} t) - \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds. \quad (19)$$

Чтобы найти постоянные a_{mn} и f_{mn} , воспользуемся сначала граничными условиями (7), (8) и определением (9):

$$u_{mn}(-\alpha) = \iint_D u(x, y, -\alpha) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy =: \psi_{mn}, \quad (20)$$

$$u_{mn}(\beta) = \iint_D u(x, y, \beta) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy =: \varphi_{mn}. \quad (21)$$

Удовлетворяя функции (17) условиям (20) и (21), получаем относительно неизвестных a_{mn} и f_{mn} линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} a_{mn} \delta_{mn}(-\alpha) + f_{mn} \omega_{mn}(-\alpha) = \psi_{mn}, \\ a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 \beta} + f_{mn} I(\beta) = \varphi_{mn}. \end{cases} \quad (22)$$

Обозначим через $\Delta_{mn}(\alpha)$ определитель системы (22), выделяя в обозначении только его зависимость от параметра α , хотя он зависит также и от β , b , p и q . Если этот определитель отличен от нуля, т.е.

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \delta_{mn}(-\alpha)I(\beta) - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \neq 0, \quad (23)$$

то система (22) имеет единственное решение

$$a_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}(-\varphi_{mn}\omega_{mn}(-\alpha) + \psi_{mn}I(\beta)), \quad f_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}(\varphi_{mn}\delta_{mn}(-\alpha) - \psi_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2\beta}). \quad (24)$$

Если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, то коэффициенты a_{mn} и f_{mn} при любых $m, n \in \mathbb{N}$ определяются единственным образом, и поэтому, подставляя их выражения (24) в (17), находим, что функции $u_{mn}(t)$ однозначно задаются формулой

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}[\varphi_{mn}(\delta_{mn}(-\alpha)I(t) - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2t}) + \\ + \psi_{mn}(I(\beta)e^{-\lambda_{mn}^2t} - I(t)e^{-\lambda_{mn}^2\beta})], & t \geq 0, \\ \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}[\varphi_{mn}(\delta_{mn}(-\alpha)\omega_{mn}(t) - \delta_{mn}(t)\omega_{mn}(-\alpha)) + \\ + \psi_{mn}(I(\beta)\delta_{mn}(t) - \omega_{mn}(t)e^{-\lambda_{mn}^2\beta})], & t \leq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Докажем, что решение задачи (2)–(8) единственно, если и только если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$ и выполнены соотношения (23) при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда все $\varphi_{mn} = \psi_{mn} \equiv 0$ и из равенств (24) следует, что $a_{mn} = f_{mn} \equiv 0$. Значит, в силу формул (17), (9), (14) при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$ имеем

$$\iint_D u(x, y, t)v_{mn}(x, y) dx dy = 0, \quad \iint_D f(x, y)v_{mn}(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (10) в $L_2(D)$ следует, что $u(x, y, t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$ и $f(x, y) = 0$ почти всюду в D . Вследствие включений (2) и (3) заключаем, что $u(x, y, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$ и $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Пусть при некотором $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $\Delta_{m_0n}(\alpha) = 0$ или $\Delta_{mn_0}(\alpha) = 0$. Допустим, что $\Delta_{mn_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(8) (где $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{mn_0}(x, y, t) = u_{mn_0}(t)v_{mn_0}(x, y),$$

$$u_{mn_0}(t) = \begin{cases} C_{n_0}e^{-\lambda_{mn_0}^2t} + f_{mn_0}I(t), & t \geq 0, \\ C_{n_0}\delta_{mn_0}(t) + f_{mn_0}\omega_{mn_0}(t), & t \leq 0, \end{cases}$$

$$f_{mn_0}(x, y) = f_{mn_0}v_{mn_0}(x, y), \quad f_{mn_0} = -C_{n_0}\frac{e^{-\lambda_{mn_0}^2\beta}}{I(\beta)},$$

здесь C_{n_0} – произвольная постоянная.

