ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1644–1653

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956+517.983

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ АБСТРАКТНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2021 г. Б. Чаучи, В. Е. Федоров, М. Костич

Рассматриваются мультипликативные возмущения субгенераторов вырожденных аналитических разрешающих семейств операторов. Получены достаточные условия, при выполнении которых произведение многозначных линейных операторов является субгенератором аналитического (a,k)-регуляризованного C-разрешающего семейства операторов. Приводятся некоторые приложения этого результата к начально-краевым задачам для уравнений в частных производных с производной Капуто по времени.

DOI: 10.31857/S0374064121120074

1. Введение и предварительные сведения. Теория абстрактных некорректных задач Коши является областью активных исследований для многих авторов (см. монографии [1–6] в качестве основных источников информации в этом направлении), как и теория возмущений для абстрактных некорректных задач Коши. Насколько известно авторам, первый результат о мультипликативных возмущениях сильно непрерывных полугрупп был получен Дж.Р. Дорро в 1966 г. [7]; более подробная информация об исследованиях мультипликативных возмущений абстрактных задач Коши первого и второго порядков содержится в работах [1, 8–15]. Мультипликативные возмущения абстрактных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры и абстрактных дробных интегро-дифференциальных уравнений исследовались в [16–20].

В качестве основного источника информации об абстрактных вырожденных дифференциальных уравнениях первого и второго порядков мы отсылаем читателя к монографиям [6, 21, 22]. Теория абстрактных вырожденных дифференциальных уравнений с дробными производными всё ещё далека от завершения (см., например, [6] и недавние работы [23–25]). (Далее для краткости дифференциальные уравнения с дробными производными будем называть дробными дифференциальными уравнениями.)

Теория абстрактных вырожденных дробных дифференциальных уравнений все ещё далека от завершения (см., например, [6] и недавние работы [23–25]).

Основная цель данной статьи – описать новый результат о мультипликативных возмущениях дробных разрешающих семейств операторов, порождённых многозначными линейными операторами. Мы также приводим некоторые интересные приложения этого результата к абстрактным дробным дифференциальным уравнениям с производными Капуто.

Данная работа существенно основывается на некоторых результатах, установленных в [9] Р. де Лаубенфельсом. Более конкретно, формула представления для резольвенты оператора BA, которая была установлена в доказательстве леммы 2.8 [9], будет по существу использована в доказательстве нашего основного результата (см. также замечание 1 и приложения, приведённые в п. 3 ниже).

Структура работы следующая. В пп. 1.1 напоминаются основные определения и результаты теории многозначных линейных операторов; основная цель пп. 1.2 – напомнить основные факты о разрешающих семействах операторов вырожденных эволюционных уравнений, используемые в статье. В п. 2 формулируется и доказывается теорема, представляющая собой новый результат о мультипликативных возмущениях вырожденных разрешающих семейств операторов, который, по-видимому, является новым даже в случае, когда линейный оператор $\mathcal{A}=A$ является однозначным, а регуляризующий оператор C равен тождественному оператору I на банаховом пространстве X (см. также замечание 1, в котором обсуждаются дальнейшие обобщения в различных направлениях этой теоремы). Наши основные приложения приведены в п. 3: в пп. 3.1 рассматриваются приложения доказанной теоремы к абстрактным невырожденным дробным дифференциальным уравнениям с некоэрцитивными дифференциальными операторами; пп. 3.2 содержит некоторые её приложения к абстрактным вырожденным дробным дифференциальным уравнениям с некоэрцитивными дифференциальными операторами. Для краткости и лучшего изложения в данной работе не рассматривается корректность соответствующих дробных задач Коши [6].

В работе используются стандартные обозначения. Через $(X, \|\cdot\|)$ обозначается комплексное банахово пространство. Обозначим $\Sigma_\alpha := X\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$ $(\alpha \in (0,\pi])$ и $\mathbb{N}_n :=$ $:= \{1,\ldots,n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $\alpha > 0$, $m = \lceil\alpha\rceil$ и $I = (0,T)$ при некотором $T \in (0,\infty]$. Положим $g_\alpha(t) := t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, где через $\Gamma(\cdot)$ обозначена гамма-функция Эйлера. Напомним, что дробная производная Капуто $\mathbf{D}_t^\alpha u(t)$ определена для функций $u \in C^{m-1}([0,\infty); X)$, для которых $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1}) \in C^m([0,\infty); X)$, и имеет вид

$$\mathbf{D}_t^\alpha u(t) := \frac{d^m}{dt^m}\left[g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1}\right)\right],$$

где через $*$ обозначена свёртка функций.

