ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1635–1643

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:532

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Ф. Г. Хуштова

Рассматривается третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка. Доказаны теоремы существования и единственности. Представление решения найдено в терминах свёртки Лапласа функции Райта и функции типа Миттаг-Лёффлера со степенными множителями. Единственность решения доказана в классе функций быстрого роста.

DOI: 10.31857/S0374064121120062

Введение. *Оператор* D_{ay}^{ν} *дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля* порядка $\nu \in \mathbb{R}$ с началом в точке a и с концом в точке y определяется следующим образом [1–3]:

$$D_{ay}^{\nu}g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_a^y \frac{g(t)}{|y-t|^{\nu+1}}\,dt, \quad \text{если} \quad \nu<0,$$

$$D_{ay}^{\nu}g(y) = g(y), \quad \text{если} \quad \nu = 0,$$

$$D_{ay}^{\nu}g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a)\frac{d^n}{dy^n}D_{ay}^{\nu-n}g(y), \quad \text{если} \quad n-1<\nu\leqslant n, \quad n\in\mathbb{N},$$

а *регуляризованная дробная производная* (*производная Капуто*) ∂_{0y}^{ν} задаётся равенством [2, с. 11; 3, с. 14]

$$\partial_{0y}^{\nu}g(y) = D_{0y}^{\nu-n}g^{(n)}(y), \quad n-1<\nu\leqslant n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Производная Капуто также известна под названием *производной Герасимова–Капуто* [4, с. 9; 5, с. 12].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha}u(x,y) = 0, \tag{1}$$

которое называется *уравнением диффузии дробного порядка*, если $0<\alpha\leqslant 1$, и *волновым уравнением дробного порядка*, если $1<\alpha<2$, или в общем случае – *диффузионно-волновым уравнением* [3, с. 103].

Интерес к изучению уравнений вида (1) вызван их многочисленными приложениями при математическом моделировании процессов, протекающих во фрактальных средах [6–9].

Различные краевые задачи для уравнения (1) при $0<\alpha<2$, а также для многомерных его обобщений обстоятельно исследованы в работах многих авторов (см., например, [10–23] и библиографию в них).

Далее в работе будем полагать $0<\alpha\leqslant 1$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $u, u_x \in C(\overline{\Omega})$, u_{xx}, $\partial_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega)$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача А. Найти регулярное в полуполосе

$$\Omega = \{(x,y): 0<x<\infty, \ \ 0<y<T\}$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=0, \quad 0<x<\infty, \tag{2}$$

$$u_x(0,y)=hu(0,y)-\nu(y),\quad 0<y<T, \tag{3}$$

где $\nu(y)$ и h – заданные функция и постоянная.

При $\alpha=1$ данная задача переходит в третью краевую задачу на полуограниченной прямой для уравнения теплопроводности [24, с. 234]. По аналогии с этим назовём её *третьей краевой задачей* для уравнения диффузии дробного порядка.

Вспомогательные сведения. Далее будем обозначать как через $f(y)*g(y)$, так и через $(f*g)(y)$ свёртку Лапласа функций $f(y)$ и $g(y)$, т.е. функцию, определяемую равенством

$$f(y)*g(y)=\int\limits_0^y f(t)g(y-t)\,dt.$$

Из определения оператора дробного интегро-дифференцирования следуют равенства

$$D^{\nu}_{0y}(f*g)(y)=D^{\nu}_{0y}f(y)*g(y)=f(y)*D^{\nu}_{0y}g(y),\quad \nu<0, \tag{4}$$

$$\partial^{\nu}_{0y}(f*g)(y)=(f*\partial^{\nu}_{0y}g)(y)+D^{\nu-1}_{0y}f(y)\lim_{y\to0}g(y),\quad 0<\nu\leqslant1. \tag{5}$$

Для всех $g(y)\in AC[a,b]$ справедлива формула [2, с. 11; 3, с. 14]

$$D^{\nu}_{0y}g(y)=\frac{g(0)y^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}+\partial^{\nu}_{0y}g(y),\quad 0<\nu<1. \tag{6}$$

Здесь $AC[a,b]$ – класс абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. При $\nu=1$ имеем

$$D^1_{0y}g(y)=\partial^1_{0y}g(y)=g'(y).$$

Функцией типа Миттаг-Лёффлера называется функция, определяемая рядом [25, с. 117]

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho)},\quad \rho>0. \tag{7}$$

Для этой функции в работе [25] принято обозначение $E_\sigma(z;\mu)$. Её представление совпадает с рядом (7), если положить в последнем $\rho=1/\sigma$. Ниже в этой работе будем придерживаться обозначения (7), которое в настоящее время получило широкое распространение.