Поэтому возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_{mn}(\alpha)$. Для этого представим его в виде

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \sqrt{1 + \lambda_{mn}^2} \sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn}) \int_0^\beta g_1(s)e^{-\lambda_{mn}^2(\beta-s)} ds - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta}, \quad (26)$$

где $\gamma_{mn} = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_{mn}^2})$. Применяя к интегралу в (26) первую теорему о среднем при условии, что функция $g_1(s)$ отделена от нуля на $[0, \beta]$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{mn}(\alpha) &= \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2} \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn})(1 - e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) - e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \omega_{mn}(-\alpha) = \\ &= \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2} \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \left[\sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn})(1 - e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) - e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \frac{\lambda_{mn}^2 \omega_{mn}(-\alpha)}{g_1(\xi_{mn}) \sqrt{1+\lambda_{mn}^2}} \right],\end{aligned}$$

где $\xi_{mn} \in [0, \beta]$. Множитель вне квадратных скобок при всех m и n отделён от нуля. В выражении в квадратных скобках первое слагаемое относительно α имеет счётное множество нулей. Так как $\omega_{mn}(-\alpha)$ при больших m или n имеет порядок λ_{mn}^{-1} , то второе слагаемое в квадратных скобках является бесконечно малой более высокого порядка, чем первое. Следовательно, выражение $\Delta_{mn}(\alpha)$ имеет счётное множество нулей относительно α при больших m или n .

Таким образом, установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)–(8).

Теорема 1. Если решение задачи (2)–(8) существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех m и n выполнены условия (23).

3. Существование решения задачи. Если выполнены условия (23) и решение задачи (2)–(8) существует, то его можно представить в виде сумм рядов по системе функций (10):

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \quad f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x, y), \quad (27)$$

здесь коэффициенты $u_{mn}(t)$ и f_{mn} определяются по формулам (17) и (24). Так как $\Delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов рядов (27) и, как показано выше, уравнение $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счётное множество нулей при больших m или n , то возникает проблема малых знаменателей более сложной природы, чем в одномерном случае [3; 4, с. 61–66]. В связи с этим для обоснования сходимости рядов (27) необходимо установить оценку, гарантирующую отделённость от нуля величины $\Delta_{mn}(\alpha)$.

Пусть $n \geq m$. Представим $\Delta_{mn}(\alpha)$ в виде

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \Delta_{mn}^{(1)}(\alpha) - \Delta_{mn}^{(2)}(\alpha), \quad (28)$$

где

$$\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha) = \delta_{mn}(\tilde{\alpha}) \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2}, \quad \Delta_{mn}^{(2)}(\alpha) = e^{-\lambda_{mn}^2\beta} (\omega_{mn}(-\alpha) + \Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)), \quad (29)$$

$$\delta_{mn}(\tilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \sin(\pi n \tilde{\alpha} \tilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn}), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{q}, \quad \tilde{\lambda}_{mn} = \sqrt{1 + \left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2}. \quad (30)$$

Лемма 1. Пусть $n \geq m$, функция $g_1(t)$ непрерывна на $[0, \beta]$, $|g_1(t)| \geq \tilde{g}_1 = \text{const} > 0$, отношение q/p рационально и $q/p \leq 1$. Если $\tilde{\alpha}$ – положительное рациональное число, т.е. $\tilde{\alpha} = r/s$, $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$, и выполнено неравенство

$$(2\mu r p q)^2 + (2p)^2 \pi q r s < 3\pi^2,$$

то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$) такие, что при всех $n > n_0$ и любом фиксированном m справедлива оценка