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Функция Миттаг-Лёффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяется равенством

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

С теорией векторного преобразования Лапласа можно ознакомиться по монографиям [2, 3, 5, 6].

1.1. Многозначные линейные операторы. Доказательства приведённых ниже утверждений можно найти в [21].

Напомним, что многозначное отображение $\mathcal{A}\colon X \to P(X)$ называется *многозначным линейным оператором* (МЛО) в X, если выполняются следующие два условия:

(i) $D(\mathcal{A}) := \{x \in X : \mathcal{A}x \neq \varnothing\}$ – линейное подпространство в X;

(ii) $\mathcal{A}x + \mathcal{A}y \subseteq \mathcal{A}(x+y)$, $x, y \in D(\mathcal{A})$, и $\lambda\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{A}(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in D(\mathcal{A})$.

Известно, что при любых $x, y \in D(\mathcal{A})$ и $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$, $|\lambda| + |\eta| \neq 0$, справедливо равенство $\lambda\mathcal{A}x + \eta\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\lambda x + \eta y)$. Более того, $\mathcal{A}0$ – линейное подпространство в X и $\mathcal{A}x = f + \mathcal{A}0$ при любых $x \in D(\mathcal{A})$ и $f \in \mathcal{A}x$. Определим множество значений $R(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}x : x \in D(\mathcal{A})\}$. Множество $\mathcal{A}^{-1}0 := N(\mathcal{A}) := \{x \in D(\mathcal{A}) : 0 \in \mathcal{A}x\}$ называется *ядром* оператора $\mathcal{A}$. Обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ задаётся равенствами $D(\mathcal{A}^{-1}) := R(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}^{-1}y := \{x \in D(\mathcal{A}) : y \in \mathcal{A}x\}$. Нетрудно показать, что $\mathcal{A}^{-1}$ – МЛО в X, а также, что $N(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}0$ и $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$. Если $N(\mathcal{A}) = \{0\}$, т.е. если $\mathcal{A}^{-1}$ однозначен, то $\mathcal{A}$ инъективен.

Предположим, что $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ являются МЛО в X. Тогда их *сумма* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ определяется равенствами $D(\mathcal{A}+\mathcal{B}) := D(\mathcal{A}) \bigcap D(\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x := \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$, $x \in D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Этот оператор также является МЛО в X. *Произведение* $\mathcal{BA}$ определяется следующим образом:

$$D(\mathcal{BA}) := \{x \in D(\mathcal{A}) : D(\mathcal{B}) \bigcap \mathcal{A}x \neq \varnothing\} \quad \text{и} \quad \mathcal{BA}x := \mathcal{B}(D(\mathcal{B}) \bigcap \mathcal{A}x).$$

Тогда $\mathcal{BA}$ также является МЛО в X и $(\mathcal{BA})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$. Будем писать $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, если $D(\mathcal{A}) \subseteq D(\mathcal{B})$ и $\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{B}x$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. *Произведение* $z\mathcal{A}$ МЛО $\mathcal{A}$ и числа $z \in \mathbb{C}$ определяется равенствами

$$D(z\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad (z\mathcal{A})(x) := z\mathcal{A}x, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

МЛО $\mathcal{A}$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей (x_n) в $D(\mathcal{A})$ и (y_n) в X таких, что $y_n \in \mathcal{A}x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равенства $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ влекут за собой включения $x \in D(\mathcal{A})$ и $y \in \mathcal{A}x$.

Пусть $C \in L(X)$. Для МЛО $\mathcal{A}$ его *C-резольвентным множеством* $\rho_C(\mathcal{A})$ называется объединение всех комплексных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $R(C) \subseteq R(\lambda - \mathcal{A})$, и $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ – однозначный ограниченный оператор на X.

Нетрудно показать, что *резольвентное множество* $\rho(\mathcal{A}) := \rho_I(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ является открытым в $\mathbb{C}$. Оператор $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ называется *C-резольвентой* оператора $\mathcal{A}$ $(\lambda \in \rho_C(\mathcal{A}))$. *$C$-спектр* $\sigma_C(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ определяется как дополнение множества $\rho_C(A)$ в $\mathbb{C}$; *спектр* оператора $\mathcal{A}$ – множество $\sigma(\mathcal{A}) := \sigma_I(\mathcal{A})$.