Известно [26, с. 101], что если $\rho<1$, $\rho\leqslant\mu$, то

$$E_{\rho,\mu}(-y)>0,\quad y>0. \tag{8}$$

Справедлива формула [25, с. 118]

$$E_{\rho,\mu}(z)=1/\Gamma(\mu)+zE_{\rho,\mu+\rho}(z). \tag{9}$$

Для любого $\mu>0$ и $\nu\in\mathbb{R}$ выполняется равенство [3, с. 15]

$$D^{\nu}_{0y}y^{\mu-1}E_{\rho,\mu}(\lambda y^\rho)=y^{\mu-\nu-1}E_{\rho,\mu-\nu}(\lambda y^\rho). \tag{10}$$

В случае, когда $\nu\in\mathbb{N}$, значение μ может быть произвольным.

Имеет место представление [27]

$$E_{1/2,1/2}(-z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}-ze^{z^2}\,\mathrm{erfc}\,(z), \tag{11}$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительный интеграл вероятности, т.е.

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z}^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Функцией Райта называется функция, определяемая рядом [28, 29]

$$\phi(\rho, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k + \delta)}, \quad \rho > -1. \tag{12}$$

Известно [30], что если $\delta \geqslant 0$, то

$$y^{\delta-1}\phi(\rho, \delta; -y^{\rho}) > 0, \quad y > 0. \tag{13}$$

Справедлива формула [28]

$$\frac{d}{dz}\phi(\rho, \delta; z) = \phi(\rho, \delta + \rho; z). \tag{14}$$

Для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство [3, с. 25]

$$D_{0y}^{\nu} y^{\delta-1}\phi(\rho, \delta; -\lambda y^{\rho}) = y^{\delta-\nu-1}\phi(\rho, \delta - \nu; -\lambda y^{\rho}), \quad \lambda > 0. \tag{15}$$

При $y \to \infty$ имеет место асимптотическое представление [31]

$$\phi(-\rho, \delta; -y) = Y^{1/2-\delta} e^{-Y} \left(\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M}) \right), \tag{16}$$

где $Y = (1-\rho)(\rho^{\rho} y)^{1/(1-\rho)}$, A_m – константы, зависящие от ρ и δ.

Известно [3, с. 88], что

$$\sqrt{\pi}\phi(-1/2, 1/2; -z) = \exp(-z^2/4). \tag{17}$$

Основные результаты. Примем обозначения: $\beta = \alpha/2$,

$$K_{\beta}(x, y) = y^{\beta-1}\phi(-\beta, \beta; -xy^{-\beta}), \quad E(y) = y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-hy^{\beta}), \tag{18}$$

$$\widetilde{K}(x, y) = K_{\beta}(x, y) - hK_{\beta}(x, y) * E(y). \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть* $\nu(y) \in C[0, T]$, $\nu(0) = 0$. *Тогда функция*

$$u(x, y) = \int\limits_{0}^{y} \widetilde{K}(x, y - \eta)\nu(\eta)\, d\eta \tag{20}$$

является решением задачи A.

Доказательство проводится непосредственной проверкой, т.е. показывается, что функция (20) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3).