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq C_0 n^{-2}.$$

Доказательство. Согласно работе [26, лемма 1] при выполнении условий леммы существует натуральное число n_1 такое, что при всех $n > n_1$ выполняется неравенство

$$|\delta_{mn}(\tilde{\alpha})| > C_1 > 0,$$

где выражение $\delta_{mn}(\tilde{\alpha})$ определено в (30), а C_i здесь и далее – положительные постоянные. Выражение $\tilde{\lambda}_{mn}$ (см. (30)) представим в виде $\tilde{\lambda}_{mn} = 1 + \theta_{mn}$, при этом для θ_{mn} имеет место оценка

$$\frac{3}{8} \left[\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 \right] < \theta_{mn} < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 \right],$$

так как существует номер n_2 такой, что при $n > n_2$ верно неравенство

$$\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 < 1.$$

Из представления $\lambda_{mn} = \pi n \tilde{\lambda}_{mn} / q$ следует, что

$$|\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)| = |\delta_{mn}(\tilde{\alpha})| \lambda_{mn}^{-2} |g_1(\xi_{mn})| > C_2 n^{-2}.$$

Очевидно, что выражение $\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)$ (см. (29)) является бесконечно малым при $n \rightarrow \infty$, причём существует n_3 такое, что при всех $n > n_3$ справедливо неравенство

$$|\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)| < C_2 n^{-2} / 2.$$

Тогда из представления (28) на основании полученных оценок имеем

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq |\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)| - |\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)| > C_2 n^{-2} / 2 = C_0 n^{-2} > 0$$

при $n > n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что если $m \geq n$ и выполнено неравенство

$$(2\mu r_1 p q)^2 + (2p)^2 \pi p r_1 s_1 < 3\pi^2,$$

где $\tilde{\alpha} = r_1 / s_1$, $r_1, s_1 \in \mathbb{N}$, $(r_1, s_1) = 1$, то для рационального p/q такого, что $p/q \leq 1$, аналогично получаем при всех $m > m_0$ и любом фиксированном n оценку

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq C_0 m^{-2}.$$

В этом случае в качестве числа $\tilde{\alpha}$ берётся отношение α/p .

Лемма 2. Пусть $n \geq m$ и функция $g_1(t)$ непрерывна. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, \beta]$ справедливы оценки

$$|I(t)| \leq C_4 n^{-2}, \quad |I'(t)| \leq C_5, \quad t \in [0, \beta]. \quad (31)$$

Доказательство. Применяя к интегралу $I(t)$ (см. (18)) теорему о среднем, получаем

$$|I(t)| = \left| \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2(t-s)} ds \right| \leq |g_1(\xi_{mn})| \frac{1 - e^{-\lambda_{mn}^2 t}}{\lambda_{mn}^2} \leq C_4 n^{-2}, \quad \xi_{mn} \in [0, t].$$

Так же получим оценку и для производной: $|I'(t)| \leq |g_1(t)| + \lambda_{mn}^2 |I(t)| \leq C_5$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $n \geq m$, функция $g_1(t)$ непрерывна, а функция $g_2(t)$ монотонно возрастает и неотрицательна на $[-\alpha, 0]$. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, 0]$ справедливы оценки

$$|\omega_{mn}(t)| \leq C_6 n^{-1}, \quad |\omega'_{mn}(t)| \leq C_7, \quad |\omega''_{mn}(t)| \leq C_8 n. \quad (32)$$

Доказательство. Применяя вторую теорему о среднем, имеем представления

$$\int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \int_{\xi_1}^0 \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \frac{\cos(\lambda_{mn}(t-\xi_1)) - \cos(\lambda_{mn}t)}{\lambda_{mn}},$$

$$\int_t^0 g_2(s) \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \int_{\xi_2}^0 \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \frac{\sin(\lambda_{mn}(t-\xi_2)) + \sin(\lambda_{mn}t)}{\lambda_{mn}}$$