1.2. Вырожденные разрешающие семейства операторов. Напомним следующие определения [6].

Определение 1. Пусть $0 < \tau \leqslant \infty$, $k \in C([0,\tau))$, $k \neq 0$, $a \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau))$, $a \neq 0$, $\mathcal{A}\colon X \to P(X)$ является МЛО, $C_1 \in L(Y,X)$ и $C_2 \in L(X)$ инъективен.

(i) Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором* (*локального*, если $\tau < \infty$) *слабого (a,k)-регуляризованного семейства (C_1,C_2)-существования и единственности*

$$(R_1(t), R_2(t))_{t\in[0,\tau)} \subseteq L(Y,X) \times L(X),$$

если отображения $t \mapsto R_1(t)y$, $t \geqslant 0$, и $t \mapsto R_2(t)x$, $t \in [0,\tau)$, непрерывны при всех фиксированных $x \in X$, $y \in Y$ и выполняются следующие условия:

$$\bigg(\int_0^t a(t-s)R_1(s)y\,ds, R_1(t)y - k(t)C_1y\bigg) \in \mathcal{A}, \quad t \in [0,\tau), \quad y \in Y, \tag{1}$$

$$\int_0^t a(t-s)R_2(s)y\,ds = R_2(t)x - k(t)C_2x \quad \text{при всех} \quad t \in [0,\tau) \ \text{ и } \ (x,y) \in \mathcal{A}, \tag{2}$$

где запись $(x,y) \in \mathcal{A}$ означает, что $y \in \mathcal{A}x$.

(ii) Пусть $(R_1(t))_{t\in[0,\tau)} \subseteq L(Y,X)$ – сильно непрерывное семейство. Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором* (*локального*, если $\tau < \infty$) *слабого (a,k)-регуляризованного семейства C_1-существования* $(R_1(t))_{t\in[0,\tau)}$, если выполняется условие (1).

(iii) Пусть семейство $(R_2(t))_{t\in[0,\tau)} \subseteq L(X)$ сильно непрерывно. Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором* (*локального*, если $\tau < \infty$) *слабого (a,k)-регуляризованного семейства C_2-единственности* $(R_2(t))_{t\in[0,\tau)}$, если выполняется условие (2).

Определение 2. Пусть $0 < \tau \leqslant \infty$, $k \in C([0,\tau))$, $k \neq 0$, $a \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau))$, $a \neq 0$, $\mathcal{A}\colon X \to P(X)$ – МЛО, $C \in L(X)$ инъективен и $C\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}C$. Тогда сильно непрерывное семейство операторов $(R(t))_{t\in[0,\tau)} \subseteq L(X)$ называется *(a,k)-регуляризованным C-разрешающим семейством с субгенератором* $\mathcal{A}$, если $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ является слабым (a,k)-регуляризованным семейством C-единственности, имеющим $\mathcal{A}$ в качестве субгенератора, $R(t)C = CR(t)$ и $R(t)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}R(t)$ $(t \geqslant 0)$.

Если $\tau = \infty$, то семейство $(R(t))_{t\geqslant 0}$ называется *экспоненциально ограниченным* (*ограниченным*), если существуют действительные числа $M \geqslant 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ $(\omega = 0)$ такие, что $\|R(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$.

Приведённые выше понятия используются для классов слабых (a,k)-регуляризованных семейств C_1-существования и слабых (a,k)-регуляризованных семейств C_2-единственности.

Определение 3.

(i) Пусть $\mathcal{A}$ – МЛО в пространстве X, $\alpha \in (0,\pi]$ и $(R(t))_{t\geqslant 0}$ – (a,k)-регуляризованное C-разрешающее семейство, которое имеет субгенератор $\mathcal{A}$. Тогда $(R(t))_{t\geqslant 0}$ называется *аналитическим (a,k)-регуляризованным C-разрешающим семейством с углом* α, если существует функция $\mathbf{R} : \Sigma_\alpha \to L(X)$, для которой при каждом $x \in X$ отображение $z \mapsto \mathbf{R}(z)x$, $z \in \Sigma_\alpha$ аналитично и выполняются условия:

(a) $\mathbf{R}(t) = R(t)$, $t > 0$,

(b) $\lim\limits_{z\to 0,\ z\in\Sigma_\gamma} \mathbf{R}(z)x = k(0)Cx$ для всех $\gamma \in (0,\alpha)$ и $x \in X$.

