ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1623–1634

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2021 г. К. Д. Федоров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической по Петровскому однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области Ω на плоскости с криволинейными боковыми границами, негладкими при $t=0$. Доказано существование решения этой задачи в классе $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121120050

Введение. Предметом исследования настоящей работы является первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной модельной параболической системы с одной пространственной переменной в ограниченной области Ω на плоскости с криволинейными боковыми границами (см. ниже условие (1)), допускающими в начальный момент времени $t=0$ наличие "клювов". Решение этой задачи из класса $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ строится методом граничных интегральных уравнений и может быть представлено в виде суммы специальных параболических потенциалов.

Если боковые границы области достаточно гладкие, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0,T]$, где $0<\alpha<1$, то для любых правых частей ψ_k, $k=1,2$, граничного условия первого рода из класса $\underset{0}{H}{}^{1+\alpha/2}[0,T]$, согласно [1], существует единственное решение такой задачи в классе $\underset{0}{H}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

Если боковые границы области – негладкие кривые, принадлежащие классу $H^{(1+\alpha)/2}[0,T]$, то для любых ψ_k, $k=1,2$, имеющих непрерывную дробную производную порядка $1/2$, равную нулю при $t=0$, согласно [2–5], существует единственное регулярное решение первой начально-краевой задачи в классе $\underset{0}{C}{}^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$. Если, кроме того, $\psi_k\in\underset{0}{H}{}^{(1+\alpha)/2}[0,T]$, где $0<\alpha<1$, $k=1,2$, то это решение принадлежит классу $\underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

В настоящей статье доказывается, что (несмотря на негладкость при $t=0$ боковых границ области) существует решение поставленной задачи из класса $\underset{0}{C}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, если граничные функции принадлежат пространству $\underset{0}{C}{}^{1}[0,T]$.

Структура работы следующая. В п. 1 вводятся основные функциональные пространства, ставится первая начально-краевая задача и формулируется основная теорема. В п. 2 исследуется гладкость специального параболического потенциала. В п. 3 изучается вопрос об однозначной разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируется исходная задача. В п. 4 приводится доказательство теоремы о существовании решения поставленной задачи в классе $\widehat{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ (см. п. 1). В п. 5 показывается, что для любой функции из $\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ её следы на боковых границах области Ω принадлежат классу $\underset{0}{C}{}^{1}[0,T]$.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Фиксируем $T>0$ и $m\in\mathbb{N}$. Введём нужные в дальнейшем нормированные пространства: $C[0,T]$ – пространство непрерывных (вектор-)функций $\psi:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0:=\max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$

и его подпространство $\underset{0}{C}[0,T] := \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$, а также пространство $C^1[0,T] :=$ $:= \{\psi \in C[0,T] : \psi' \in C[0,T]\}$ с нормой $\|\psi;[0,T]\|^1 := \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\psi';[0,T]\|^0$ и его подпространство $\underset{0}{C}{}^1[0,T] := \{\psi \in C^1[0,T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\quad 0 < t \leqslant T\}.$$

Пусть Ω – произвольная область в D. Через $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим нормированное пространство (вектор-)функций u, непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми по x, t и второй по x производными, с нормой

$$\|u;\Omega\|^{2,1} := \sum_{k=0}^{2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|.$$

Введём пространство $\widehat{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : \|u;\Omega\|^{(2)} < \infty\}$, где

$$\|u;\Omega\|^{(2)} := \|u;\Omega\|^{2,1} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega\\ |\Delta t|\neq 0}} |\Delta_t u_x(x,t)||\Delta t|^{-1/2},$$

и его подпространство

$$\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) := \{u \in \widehat{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : u(x,0) = u_x(x,0) = u_{xx}(x,0) = u_t(x,0) = 0\}.$$

Под значениями (вектор-)функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Под принадлежностью вектор-функции некоторому функциональному пространству понимается принадлежность всех её компонент этому пространству.

Для любой числовой матрицы B (или числового вектора b) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей её элементов (его компонент).