для некоторых $\xi_1 = \xi_1(t)$ и $\xi_2 = \xi_2(t)$ из отрезка $[t, 0]$. Тогда из равенства (19) вытекают оценки

$$|\omega_{mn}(t)| \leq \frac{|g_1(0)|}{\lambda_{mn}} |\sin(\lambda_{mn}t)| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |g_2(0)| \left| \int_{\xi_1}^0 \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq \frac{|g_1(0)|}{\lambda_{mn}} + \frac{2|g_2(0)|}{\lambda_{mn}^2} \leq C_6 n^{-1},$$

$$\begin{aligned} |\omega'_{mn}(t)| &\leq |g_1(0)| |\cos(\lambda_{mn}t)| + \left| \int_t^0 g_2(s) \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq \\ &\leq |g_1(0)| + |g_2(0)| \left| \int_{\xi_2}^0 \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq |g_1(0)| + \frac{2|g_2(0)|}{\lambda_{mn}} \leq C_7. \end{aligned}$$

Так как $\omega''_{mn}(t) = -\lambda_{mn}^2 \omega_{mn}(t) + g_2(t)$, то на основании оценки для $|\omega_{mn}(t)|$ при $t \in [-\alpha, 0]$ получим третью оценку из (32). Лемма доказана.

Лемма 4. Если выполнены условия леммы 1, то при всех $n > n_0$, $n \geq m$ справедливы оценки

$$|u_{mn}(t)| \leq M_1(n|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}|), \quad |u'_{mn}(t)| \leq M_2(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|), \quad 0 \leq t \leq \beta,$$

$$|u_{mn}^{(i)}(t)| \leq M_{i+3}(n^{i+2}|\varphi_{mn}| + n^{i+1}|\psi_{mn}|), \quad -\alpha \leq t \leq 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$|f_{mn}| \leq M_6(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|),$$

здесь и далее M_i – положительные постоянные.

Доказательство. Для упрощения записи обозначим $|\varphi_{mn}|/\Delta_{mn}(\alpha)$ через $k_{mn}(\alpha)$, а $|\psi_{mn}|/\Delta_{mn}(\alpha)$ через $l_{mn}(\alpha)$. Оценим значение f_{mn} из равенства (24). Используя лемму 1, получаем

$$|f_{mn}| \leq k_{mn}(\alpha)|\delta_{mn}(-\alpha)| + l_{mn}(\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \leq M_6(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|).$$

Оценим выражение $u_{mn}(t)$ при $t \in [0, \beta]$. Из (25) в силу оценок (31) и (32) с учётом лемм 1 и 2 получаем

$$\begin{aligned} |u_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||I(t)| + |\omega_{mn}(-\alpha)|e^{-\lambda_{mn}^2t}) + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)|e^{-\lambda_{mn}^2t} + |I(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(Cn^{-1} + C_{14}n^{-1}) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{15}n^{-3} + C_{16}n^{-2}) \leq M_1(n|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Аналогично получим оценку для $u'_{mn}(t)$, когда $t \in [0, \beta]$:

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||I'(t)| + |\omega_{mn}(-\alpha)|\lambda_{mn}^2e^{-\lambda_{mn}^2t}) + \\ &+ l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)|\lambda_{mn}^2e^{-\lambda_{mn}^2t} + |I'(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{17}n + C_{18}n) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{19} + C_{20}) \leq M_2(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Теперь на основании формулы (25) с учётом оценок (31), (32) и лемм 1 и 2 оценим выражение $u_{mn}(t)$ при $t \in [-\alpha, 0]$:

$$\begin{aligned} |u_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||\omega_{mn}(t)| + |\delta_{mn}(t)||\omega_{mn}(-\alpha)|) + \\ &\quad + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)||\delta_{mn}(t)| + |\omega_{mn}(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{21} + C_{22}) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(n^{-1}C_{23} + n^{-1}C_{24}) \leq M_3(n^2|\varphi_{mn}| + n|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Аналогично оценим выражение $u'_{mn}(t)$ при $t \in [-\alpha, 0]$:

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||\omega'_{mn}(t)| + |\delta'_{mn}(t)||\omega_{mn}(-\alpha)|) + \\ &\quad + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)||\delta'_{mn}(t)| + |\omega'_{mn}(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{25}n + C_{26}n) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{27} + C_{28}) \leq M_4(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Так как $u''_{mn}(t) = -\lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) + f_{mn}g_2(t)$, то на основании оценок для $|u_{mn}(t)|$ при $t \in [-\alpha, 0]$ и f_{mn} получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