Дифференцируемость под знаком интеграла следует из непрерывности подынтегральных функций и оценки (16). Запишем равенство (20) в виде

$$u(x, y) = \nu(y) * \widetilde{K}(x, y) \tag{21}$$

и преобразуем функцию $\widetilde{K}(x, y)$. В силу равенства (15) представим функцию $K_{\beta}(x, y)$ в виде

$$K_{\beta}(x, y) = D_{0y}^{-\beta} K(x, y) = K(x, y) * (y^{\beta-1}/\Gamma(\beta)),$$

где
$$K(x,y)=y^{-1}\phi(-\beta,0;-xy^{-\beta}). \tag{22}$$
Тогда из (19) и (4) следует, что
$$\widetilde{K}(x,y)=K_\beta(x,y)-hK(x,y)*D_{0y}^{-\beta}E(y).$$
Согласно формулам (10) и (9) имеем
$$hD_{0y}^{-\beta}E(y)=hy^{2\beta-1}E_{\beta,2\beta}(-hy^\beta)=y^{\beta-1}/\Gamma(\beta)-E(y).$$
Таким образом,
$$\widetilde{K}(x,y)=K(x,y)*E(y). \tag{23}$$

Продифференцируем обе части равенства (21) по x, учитывая представление (23) и используя формулу (14). Получим
$$u_x(x,y)=\nu(y)*\widetilde{K}_x(x,y), \tag{24}$$
где
$$\widetilde{K}_x(x,y)=K_x(x,y)*E(y), \tag{25}$$
$$K_x(x,y)=-y^{-\beta-1}\phi(-\beta,-\beta;-xy^{-\beta}). \tag{26}$$
Продифференцировав по x равенство (24), будем иметь
$$u_{xx}(x,y)=\nu(y)*\widetilde{K}_{xx}(x,y), \tag{27}$$
где
$$\widetilde{K}_{xx}(x,y)=K_{xx}(x,y)*E(y),\quad K_{xx}(x,y)=y^{-2\beta-1}\phi(-\beta,-2\beta;-xy^{-\beta}).$$

Применив оператор ∂_{0y}^α к равенству (21), в силу (5) найдём, что
$$\partial_{0y}^\alpha u(x,y)=\nu(y)*\partial_{0y}^\alpha\widetilde{K}(x,y)+D_{0y}^{\alpha-1}\nu(y)\lim_{y\to0}\widetilde{K}(x,y), \tag{28}$$
где
$$\partial_{0y}^\alpha\widetilde{K}(x,y)=E(y)*\partial_{0y}^\alpha K(x,y)+D_{0y}^{\alpha-1}E(y)\lim_{y\to0}K(x,y).$$
Из (16) следует, что
$$\lim_{y\to0}K(x,y)=0,\quad \lim_{y\to0}\widetilde{K}(x,y)=0. \tag{29}$$
Тогда из (6), (15) и (29) вытекает равенство
$$\partial_{0y}^\alpha K(x,y)=y^{-2\beta-1}\phi(-\beta,-2\beta;-xy^{-\beta}).$$

Подставляя выражения (27) и (28) в уравнение (1) и учитывая соотношения (29), видим, что равенство (1) обращается в тождество.

Выполнимость условия (2) следует из непрерывности функций $\nu(y)$ и $\widetilde{K}(x,y)$.

Проверим выполнимость условия (3). Рассмотрим разность
$$w(x,y)=u_x(x,y)-hu(x,y). \tag{30}$$

Учитывая представления (21) и (24), запишем эту функцию в виде

$$w(x,y)=\int\limits_0^{y-\varepsilon}(\widetilde{K}_x(x,y-\eta)-h\widetilde{K}(x,y-\eta))(\nu(\eta)-\nu(y))\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{y-\varepsilon}^{y}(\widetilde{K}_x(x,y-\eta)-h\widetilde{K}(x,y-\eta))(\nu(\eta)-\nu(y))\,d\eta+\nu(y)\int\limits_0^y(\widetilde{K}_x(x,t)-h\widetilde{K}(x,t))\,dt\equiv$$

$$\equiv J_1(x,y)+J_2(x,y)+\nu(y)J_3(x,y), \tag{31}$$

где ε – произвольное малое положительное число.

Найдём предельное значение разности $\widetilde{K}_x(x,t)-h\widetilde{K}(x,t)$ при $x\to 0$ и $t\neq 0$. Из (25) и (9) следует, что

$$\widetilde{K}_x(x,t)=K_x(x,t)*(y^{\beta-1}/\Gamma(\beta))-hK_x(x,t)*D_{0t}^{-\beta}E(t).$$

Тогда из формул (15) и (4) вытекает равенство

$$\widetilde{K}_x(x,t)=-K(x,t)+hK(x,t)*E(t),$$

вследствие которого и равенства (23) получаем

$$\widetilde{K}_x(x,t)-h\widetilde{K}(x,t)=-K(x,t).$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $x\to 0$, в силу (22) и (12) будем иметь

$$\lim_{x\to 0}(\widetilde{K}_x(x,t)-h\widetilde{K}(x,t))=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}J_1(x,y)=0$.