Рассмотрим область Ω следующего вида:

$$\Omega := \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t),\quad 0 < t < T\}$$

– криволинейную трапецию с боковыми сторонами $\Sigma_k := \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$,

$$g_k \in C[0,T] \bigcap C^1(0,T],\quad |g_k'(t)| \leqslant \omega(t^{1/2})t^{-1/2},\quad 0 < t \leqslant T,\quad k = 1,2, \tag{1}$$

где ω – некоторый модуль непрерывности, и

$$g_2(t) - g_1(t) \geqslant d > 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Модулем непрерывности, следуя [6, с. 150–151], называем неубывающую непрерывную функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, являющуюся полуаддитивной (т.е. $\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) +$ $+ \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0,+\infty)$) и равную нулю в нуле.

Отметим известные свойства модуля непрерывности (см., например, [6, с. 151–153]):

1) при любом $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\omega(nz) \leqslant n\omega(z)$, где $z > 0$;

2) функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, т.е. $\omega(z_2)/z_2 \leqslant 2\omega(z_1)/z_1$, если $z_2 \geqslant z_1 > 0$;

3) для любого числа $c > 0$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\omega(|x|)\exp\{-cx^2/t\} \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-cx^2/2t\}\quad \text{для}\quad x \in \mathbb{R},\quad t > 0.$$

Рассмотрим параболический по Петровскому (см. [7]) матричный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}},$$

где $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ – $m \times m$-матрица, элементы которой являются вещественными числами и для собственных чисел μ_k которой выполнено условие $\operatorname{Re}\mu_r > 0, \quad r = \overline{1,m}$.

Фундаментальной матрицей решений системы $Lu = 0$ является функция $Z(x-\xi, t-\tau)$, $(x,t),(\xi,\tau) \in \overline{D}$, $t > \tau$ (см., например, [8, с. 296–297]), где

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp\{-\sigma^2 At\}\, d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^{l+k}}{\partial t^l \partial x^k} Z(x,t)\right| \leqslant C_{k,l} t^{-(1+2l+k)/2} \exp\{-cx^2/t\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k,l \geqslant 0, \tag{3}$$

где $C_{k,l}$ и c – некоторые положительные постоянные.

Ставится задача: найти функцию $u \in C(\overline{\Omega})$, являющуюся регулярным решением первой начально-краевой задачи

$$Lu = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{5}$$

$$u|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2. \tag{6}$$

Обозначим

$$Y_k(x,t) := \int\limits_0^{\infty} Z(x + (-1)^{k+1} r, t)\, dr, \quad (x,t) \in \overline{D}, \quad k = 1,2. \tag{7}$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых* $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$ *решением задачи (4)–(6) является сумма потенциалов*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_0^t Y_k(x - g_k(\tau), t-\tau)\varphi_k(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{8}$$

где вектор-функция $(\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$, *принадлежащая пространству* $\underset{0}{C}[0,T]$, *– единственное в* $C[0,T]$ *решение системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода*

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_0^t Y_k(g_l(t) - g_k(\tau), t-\tau)\varphi_k(\tau)\, d\tau = \psi_l(t), \quad t \in [0,T], \quad l = 1,2. \tag{9}$$

При этом $u \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)} \leqslant C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1). \tag{10}$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, A, Σ_k, m, и конкретный вид которых для нас не важен.

Замечания.

1. При $m = 1$ имеем случай одного уравнения и регулярное решение задачи (4)–(6) является единственным в классе $C(\overline{\Omega})$ (см., например, [9]).

2. Если $g_k \in H^{1/2+\omega_1}([0,T])$, $k=1,2$, т.е. если

$$|\Delta_t g_k(t)| \leqslant |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{11}$$

где функция ω_1 удовлетворяет *условию Дини*

$$\widetilde{\omega}_1(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt < \infty, \quad x > 0, \tag{12}$$

то из [10] вытекает, что регулярное решение первой начально-краевой задачи существует в классе $\underset{0}{C}{}^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$. В частном случае $\omega_1(z) = z^\alpha$, $0<\alpha<1$, единственность регулярного решения в классе $\underset{0}{C}{}^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ следует из [4, 5].

3. Если в условии (1) предположить, что модуль непрерывности $\omega = \omega_1$ удовлетворяет условию Дини (12), то g_k удовлетворяют условию Дини–Гёльдера (11).

4. Потенциалы вида (7) были ранее введены в [11, 12] для получения гладкого решения второй начально-краевой задачи в полуограниченной области с боковой границей из класса $H^{(1+\alpha)/2}([0,T])$, где $0<\alpha<1$.

Кроме того, в работе доказывается следующее

Утверждение. *Если* $u \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, *то* $\psi_k \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$, *где* $\psi_k(t) = u(g_k(t),t)$, $k=1,2$.