В силу леммы 4 первый ряд (27) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{Q}$ и производные второго порядка соответственно в областях $\overline{Q}_+$ и $\overline{Q}_-$ и второй ряд в (27) мажорируются рядом

$$M_7 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n > n_0 \\ n \geq m}} (n^4|\varphi_{mn}| + n^3|\psi_{mn}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m > m_0 \\ m > n}} (m^4|\varphi_{mn}| + m^3|\psi_{mn}|) \right]. \quad (33)$$

Поэтому нам достаточно исследовать на сходимость каждый из двух двойных рядов, входящий в выражение (33).

Для упрощения в дальнейшем записи примем следующие обозначения: через $v_{mn}^0(x, y)$ обозначим функцию, которая получится при замене в функции $v_{mn}(x, y)$ (см. определение (10)) обоих синусов косинусами, через $v_{mn}^1(x, y)$ – функцию, которая получится, если заменить в функции $v_{mn}(x, y)$ первый синус на косинус, а через $v_{mn}^2(x, y)$ – функцию, которая получится, если заменить в функции $v_{mn}(x, y)$ второй синус на косинус.

Лемма 5. Пусть $\varphi(x, y) \in C^6(\overline{D})$ и

$$\varphi(0, y) = \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xxxx}(0, y) = \varphi(p, y) = \varphi_{xx}(p, y) = \varphi_{xxxx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q,$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yyyy}(x, 0) = \varphi(x, q) = \varphi_{yy}(x, q) = \varphi_{yyyy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$\psi(x, y) \in C^5(\overline{D})$ и

$$\psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi(p, y) = \psi''_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q,$$

$$\psi(x, 0) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi(x, q) = \psi_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p.$$

Тогда справедливы представления

$$\varphi_{mn} = \frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi} \right)^5 \varphi_{mn}^{(1,5)} = \frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi} \right)^5 \varphi_{mn}^{(5,1)} \quad \text{и} \quad \psi_{mn} = \frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi} \right)^4 \psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi} \right)^4 \psi_{mn}^{(4,1)},$$

где

$$\varphi_{mn}^{(1,5)} = \iint_D \varphi_{yyyyy} v_{mn}^0(x, y) dx dy, \quad \varphi_{mn}^{(5,1)} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint_D \varphi_{xxxxx} v_{mn}^0(x, y) dx dy,$$

$$\psi_{mn}^{(1,4)} = \iint_D \psi_{yyyy} v_{mn}^1(x, y) dx dy, \quad \psi_{mn}^{(4,1)} = \iint_D \psi_{xxxx} v_{mn}^2(x, y) dx dy,$$

при этом следующие ряды сходятся:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^6 \varphi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=6, \quad (34)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^5 \psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=5. \quad (35)$$

Доказательство. Чтобы получить приведённые в формулировке леммы представления для величин φ_{mn} и ψ_{mn} , достаточно проинтегрировать по частям шесть и пять раз соответственно в формулах (20) и (21) с учётом условий данной леммы. Сходимость указанных рядов следует из неравенства Бесселя, которое имеет место для кратных рядов Фурье [27, с. 333], т.е. неравенства (34) и (35) являются неравенствами Бесселя для производных шестого и пятого порядков соответственно функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Лемма доказана.