Обозначим $\omega(\varepsilon):=\sup|\nu(\eta)-\nu(y)|$, где $\eta\in[y-\varepsilon,y]$. Так как функция $\nu(y)$ непрерывна в окрестности точки y, то $\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Учитывая определение величины $\omega(\varepsilon)$, оценим интеграл $J_2(x,y)$:

$$|J_2(x,y)|\leqslant\omega(\varepsilon)\int\limits_0^{\varepsilon}|\widetilde{K}_x(x,t)-h\widetilde{K}(x,t)|\,dt.$$

В силу равенств (23) и (25), а также свойств (8) и (13) получаем

$$|J_2(x,y)|\leqslant\omega(\varepsilon)\bigg(\int\limits_0^{\varepsilon}|K_x(x,t)|*E(t)\,dt+|h|\int\limits_0^{\varepsilon}K(x,t)*E(t)\,dt\bigg)=\omega(\varepsilon)(J_{21}(x,\varepsilon)+J_{22}(x,\varepsilon)). \tag{32}$$

Согласно (4) первый интеграл J_{21} запишется в виде

$$J_{21}(x,\varepsilon)=D_{0\varepsilon}^{-1}|K_x(x,\varepsilon)|*E(\varepsilon).$$

Тогда из равенств (26) и (15) и свойства (13) следует, что

$$J_{21}(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-\beta}\phi(-\beta,1-\beta;-x\varepsilon^{-\beta})*E(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $x\to 0$, с помощью (12) и (10) получаем

$$\lim_{x\to 0}J_{21}(x,\varepsilon)=D_{0\varepsilon}^{\beta-1}E(\varepsilon)=E_{\beta,1}(-h\varepsilon^{\beta}). \tag{33}$$

Аналогично, для второго интеграла J_{22} имеем

$$J_{22}(x,\varepsilon) = |h| D_{0\varepsilon}^{-1} K(x,\varepsilon) * E(\varepsilon) = |h| \phi(-\beta,1;-x\varepsilon^{-\beta}) * E(\varepsilon),$$

$$\lim_{x\to 0} J_{22}(x,\varepsilon) = |h| D_{0\varepsilon}^{-1} E(\varepsilon) = |h| \varepsilon^{\beta} E_{\beta,\beta+1}(-h\varepsilon^{\beta}). \tag{34}$$

Таким образом, вследствие соотношений (32)–(34), непрерывности функции $\nu(y)$ при $y>0$ и произвольного выбора ε заключаем, что

$$\lim_{x\to 0} J_2(x,y) = 0.$$

Вычислим интеграл $J_3(x,y)$. Из формулы (4) следует, что

$$J_3(x,y) = D_{0y}^{-1}[K_x(x,y) - hK(x,y)] * E(y). \tag{35}$$

Согласно формуле (15) в силу равенств (26) и (22) имеем

$$D_{0y}^{-1} K_x(x,y) = -y^{-\beta} \phi(-\beta, 1-\beta; -xy^{-\beta}), \quad D_{0y}^{-1} K(x,y) = \phi(-\beta,1;-xy^{-\beta}).$$

Подставляя последние выражения в равенство (35) и переходя затем к пределу при $x\to 0,$ с помощью (10) приходим к равенствам

$$\lim_{x\to 0} J_3(x,y) = D_{0y}^{\beta-1} E(y) - hD_{0y}^{-1} E(y) = E_{\beta,1}(-hy^{\beta}) - hy^{\beta} E_{\beta,1+\beta}(-hy^{\beta}). \tag{36}$$

Учитывая формулу (9), вследствие (36) заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0} J_3(x,y) = -1.$

В силу найденных предельных значений для интегралов $J_k(x,y),$ $k=\overline{1,3},$ из представления (31) следует, что

$$\lim_{x\to 0} w(x,y) = -\nu(y).$$

Таким образом, из последнего равенства и обозначения (30) вытекает выполнимость условия (3). Теорема доказана.