2. Специальный параболический потенциал. Пусть $\Sigma := \{(x,t)\in\overline{D} : x = g(t)\}$,

$$g \in C[0,T]\bigcap C^1(0,T], \quad |g'(t)| \leqslant \omega(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{13}$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Заметим, что из условия (13) следует неравенство

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant 2|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2}), \quad 0\leqslant t, \quad t+\Delta t \leqslant T.$$

Рассмотрим множества

$$D_+ := \{(x,t)\in D : x > g(t)\}, \quad D_- := \{(x,t)\in D : x < g(t)\}$$

и, следуя [11], определим для (вектор-)плотности $\varphi \in C[0,T]$ *специальные параболические потенциалы* $S_+\varphi$ и $S_-\varphi$ формулами

$$S_+\varphi(x,t) := \int\limits_0^t Y_1(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}_+,$$

$$S_-\varphi(x,t) := \int\limits_0^t Y_2(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}_-,$$

где функции $Y_k(x,t)$, $k=1,2$, определены формулой (7).

Заметим, что для любых $\varphi\in C[0,T]$ и функции g, удовлетворяющей условию (13), имеют место соотношения

$$S_\pm\varphi \in C^{2,1}_{x,t}(D_\pm), \quad L(S_\pm\varphi) = 0 \quad \text{в} \quad D_\pm.$$

Здесь и далее выбор знаков “$+$” или “$-$” соответственный.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi\in C[0,T]$ *и функция* g *удовлетворяет условию (13). Тогда справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^k S_\pm\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad k=0,1, \quad (x,t)\in\overline{D}_\pm, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_\pm\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D_\pm, \tag{15}$$

$$\left|\Delta_t\frac{\partial S_\pm\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in \overline{D}_\pm. \tag{16}$$

Если $\varphi\in \underset{0}{C}[0,T]$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 S_\pm\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in D_\pm, \tag{17}$$

где ω_φ *– модуль непрерывности функции* φ *на* $[0,T]$.

Доказательство. Неравенство (14) непосредственно следует из определения (7) и оценки (3).

Для доказательства оценок (15)–(17) предварительно заметим, что

$$\frac{\partial S_\pm\varphi}{\partial x}(x,t) = \mp\int\limits_0^t Z(x-g(\tau),t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}_\pm.$$

Без ограничения общности рассматриваем $S_+\varphi$ при $(x,t)\in D_+$.

Докажем оценку (15). Имеем

$$\frac{\partial^2 S_+\varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\int\limits_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau)-\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(t),t-\tau)\right)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv I_1(x,t)+I_2(x,t).$$

Из представления (см. [13])

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t) = -\frac{x}{2t}A^{-1}Z(x,t), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \tag{18}$$

следует оценка

$$|I_1(x,t)|\leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\frac{x-g(t)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-c\frac{(x-g(t))^2}{t-\tau}\right\}d\tau\leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D_+.$$

В силу условия (13) получаем, что

$$|I_2(x,t)|\leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\frac{|g(t)-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau\leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t\frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}\tau^{1/2}}\,d\tau\leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D_+.$$

Если, кроме того, $\varphi(0)=0$, то, используя неравенство

$$|\varphi(\tau)|=|\varphi(\tau)-\varphi(0)|\leqslant\omega_\varphi(\tau)\leqslant\omega_\varphi(t),$$

приходим к оценке (17).

Докажем оценку (16). При $\Delta t \geqslant t$ она следует из оценки (14) для $k = 1$. В случае $\Delta t < t$ положим

$$\Delta_t \frac{\partial S_+\varphi}{\partial x}(x,t) = -\int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} Z(x-g(\tau), t+\Delta t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} Z(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{0}^{t-\Delta t} \Delta_t Z(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv J_1(x,t,\Delta t) + J_2(x,t,\Delta t) + J_3(x,t,\Delta t).$$

Интегралы J_1 и J_2 оцениваются аналогично. Оценим, например, J_2:

$$|J_2(x,t,\Delta t)| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t) \in \overline{D}_+.$$