На основании этой леммы ряды в (33) мажорируются сходящимися рядами

$$M_{10} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n > n_0 \\ n \geq m}} \frac{1}{nm} (|\varphi_{mn}^{(1,5)}| + |\psi_{mn}^{(1,4)}|) \quad \text{и} \quad M_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m > m_0 \\ m > n}} \frac{1}{nm} (|\varphi_{mn}^{(5,1)}| + |\psi_{mn}^{(4,1)}|).$$

Пусть $p = q$ и выполнены условия леммы 1. Тогда, согласно этой лемме, получаем: $\Delta_{mn}(\alpha) \geq C_0 n^{-2}$, если $n \geq m$ и $n \geq n_0$, и $\Delta_{mn}(\alpha) \geq C_0 m^{-2}$, если $m \geq n$ и $m \geq n_0$. Следовательно, равенство $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ возможно только при $1 \leq m, n \leq n_0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ (конечное) множество тех пар (m,n) , для которых $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$. Тогда, если $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ для чисел $\tilde{\alpha}$, определённых в лемме 1, и $(m,n) \in \mathcal{M}$, то для разрешимости задачи (2)–(8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\varphi_{mn} \delta_{mn}(-\alpha) - \psi_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 \beta} = 0, \quad (m,n) \in \mathcal{M}. \quad (36)$$

Поэтому решение задачи (2)–(8) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,y,t) = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n) \notin \mathcal{M}}}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y) + \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \quad (37)$$

$$f(x,y) = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n) \notin \mathcal{M}}}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x,y) + \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}} f_{mn} v_{mn}(x,y), \quad (38)$$

где функция $u_{mn}(t)$ и число f_{mn} при $(m,n) \notin \mathcal{M}$ задаются соответственно равенствами (25) и (24), а при $(m,n) \in \mathcal{M}$ – равенствами

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} C_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} I(t), & t \geq 0, \\ C_{mn} \delta_{mn}(t) + f_{mn} \omega_{mn}(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad f_{mn} = -C_{mn} \frac{e^{-\lambda_{mn}^2 \beta}}{I(\beta)},$$

здесь C_{mn} – произвольные постоянные.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть постоянные α , p , q , b и функция $g_1(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1, функция $g_2(t)$ – условиям леммы 4, функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – условиям леммы 5. Пусть, кроме того, $p = q$. Тогда, если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при $n = \overline{1, n_0}$ и $m = \overline{1, m_0}$, существует единственное решение задачи (2)–(8) и оно определяется рядами (27); если $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ при некоторых $n = n_1, n_2, \dots, n_k \leq n_0$, то задача (2)–(8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (36) и решение в этом случае определяется рядами (37) и (38).

4. Устойчивость решения задачи. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} = \left(\iint_D u^2(x, y, t) dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u(x, y, t)\|_{C(\overline{Q})} = \max_{\overline{Q}} |u(x, y, t)|,$$

$$\|f(x, y)\|_{W_2^l(D)} = \left(\iint_D \sum_{i,j=0}^l \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \right)^{1/2}, \quad \|f(x, y)\|_{C^l(\overline{D})} = \sum_{i,j=0}^l \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right|,$$

где $l \geq 1$. Устойчивость в терминах введённых выше норм полученного решения задачи (2)–(8) при возмущениях граничных функций вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (27) задачи (2)–(8) справедливы оценки

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} \leq M_{12}(\|\varphi(x, y)\|_{W_2^2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{W_2^1(D)}), \quad (39)$$

$$\|f(x, y)\|_{L_2(D)} \leq M_{13}(\|\varphi(x, y)\|_{W_2^3(D)} + \|\psi(x, y)\|_{W_2^2(D)}), \quad (40)$$

$$\|u(x, y, t)\|_{C(\overline{Q})} \leq M_{14}(\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^3(\overline{D})}), \quad (41)$$

$$\|f(x, y)\|_{C(\overline{Q})} \leq M_{15}(\|\varphi(x, y)\|_{C^5(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})}). \quad (42)$$

Доказательство. Так как система функций (10) ортонормирована в $L_2(D)$, то в силу первого равенства в (27) на основании леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) = \sum_{n \geq m} u_{mn}^2(t) + \sum_{m > n} u_{mn}^2(t) \leq \\ &\leq 2M_3^2 \sum_{n \geq m} (n^4 \varphi_{mn}^2 + n^2 \psi_{mn}^2) + 2M_3^2 \sum_{m > n} (m^4 \varphi_{mn}^2 + m^2 \psi_{mn}^2). \end{aligned} \quad (43)$$