(ii) Аналитическое (a,k)-регуляризованное C-разрешающее семейство $(R(t))_{t\geqslant 0}$ с углом $\alpha \in (0,\pi]$ называется *экспоненциально ограниченным*, если для всех $\gamma \in (0,\alpha)$ существует $\omega_\gamma \geqslant 0$ такое, что семейство $\{e^{-\omega_\gamma \operatorname{Re} z}\mathbf{R}(z) : z \in \Sigma_\gamma\} \subseteq L(X)$ ограничено. Если в этом определении для всех $\gamma \in (0,\alpha)$ можно взять $\omega_\gamma = 0$, то семейство $(R(t))_{t\geqslant 0}$ называется *ограниченным.*

В дальнейшем будем отождествлять функции $R(\cdot)$ и $\mathbf{R}(\cdot)$.

2. Мультипликативные возмущения для вырожденных дробных разрешающих семейств операторов. Сформулируем основной результат работы. Отметим, что в формулировке используются определённые во введении функции g_α.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – замкнутые МЛО, $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$, $C \in L(X)$ инъективен, $C\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}C$, $C\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}C$, $[(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C][(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}] = [(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}][(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C]$ для всех $\lambda \in \rho_C(\mathcal{A})$, $\lambda' \in \rho(\mathcal{B})$, и существуют положительные числа α и β такие, что $\alpha < \beta$ и $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq [\alpha,\beta]$. Пусть, кроме того, $a \in (0,2]$, $\Sigma_{a\pi/2} \subseteq \rho_C(\mathcal{A})$, отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}Cx$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, непрерывно при любом фиксированном $x \in X$ и при каждом $a' \in (0,a)$ существует $c_{a'} > 0$, при котором*

$$\|\lambda(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C\| \leqslant c_{a'}, \quad \lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}. \tag{3}$$

Тогда при каждом $a' \in (0,a)$ справедливы следующие утверждения:

(i) *если оператор $\mathcal{BA}$ плотно определён, то $\mathcal{BA}$ – субгенератор ограниченного аналитического $(g_{a'}, g_1)$-регуляризованного C-разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B}}(t))_{t\geqslant 0}$ с углом*

$$\alpha \equiv \min(\pi/2, \pi(a-a')/(2a')). \tag{4}$$

(ii) *если оператор $\mathcal{BA}$ не является плотно определённым, то $\mathcal{BA}$ при каждом $b' > 0$ – субгенератор экспоненциально ограниченного аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$-регуляризованного C-разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B},b'}(t))_{t\geqslant 0}$ с углом (4) и при каждом $\gamma \in (0,\alpha)$ существует $d_\gamma > 0$ такое, что $\|R_{\mathcal{B}}(z)\| \leqslant d_\gamma |z|^{b'}$, $z \in \overline{\Sigma_\gamma}$.*

Доказательство следует идее, предложенной в работе [9] при доказательстве леммы 2.8. Прежде всего, существование оператора $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$ позволяет заключить, что многозначный линейный оператор $\mathcal{BA}$ замкнут, поэтому оператор $s - \mathcal{BA}$ также замкнут при любом $s \in \mathbb{C}$. Действительно, пусть (x_n) и (y_n) – последовательности в X такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и $y_n \in \mathcal{BA}x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует существование последовательности (z_n) в X, для которой $z_n \in \mathcal{A}x_n$ и $y_n \in \mathcal{B}z_n$. Очевидна сходимость $z_n = \mathcal{B}^{-1}y_n \to \mathcal{B}^{-1}y$ при $n \to \infty$, поскольку $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$. Так как оператор $\mathcal{A}$ замкнут, то это означает, что $x \in D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{B}^{-1}y \in \mathcal{A}x$, поэтому $x \in D(\mathcal{BA})$ и $y \in \mathcal{BA}x$, что и утверждалось.