Частные случаи. В случае, когда уравнение (1) совпадает с классическим уравнением диффузии, т.е. $\alpha = 1$ $(\beta = 1/2),$ в силу представлений (11) и (17) функции $K_{\beta}(x,y)$ и $E(y)$ примут вид

$$K_{1/2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\biggl(-\frac{x^2}{4y}\biggr), \quad E(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} - h\exp(h^2 y)\,\mathrm{erfc}\,(h\sqrt{y}).$$

Если в условии (3) $h=0,$ то для уравнения (1) получим решение второй краевой задачи в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^y K_{\beta}(x,y-\eta)\nu(\eta)\,d\eta,$$

где функция $K_{\beta}(x,y)$ определена в (18).

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи A, удовлетворяющего для некоторого* $k>0$ *условию*

$$\lim_{x\to\infty} u(x,y)\exp(-kx^{2/(2-\alpha)}) = 0. \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $h_r(\xi)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

$$h_r(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi \leqslant r, \\ 0, & \xi \geqslant r+1, \end{cases} \tag{38}$$

$0 \leqslant h_r(\xi) \leqslant 1,$ $|h_r'(\xi)| + |h_r''(\xi)| \leqslant C,$ где C – постоянная, не зависящая от ξ и $r.$

Рассмотрим функцию
$$v(x,\xi,y,\eta)=h_r(\xi)\widetilde{G}(x,\xi,y-\eta),$$
здесь
$$\widetilde{G}(x,\xi,y)=G(x,\xi,y)-hG_0(x,\xi,y)*E(y),$$
где
$$G(x,\xi,y)=y^{\beta-1}(\phi(-\beta,\beta;-(x+\xi)y^{-\beta})+\phi(-\beta,\beta;-|x-\xi|y^{-\beta}))/2,$$
$$G_0(x,\xi,y)=y^{\beta-1}\phi(-\beta,\beta;-(x+\xi)y^{-\beta}).$$
Нетрудно показать, что имеют место равенства
$$L^*v(x,\xi,y,\eta)=v_{\xi\xi}-D^{\alpha}_{y\eta}v=2h'_r(\xi)\widetilde{G}_{\xi}(x,\xi,y-\eta)+h''_r(\xi)\widetilde{G}(x,\xi,y-\eta), \tag{39}$$
$$v_{\xi}(x,0,y,\eta)-hv(x,0,y,\eta)=0. \tag{40}$$
Из оценки (16) следует, что при $\xi\to\infty$ справедливы неравенства
$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot P_n(x,\xi,y)\exp[-\alpha_0|x-\xi|^{2/(2-\alpha)}y^{-\alpha/(2-\alpha)}], \tag{41}$$
$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}G_0(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot Q_n(x,\xi,y)\exp[-\alpha_0|x+\xi|^{2/(2-\alpha)}y^{-\alpha/(2-\alpha)}], \tag{42}$$
где
$$\alpha_0=(2-\alpha)2^{-2/(2-\alpha)}\alpha^{\alpha/(2-\alpha)},\quad P_n(x,\xi,y)=|x-\xi|^{(1-\alpha(1-n))/(2-\alpha)}y^{-1+\alpha(1-2n)/(2(2-\alpha))},$$
$$Q_n(x,\xi,y)=|x+\xi|^{(1-\alpha(2-n))/(2-\alpha)}y^{-1+\alpha(3-2n)/(2(2-\alpha))},\quad n=0,1,\ldots$$