На основании представлений

$$\varphi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi} \right)^2 \varphi_{mn}^{(0,2)} = \left(\frac{p}{m\pi} \right)^2 \varphi_{mn}^{(2,0)}, \quad \psi_{mn} = \frac{q}{n\pi} \psi_{mn}^{(0,1)} = \frac{p}{m\pi} \psi_{mn}^{(1,0)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^{(0,2)} &= \iint_D \varphi_{yy}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, & \varphi_{mn}^{(2,0)} &= \iint_D \varphi_{xx}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, \\ \psi_{mn}^{(0,1)} &= \iint_D \varphi_y(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, & \psi_{mn}^{(1,0)} &= \iint_D \varphi_x(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy \end{aligned}$$

из неравенства (43) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &\leq 2M_3^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{q}{\pi} \right)^4 |\varphi_{mn}^{(0,2)}|^2 + \left(\frac{q}{\pi} \right)^2 |\psi_{mn}^{(0,1)}|^2 \right] + \\ &+ 2M_3^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{p}{\pi} \right)^4 |\varphi_{mn}^{(2,0)}|^2 + \left(\frac{p}{\pi} \right)^2 |\psi_{mn}^{(1,0)}|^2 \right] \leq \\ &\leq M_{12}^2 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}^{(0,2)}|^2 + |\varphi_{mn}^{(2,0)}|^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\psi_{mn}^{(0,1)}|^2 + |\psi_{mn}^{(1,0)}|^2) \right] \leq \\ &\leq M_{12}^2 (\|\varphi(x, y)\|_{W_2^2(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{W_2^1(D)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость оценки (39).

Из второго равенства в (27) на основании леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}^2 = \sum_{n \geq m} f_{mn}^2 + \sum_{m > n} f_{mn}^2 \leq \\ &\leq 2M_6^2 \sum_{n \geq m} (n^6 \varphi_{mn}^2 + n^4 \psi_{mn}^2) + 2M_3^2 \sum_{m > n} (m^6 \varphi_{mn}^2 + m^4 \psi_{mn}^2). \end{aligned} \quad (44)$$

На основании представлений

$$\varphi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(0,3)} = \left(\frac{p}{m\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(3,0)}, \quad \psi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(0,2)} = \left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(2,0)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^{(0,3)} &= \iint_D \varphi_{yyy}(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, & \varphi_{mn}^{(3,0)} &= \iint_D \varphi_{xxx}(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy, \\ \psi_{mn}^{(0,2)} &= \iint_D \psi_{yy}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, & \psi_{mn}^{(2,0)} &= \iint_D \psi_{xx}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

из неравенства (44) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_{L_2(D)}^2 &\leq 2M_6^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{q}{\pi}\right)^6 |\varphi_{mn}^{(0,3)}|^2 + \left(\frac{q}{\pi}\right)^4 |\psi_{mn}^{(0,2)}|^2 \right] + \\ &+ 2M_6^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{p}{\pi}\right)^6 |\varphi_{mn}^{(3,0)}|^2 + \left(\frac{p}{\pi}\right)^4 |\psi_{mn}^{(2,0)}|^2 \right] \leq \\ &\leq M_{13}^2 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}^{(0,3)}|^2 + |\varphi_{mn}^{(3,0)}|^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\psi_{mn}^{(0,2)}|^2 + |\psi_{mn}^{(2,0)}|^2) \right] \leq \\ &\leq M_{13}^2 (\|\varphi(x, y)\|_{W_2^3(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{W_2^2(D)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость оценки (40).