Далее предложение 1.2.6 (iii) [6] показывает, что отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}Cx$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично при каждом фиксированном $x \in X$. Предположим теперь, что $s \in \Sigma_{a\pi/2}$ и $|\arg(s)| + \varepsilon < a\pi/2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Пусть Γ – некоторый замкнутый контур в комплексной плоскости, окружающий спектр $\sigma(\mathcal{B})$, такой, что $\Gamma \subseteq \Sigma_\varepsilon$. Определим отображение

$$F(s)x := \int\limits_\Gamma ((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}x \,\frac{d\omega}{2\pi i\omega}, \quad x \in X.$$

Так как подынтегральная функция $\omega \mapsto ((s/\omega)-\mathcal{A})^{-1}C(\omega-\mathcal{B})^{-1}x/(2\pi i\omega)$ аналитична при любом $x \in X$, то по теореме Коши значение $F(s)x$ не зависит от выбора контура Γ, удовлетворяющего указанным выше требованиям; более того, несложно показывается, что отображение $s \mapsto F(s)x$, $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично при каждом $x \in X$.

Согласно нашим предположениям о коммутировании операторов C и $\mathcal{A}$, C и $\mathcal{B}$, $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ и $(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}$, можно использовать теорему 1.2.4 (i) [6] для того, чтобы показать, что при любых $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, $\omega \in \Gamma$ и $x \in X$ выполняются следующие включения:

$$(s - \mathcal{BA})((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} \ni$$

$$\ni s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} - \mathcal{B}[((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C](\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} =$$

$$= s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} - \mathcal{B}(\omega - \mathcal{B})^{-1}[((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega} \ni$$

$$\ni s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} - [\omega(\omega - \mathcal{B})^{-1} - I][((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega} =$$

$$= C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} + [((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega}.$$

Тогда по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} [((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cx - Cx]\,\frac{d\omega}{2\pi i\omega} = 0, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}. \tag{5}$$

С другой стороны, используя предложение 3.10.1 [6], получаем, что $\sigma(\mathcal{B}^{-1}) \subseteq [1/\beta, 1/\alpha]$ и при этом

$$(\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1} = \lambda^{-1}[I - \lambda^{-1}(\lambda^{-1} - \mathcal{B})^{-1}], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [1/\beta, 1/\alpha].$$

Из этого равенства, формулы Коши и элементарных свойств функционального исчисления Данфорда следует, что

$$2\pi i x = \int\limits_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1}x\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma_1}\left[(\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1}x - \frac{x}{\lambda}\right]d\lambda = -\int\limits_{\Gamma_1}(\lambda^{-1} - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{\lambda^2}\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma}(\lambda - \mathcal{B})^{-1}x\,d\lambda,$$

где $\Gamma_1 := \{\lambda^{-1} : \lambda \in \Gamma\}$. В силу теоремы 1.2.3 [6] из равенства (5) вытекает включение

$$Cx \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})F(s)x, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}, \quad x \in X. \tag{6}$$

Далее предположение $(x, y) \in \mathcal{A}$ влечёт за собой в силу теоремы 1.2.4 (i) [6] равенство

$$((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cy = (s/\omega)((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cx - Cx, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}, \quad \omega \in \Gamma, \quad x \in X.$$

Используя те же аргументы для МЛО $\mathcal{B}$ и почти дословно повторяя приведённые выше вычисления, убеждаемся, что из включений $(x, y) \in \mathcal{A}$ и $(y, z) \in \mathcal{B}$ следует равенство

$$sF(s)x - F(s)z = Cx, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}. \tag{7}$$

Теперь докажем, что оператор $(s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C$ однозначен при всех $s \in \Sigma_{a\pi/2}$. Предположим, что $x \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C0$ при некотором $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, т.е. $0 \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})x$. Отсюда вытекает существование элементов $y \in \mathcal{A}x$ и $z \in \mathcal{B}y$ таких, что $sx = z$, поэтому $sF(s)x - F(s)z = 0$. В силу равенства (7) получаем, что $Cx = 0$, а значит, $x = 0$, так как C инъективен. Следовательно, $(s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C = F(s)$ при всех $s \in \Sigma_{a\pi/2}$.

Зафиксируем $\gamma \in (0, a\pi/2)$, для которого $\gamma + \varepsilon < a\pi/2$. Тогда в силу оценки (3) существует число $c'_{\gamma+\varepsilon} > 0$ такое, что

$$\|sF(s)\| = \left\|\int\limits_{\Gamma} s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\,\frac{d\omega}{2\pi i\omega}\right\| \leqslant \int\limits_{\Gamma} |\omega| c_{\gamma+\varepsilon}\|(\omega - B)^{-1}\|\frac{d|\omega|}{|\omega|} \leqslant c'_{\gamma+\varepsilon}, \quad s \in \Sigma_{\gamma}.$$

Для завершения доказательства остаётся применить теорему 3.2.19 [6] и интегральные вычисления, проведённые при доказательстве теоремы 2.6.1 [6]. Теорема доказана.