Остаётся оценить интеграл J_3, имеем

$$|J_3(x,t,\Delta t)| \leqslant C\|\varphi\|^0 |\Delta t| \int\limits_{0}^{t-\Delta t} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t) \in \overline{D}_+.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *и функция* g *удовлетворяет условию (13). Тогда для любого* $t^0 \in [0,T]$ *имеют место соотношения*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in D_+}} \frac{\partial^2 S_+\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) + \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in D_-}} \frac{\partial^2 S_-\varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) + \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (19), поскольку формула (20) получается аналогично. Если $t^0 = 0$, то (19) следует из оценки (17). Фиксируем произвольно $t^0 \in (0,T]$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $t \in [t^0/2, T]$. Для любого $0 < \delta < t^0/2$ имеем

$$\int\limits_0^t \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \Biggl(\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^t\Biggr) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv I_1(x,t;\delta) + I_2(x,t;\delta).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t), \quad (x,t) \in D_+.$$

Оценим интеграл I_1, повторяя доказательство неравенств (15) и (17):

$$|I_1(x,t;\delta)| \leqslant \int\limits_0^\delta \left|\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau), t-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))\right| d\tau \leqslant C\omega_\varphi(\delta), \quad (x,t) \in D_+.$$

Положим

$$I_3(t;\delta) = \int\limits_0^\delta \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Из условия (13) и представления (18) следует, что

$$|I_3(t;\delta)| \leqslant C \int\limits_0^\delta \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}|\varphi(\tau)|\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\omega(\delta^{1/2}), \quad t\in[t^0/2, T].$$

Фиксируем такое $\delta = \delta(\varepsilon, t^0) \in (0, t^0/2)$, чтобы выполнялось неравенство

$$|I_1(x,t;\delta)| + |I_3(t;\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x,t)\in D_+, \quad t\in[t^0/2, T]. \tag{21}$$

Для выбранного δ рассмотрим интеграл

$$I_2(x,t;\delta) = -\int\limits_0^{t-\delta} \frac{\partial Z}{\partial x}(x-\widetilde{g}(\tau), t-\delta-\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau,$$

где $\widetilde{g}(\tau) = g(\tau+\delta)$, $\widetilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau+\delta)$. Так как $\widetilde{g}\in C^1[0, T-\delta]$ и $\widetilde{g}(t^0-\delta) = g(t^0)$, то в силу формулы "скачка" для производной потенциала простого слоя (см. [13]) будем иметь

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in D_+}} I_2(x,t;\delta) = \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) - \int\limits_0^{t^0-\delta} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-\widetilde{g}(\tau), t^0-\delta-\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) - \int\limits_\delta^{t^0} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

и поэтому существует $\delta_1 = \delta_1(\delta,\varepsilon,t^0) \in (0,\delta)$, при котором

$$\left| I_2 - \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) - \int\limits_\delta^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $|x-g(t^0)| < \delta_1$, $|t-t^0| < \delta_1$. Тогда из неравенства (21) заключаем, что

$$\left| \frac{\partial^2 S_+\varphi}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t^0) - \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right| < \varepsilon,$$

если $|x-g(t^0)| < \delta_1$, $|t-t^0| < \delta_1$. Отсюда вытекает соотношение (19). Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 2. *Пусть для функции g выполнено условие (13). Тогда для любой $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ потенциал $S_\pm\varphi$ принадлежит пространству $\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_\pm)$ и имеют место оценки*

$$\|S_\pm\varphi; D_\pm\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0. \tag{22}$$

3. Система граничных интегральных уравнений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых* $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$ *система интегральных уравнений Вольтерры первого рода*

$$\sum_{k=1}^{2} \int_0^t Y_k(g_l(t) - g_k(\tau), t-\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau = \psi_l(t), \quad l = 1,2, \quad t \in [0,T], \tag{23}$$

имеет единственное в $C[0,T]$ *решение* $(\varphi_1, \varphi_2)^{\text{т}} \in \underset{0}{C}[0,T]$ *и справедливы оценки*

$$\|\varphi_l\|^0 \leqslant C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1,2. \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение в системе (23):

$$\int_0^t \varphi_1(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t-\tau)\,dr +$$

$$+ \int_0^t \varphi_2(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_2(\tau) - r, t-\tau)\,dr = \psi_1(t), \quad t \in [0,T].$$

Дифференцируя обе его части, получаем вследствие условий (1), (2) и равенства

$$\int_0^{+\infty} Z(r, t-\tau)\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Z(r, t-\tau)\,dr = \frac{1}{2}E,$$