Пусть (x, y, t) – произвольная точка параллелепипеда $\overline{Q}$. Тогда в силу первого равенства в (27) на основании леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| &\leq \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{n \geq m} |u_{mn}(t)| + \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{m > n} |u_{mn}(t)| \leq \\ &\leq \widetilde{M}_1 \sum_{n \geq m} (n^2 |\varphi_{mn}| + n |\psi_{mn}^2|) + \widetilde{M}_1 \sum_{m > n} (m^2 \varphi_{mn} + m \psi_{mn}), \end{aligned} \quad (45)$$

здесь и далее $\widetilde{M}_i$ – положительные постоянные, зависящие от p , q и α . Воспользуемся равенствами

$$\varphi_{mn} = -\frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(3,1)} = -\frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(1,3)}, \quad \psi_{mn} = -\frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(2,1)} = -\frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(1,2)},$$

где

$$\varphi_{mn}^{(3,1)} = \iint_D \varphi_{xxxy}(x, y) v_{mn}^0(x, y) dx dy, \quad \varphi_{mn}^{(1,3)} = \iint_D \varphi_{xyyy}(x, y) v_{mn}^0(x, y) dx dy,$$

$$\psi_{mn}^{(2,1)} = \iint_D \varphi_{xy}(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, \quad \psi_{mn}^{(1,2)} = \iint_D \varphi_{xy}(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy.$$

Тогда, продолжая оценку (45), будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| \leq & \widetilde{M}_1 \sum_{n \geq m} \left(\frac{q^3 p}{\pi^4} \frac{1}{mn} |\varphi_{mn}^{(1,3)}| + \frac{q^2 p}{\pi^3} \frac{1}{mn} |\psi_{mn}^{(1,2)}| \right) + \\ & + \widetilde{M}_1 \sum_{m > n} \left(\frac{p^3 q}{\pi^4} \frac{1}{mn} |\varphi_{mn}^{(3,1)}| + \frac{p^2 q}{\pi^3} \frac{1}{mn} |\psi_{mn}^{(2,1)}| \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского получаем

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| \leq & \widetilde{M}_2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} (|\varphi_{mn}^{(1,3)}| + |\varphi_{mn}^{(3,1)}|) + \widetilde{M}_3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} (|\psi_{mn}^{(1,2)}| + |\psi_{mn}^{(2,1)}|) \leq \\ \leq & \widetilde{M}_2 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn} \right)^2 \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(1,3)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(3,1)}|^2 \right)^{1/2} \right] + \\ & + \widetilde{M}_3 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn} \right)^2 \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(1,2)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(2,1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ \leq & \widetilde{M}_4 \|\varphi(x, y)\|_{W_2^4(D)} + \widetilde{M}_5 \|\psi(x, y)\|_{W_2^3(D)} \leq M_{14} (\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^3(\overline{D})}). \end{aligned}$$

Оценка (41) доказана. Аналогично устанавливается оценка (42). Теорема доказана.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
2. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. II // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1379–1386.
3. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральной задаче из теории парабола-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 4. С. 451.
4. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.
5. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. М., 2016.
6. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435.
7. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Докл. РАН. 2012. Т. 14. № 3. С. 34–44.
8. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356–365.
9. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 12. С. 55–64.
10. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее приложения. 2017. Т. 137. С. 26–60.
11. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type // J. of Math. Sci. 2019. V. 236. № 6. P. 603–640.

12. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1982.
13. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
14. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
15. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel, 1999.
16. *Bukhgeim A.L.* Introduction to the Theory of Inverse Problems. Utrecht, 2000.
17. *Ivanchov M.* Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. Lviv, 2003.
18. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
19. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
20. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. Т. 56. № 4. С. 55–62.
21. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 6. С. 907–918.
22. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.
23. *Сидоров С.Н.* Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. 2014. № 19 (190). Вып. 36. С. 45–57.
24. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.
25. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного парабола-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский мат. журн. 2019. Т. 11. № 1. С. 72–86.
26. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения парабола-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1071–1080.
27. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М., 1987.

Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 15.06.2020 г.
После доработки 21.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.