Пусть δ – некоторое положительное достаточно малое число. Если $u(x,y)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), то из (38) и теоремы об общем представлении решения уравнения (1) [20, с. 134] следует, что в области $\Omega_0=\{(x,y):0<x<r+1,\ \ 0<y<\delta\}$ оно представимо в виде
$$u(x,y)=\int\limits_0^y(v(x,r+1,y,\eta)u_{\xi}(r+1,\eta)-v_{\xi}(x,r+1,y,\eta)u(r+1,\eta))\,d\eta-$$
$$-\int\limits_0^y(v(x,0,y,\eta)u_{\xi}(0,\eta)-v_{\xi}(x,0,y,\eta)u(0,\eta))\,d\eta+\int\limits_0^{r+1}\int\limits_0^y u(\xi,\eta)L^*v(x,\xi,y,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{43}$$
Из (38) и (39) следует, что $L^*v(x,\xi,y,\eta)=0$ при $0\leqslant\xi\leqslant r.$ Полагая в условии (3) $\nu(y)\equiv 0$ и учитывая равенство (40) и свойства функции $h_r(\xi),$ из представления (43) получаем
$$u(x,y)=\int\limits_r^{r+1}\int\limits_0^y u(\xi,\eta)L^*v(x,\xi,y,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{44}$$
В силу условия (37) и оценок (41), (42) из представления (44) следует неравенство
$$|u(x,y)|\leqslant\int\limits_r^{r+1}\int\limits_0^y H\exp\{-\alpha_0|x-\xi|^{2/(2-\alpha)}(y-\eta)^{-\alpha/(2-\alpha)}+k\xi^{2/(2-\alpha)}\}\,d\xi\,d\eta, \tag{45}$$

в котором $H = \max\{P_i, Q_i\}$, $i = 0, 1$. Правая часть неравенства (45) при $r \to \infty$ стремится к нулю, если существует внутренний интеграл. Это можно обеспечить выбором $\delta < (\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$. Тогда $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \delta\}$.

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ для любого $0 < y < T$. Пусть $t = y - \delta$, $\delta \leqslant y < 2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x,t) = u(x, \delta + t)$. Так как $u(x,y) \equiv 0$ при $0 < y < \delta$, то

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{\delta y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{0t}^{\alpha} w(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению $w_{xx}(x,t) - \partial_{0t}^{\alpha} w(x,t) = 0$, условию (37) и условиям

$$w(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$w_x(0,t) = hw(0,t), \quad 0 < t < \delta.$$

Тогда, согласно доказанному выше, $w(x,t) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < t < \delta\}$, т.е. $u(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ \delta \leqslant y < 2\delta\}$. Точно так же доказывается, что $u(x,y) \equiv 0$ в полосах $(n-1)\delta \leqslant y < n\delta$, $n = 3, 4, \ldots$ Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
3. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
4. *Килбас А.А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Самара, 2009.
5. *Новоженова О.Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М., 2018.
6. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore, 2000.
7. *Weiss M., Hashimoto H., Nilsson T.* Anomalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy // Biophys. J. 2003. V. 84. № 6. P. 4043–4052.
8. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. of Phys. A. 2004. V. 37. № 31. P. 161–208.
9. *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. V. I. Background and Theory. V. II: Applications. Springer, 2013.
10. *Mainardi F.* The time fractional diffusion-wave equation // Radiophysics and Quantum Electronics. 1995. V. 38. № 1–2. P. 13–24.
11. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. 1996. V. 9. № 6. P. 23–28.
12. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San Diego, 1999.
13. *Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2001. V. 4. № 2. P. 153–192.
14. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2002. № 1 (8). С. 6–8.
15. *Псху А.В.* Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1430–1433.
16. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599–609.
17. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.
18. *Pskhu A.V.* Multi-time fractional diffusion equation // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. № 8. P. 1939–1950.
19. *Pagnini G.* The M-Wright function as a generalization of the Gaussian density for fractional diffusion processes // Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. V. 16. № 2. P. 436–453.
20. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик, 2013.
21. *Kochubei A.N.* Asymptotic properties of solutions of the fractional diffusion-wave equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 17. № 3. P. 881–896.

22. *Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients // Appl. Anal. 2014. V. 93. № 10. P. 2211–2242.
23. *Псху А.В.* Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. № 6. С. 158–179.
24. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
25. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
26. *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Совр. математика. Фунд. направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
27. *Хуштова Ф.Г.* Третья краевая задача в полуполосе для B-параболического уравнения // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 2. С. 290–301.
28. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. of the London Math. Soc. 1933. V. s1-8. № 1. P. 71–79.
29. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quarterly J. of Math. 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
30. *Stanković B.* On the function of E.M. Wright // Publ. de l'Institut Math. 1970. V. 10 (24). P. 113–124.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного цента РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.
После доработки 11.06.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.