где E – единичная матрица, уравнение Вольтерры второго рода

$$\varphi_1(t) + 2\sum_{j=1}^{2} \int_0^t K_{1j}(t,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau = 2\psi_1'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

в котором

$$K_{1j}(t,\tau) = \int_0^{+\infty} (g_1'(t) Z_x(g_1(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1} r, t-\tau) + Z_t(g_1(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1} r, t-\tau))\,dr \equiv$$

$$\equiv I_j^{(1)}(t,\tau) + I_j^{(2)}(t,\tau), \quad j = 1,2.$$

Для ядер $K_{1j}(t,\tau)$, $j = 1,2$, справедливы оценки

$$|K_{1j}(t,\tau)| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad j = 1,2. \tag{25}$$

Действительно, имеем

$$|I_j^{(1)}(t,\tau)| = |g_1'(t) Z(g_1(t) - g_j(\tau), t-\tau)| \leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad j = 1,2,$$

$$|I_1^{(2)}(t,\tau)| = |AZ_x(g_1(t) - g_1(\tau), t-\tau)| \leqslant C\frac{|g_1(t) - g_1(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}},$$

$$
\begin{gathered}
|I_2^{(2)}(t,\tau)| = |AZ_x(g_1(t)-g_2(\tau),t-\tau)| \leqslant \\
\leqslant C\{|Z_x(g_1(t)-g_2(t),t-\tau)| + |Z_x(g_1(t)-g_2(\tau),t-\tau) - Z_x(g_1(t)-g_2(t),t-\tau)|\} \leqslant \\
\leqslant C\left\{\frac{1}{t-\tau}\exp\left\{-c\frac{d^2}{t-\tau}\right\} + \frac{|g_2(t)-g_2(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\right\} \leqslant \\
\leqslant C\left\{1 + \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\right\} \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.
\end{gathered}
$$

Для второго уравнения системы (23) аналогично получаем равенство

$$
\varphi_2(t) + 2\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t K_{2j}(t,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau = 2\psi_2'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
$$

в котором

$$
\begin{gathered}
K_{2j}(t,\tau) = \int\limits_0^{+\infty} (g_2'(t)Z_x(g_2(t)-g_j(\tau)+(-1)^{j+1}r,t-\tau) + \\
+ Z_t(g_2(t)-g_j(\tau)+(-1)^{j+1}r,t-\tau))\,dr, \quad j=1,2,
\end{gathered}
$$

причём справедливы оценки

$$
|K_{2j}(t,\tau)| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad j=1,2. \tag{26}
$$

В результате в силу включений $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$ получаем эквивалентную (23) систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$
\varphi_l(t) + 2\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t K_{lj}(t,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau = 2\psi_l'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad l=1,2. \tag{27}
$$

Умножая обе части уравнений из системы (27) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже, получаем эквивалентную систему

$$
\varphi_l^*(t) + \sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t K_{lj}^*(t,\tau)\varphi_j^*(\tau)\,d\tau = \psi_l^*(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad l=1,2, \tag{28}
$$

здесь

$$
\varphi_i^*(t) := \varphi_i(t)e^{-\lambda t}, \quad \psi_i^*(t) := 2\psi_i'(t)e^{-\lambda t}, \quad K_{ij}^*(t,\tau) := 2K_{ij}(t,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad i,j=1,2.
$$

Введём обозначения

$$
\mathcal{B}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}^* & \mathcal{B}_{12}^* \\ \mathcal{B}_{21}^* & \mathcal{B}_{22}^* \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix},
$$

где

$$
\mathcal{B}_{ij}^*\varphi_j^*(t) = \int\limits_0^t K_{ij}^*(t,\tau)\varphi_j^*(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i,j=1,2,
$$

и запишем систему (28) в операторном виде

$$\varphi^* + \mathcal{B}_\lambda \varphi^* = \psi^*. \tag{29}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{B}_\lambda : C[0,T] \to C[0,T]$ является сжимающим при достаточно большом $\lambda > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $0 < t \leqslant \varepsilon^2$, то в силу оценок (25), (26) имеем

$$|\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \int\limits_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \leqslant C\omega(\varepsilon)\|\varphi^*\|^0.$$

Если $t > \varepsilon^2$, то

$$|\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \left\{ \int\limits_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau + \int\limits_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \right\} \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}} \right\}.$$