Замечание 1.

(i) Хорошо известно, что отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}C \in L(X)$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично, если $C = I$ (см. [6, 21]).

(ii) Даже в случае, когда $a = 1$, оператор $\mathcal{A} = A$ однозначный и $C = I$, сделанные выше предположения не означают, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу (см., например, хорошо известный контрпример Комацу из [26, § 1.3.6]). Наш основной результат и вывод из следующего пункта этого замечания можно переформулировать в терминах (почти) C-секториальных операторов [5, 6, 26].

(iii) Заметим, что оценка (3) использована только в финальной части доказательства теоремы. Предположим, вместо этого условия, что существует такое действительное число $\eta \geqslant -1$, что при каждом $a' \in (0,a)$ найдётся такое $c_{a'} > 0$, для которого

$$\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C\| \leqslant c_{a'}(1+|\lambda|)^{\eta}, \quad \lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}.$$

Тогда можно утверждать, как и выше, что при всех $b' \geqslant a'(1+\eta)$ $[\,b' > a'(1+\eta)\,]$ МЛО $\mathcal{BA}$ является субгенератором экспоненциально ограниченного, аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$-регуляризованного C-разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B}}(t))_{t\geqslant 0}$ с углом (4), если $\mathcal{BA}$ плотно определён $[\,\mathcal{BA}$ не является плотно определённым].

(iv) Утверждения теоремы и пункт (iii) этого замечания могут быть обобщены следующим образом. Всё ещё предполагая, что $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$, теперь вместо остальных условий предположим, что существует инъективный оператор $D \in L(X)$, коммутирующий с $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и C, такой, что $\sigma_D(\mathcal{B}) \subseteq [\alpha,\beta]$, отображение $\lambda \to (\lambda-\mathcal{B})^{-1}Dx$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[\alpha,\beta]$, аналитично при каждом фиксированном $x \in X$ и

$$[(\lambda-\mathcal{A})^{-1}C][(\lambda'-\mathcal{B})^{-1}D] = [(\lambda'-\mathcal{B})^{-1}D][(\lambda-\mathcal{A})^{-1}C]$$

для всех $\lambda \in \rho_C(\mathcal{A})$, $\lambda' \in \rho_D(\mathcal{B})$. Вычисления для выражения

$$F_D(s)x := \int\limits_{\Gamma} ((s/\omega)-\mathcal{A})^{-1}C(\omega-\mathcal{B})^{-1}Dx\,\frac{d\omega}{2\pi i\omega}, \quad x \in X,$$

почти такие же, как в случае $D = I$, и разрешающие семейства операторов будут CD-регуляризованными. Отметим только, что уравнение (7) в рассматриваемой ситуации имеет вид $sF(s)x - F(s)z = CDx$, $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, и что будет иметь место равенство

$$\int\limits_{\Gamma} (\omega-\mathcal{B})^{-1}Dx\,d\omega = 2\pi i Dx,$$

справедливость которого может быть показана с помощью замены контура Γ окружностью $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, где $R \to +\infty$, последующей подстановки $z = 1/\omega$ и применения теоремы о вычетах.

(v) Утверждения теоремы работы и разделы (iii), (iv) этого замечания могут быть обобщены на случай, когда спектр оператора $\mathcal{B}$ (D-спектр оператора $\mathcal{B}$) не является подмножеством $\mathbb{R}$. Предположим, например, что существует такой угол $\theta \in (0, a\pi/2)$, при котором спектр $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \Sigma_\theta$ является компактным множеством. Тогда утверждения остаются верными для всех значений $a' \in (0, a-(2\theta/\pi))$ с углом аналитичности

$$\alpha = \min(\pi/2, \pi(a-a')/(2a') - (\theta/a')).$$

3. Приложения к абстрактным дробным дифференциальным уравнениям. В этом пункте доказанная теорема будет использована для исследовании абстрактных дробных дифференциальных уравнений. Отдельно рассмотрим приложения к невырожденным и к вырожденным дробным дифференциальным уравнениям.