В итоге получаем оценку

$$|\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| \leqslant C\|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}} \right\}.$$

Фиксируя сначала $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $C\omega(\varepsilon) < 1/4$, а затем выбирая $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$C\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}} < \frac{1}{4},$$

получаем, что $\|\mathcal{B}_\lambda\| < 1/2$. Следовательно, уравнение (29) имеет единственное решение

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix} \in C[0,T]$$

и справедливы оценки

$$\|\varphi_i^*\|^0 \leqslant C(\|\psi_1^*\|^1 + \|\psi_2^*\|^1), \quad i = 1,2.$$

Наконец, из вида системы (28) и условий $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$ следует, что $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in \underset{0}{C}[0,T]$. Возвращаясь к первоначальным функциям φ_1, φ_2, получаем утверждение теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 1. Ищем решение $u(x,t)$ задачи (4)–(6) в виде суммы потенциалов (8) с плотностями $\varphi_1, \varphi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$, подлежащими определению. Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in C[0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4) и начальному условию (5). Подставляя выражения (8) в граничные условия (6), для определения неизвестных плотностей φ_k, $k = 1,2$, получаем систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода (9). Из теоремы 3 следует, что эта система имеет единственное решение $(\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{т}} \in \underset{0}{C}[0,T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi_l\|^0 \leqslant C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1,2. \tag{30}$$

Подставляя решение системы (9) в выражение (8), получаем, что определённая таким образом функция $u(x,t)$ является решением задачи (4)–(6). При этом в силу теоремы 2 и неравенств (30) справедливо включение $u \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и верна оценка (10). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство утверждения. Пусть u – произвольная функция из класса $\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и $\psi_k(t) = u(g_k(t), t)$, $k = 1, 2$. Докажем, что $\psi_1 \in \underset{0}{C}{}^1[0, T]$ (для ψ_2 доказательство аналогично). Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(t) = u(g_1(t) + 1/n, t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n < d$. Имеем: $\varphi_n \in \underset{0}{C}[0, T]$, последовательность функций $(\varphi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к функции $\psi_1(t)$ на отрезке $[0, T]$ и

$$\varphi'_n(t) = g'_1(t) u_x(g_1(t) + 1/n, t) + u_t(g_1(t) + 1/n, t), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу включения $u \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ последовательность производных $(\varphi'_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к функции $g'_1(t) u_x(g_1(t), t) + u_t(g_1(t), t)$ равномерно на любом отрезке $[\delta, T]$, где $\delta \in (0, T)$. Поэтому при $t \in (0, T]$ существует непрерывная производная

$$\psi'_1(t) = g'_1(t) u_x(g_1(t), t) + u_t(g_1(t), t).$$

Докажем, что $\lim\limits_{t \to +0} \psi'_1(t) = 0$. В самом деле, пусть $t > 0$. Если $g_1(0) \leqslant g_1(t)$, то

$$|u_x(g_1(t), t)| = |u_x(g_1(t), t) - u_x(g_1(t), 0)| \leqslant \|u\|^{(2)} t^{1/2}.$$

Если $g_1(0) > g_1(t)$, то

$$|u_x(g_1(t), t)| \leqslant |u_x(g_1(t), t) - u_x(g_1(0), t)| + |u_x(g_1(0), t) - u_x(g_1(0), 0)| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{xx}(g_1(t) + \Theta(g_1(0) - g_1(t)), t)| |g_1(0) - g_1(t)| + \|u\|^{(2)} t^{1/2} \leqslant C \|u\|^{(2)} t^{1/2},$$

где $\Theta \in (0, 1)$. Таким образом,

$$|g'_1(t) u_x(g_1(t), t)| \leqslant C \|u\|^{(2)} \omega(t^{1/2}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{t \to +0} u_t(g_1(t), t) = 0$, имеем включение $\psi_1 \in \underset{0}{C}{}^1[0, T]$. Утверждение доказано.

Отметим, что в формулировке утверждения можно опустить условие $u_{xx}(x, 0) = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
4. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
5. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
6. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
7. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

9. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
10. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coeffcients // Appl. Anal. 2019. https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1698733.
11. *Семаан Х.М.* О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей // Деп. в ВИНИТИ РАН. 26.02.99. № 567-В99.
12. *Семаан Х.М.* О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1999.
13. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-В88.

Московский государственный университет
им М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 06.08.2021 г.
После доработки 06.08.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.