3.1. Невырожденные дробные дифференциальные уравнения. Здесь будет использовано хорошо известное функциональное исчисление для коммутирующих генераторов ограниченных C_0-групп. Мы используем идею примера 3.4 [9].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и iA_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, – коммутирующие генераторы ограниченных C_0-групп в банаховом пространстве X. Пусть $k = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$, $A = (A_1,\ldots,A_n)$ и $A^\eta = A_1^{\eta_1}\cdots A_n^{\eta_n}$ для любого $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Символами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ обозначим преобразование Фурье на $\mathbb{R}^n$

и обратное преобразование Фурье соответственно. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n) = \{\mathcal{F}f : f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$, положим $|\xi| := (\sum_{j=1}^n \xi_j^2)^{1/2}$, $(\xi, A) := \sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ и

$$u(A)x := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}u(\xi)e^{-i(\xi,A)}x\,d\xi, \quad x \in X.$$

Тогда $u(A) \in L(X)$, $u \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n)$ и существует такое $M > 0$, что $\|u(A)\| \leqslant M\|\mathcal{F}^{-1}u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, $u \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $N \in \mathbb{N}$. По комплексному многочлену $Q(x) = \sum_{|\eta|\leqslant N} a_\eta x^\eta$, $x \in \mathbb{R}^n$, степени N $(|\eta| := \sum_{j=1}^n \eta_j)$ определим оператор $Q(A) := \sum_{|\eta|\leqslant N} a_\eta A^\eta$ с максимальной областью определения. Напомним, что если X – функциональное пространство, на котором переносы равномерно ограничены и сильно непрерывны, то очевидным выбором для A_j является оператор $-i\partial/\partial x_j$. Пусть $Q(x) = \sum_{|\eta|\leqslant N} a_\eta x^\eta$, $x \in \mathbb{R}^n$, и X такое пространство, тогда

$$\overline{Q(A)} \equiv Q(D;x) \equiv \sum_{|\eta|\leqslant N} a_\eta (-i)^{|\eta|}\partial^{|\eta|}/\partial x_1^{\eta_1}\cdots\partial x_n^{\eta_n} \equiv \sum_{|\eta|\leqslant N} a_\eta D^\eta \tag{8}$$

– оператор, действующий на максимальной области определения.

Вопросы порождения дробного разрешающего семейства некоэрцитивными дифференциальными операторами проанализированы в теореме 2.5.3 и замечании 2.5.4 [5].

Лемма 1. *Пусть* $0 < a < 2$, $\omega \geqslant 0$, $Q(x)$ *– комплексный многочлен степени* $N \in \mathbb{N}$, $\beta > \dfrac{nN}{2\min(1,a)}$ *(соответственно* $\beta = n\left|\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right|\dfrac{N}{\min(1,a)}$, *если* $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* $1 < p < \infty$*) и справедлива импликация:*

$$\textit{если} \quad Q(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{C} \setminus (\omega + \Sigma_{a\pi/2}), \quad \textit{то} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\,(Q(x)^{1/a}) \leqslant \omega^{1/a}.$$

Положим $R_a(t) := (E_a(t^aQ(x))(1+|x|^2)^{-\beta/2})(A)$, $t \geqslant 0$. *Тогда* $(R_a(t))_{t\geqslant 0}$ *– глобальное экспоненциально ограниченное* $(g_a, R_a(0))$*-регуляризованное разрешающее семейство с интегральным генератором* $\overline{Q(A)}$ *непрерывно по норме при* $\beta > \dfrac{nN}{2\min(1,a)}$, *при этом*

$$\|R_a(t)\| \leqslant M(1 + t^{\max(1,a)n/2})e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0$$

$$(\|R_a(t)\| \leqslant M(1 + t^{\max(1,a)n|1/p-1/2|})e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь случай $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{N}_{n-1}$, $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1,\infty)$, $X := C_0(\mathbb{R}^n)$ или $X = BUC(\mathbb{R}^n)$ с оператором $\overline{P(A)}$ вида (8). Определим $Bf(x_1,\ldots,x_n) := h(x_1,\ldots,x_a)f(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $h(\cdot)$ – ограниченная измеримая функция, и предположим, что многочлен $P(x)$ не зависит от переменных $x_1,\ldots,x_a$. Тогда $\overline{P(A)}$ – интегральный генератор глобального экспоненциально ограниченного $(g_a, R_a(0))$-регуляризованного разрешающего семейства $(R_a(t))_{t\geqslant 0}$ и выполняется соотношение (9), из которого следует, что

$$\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}R_a(t)x\,dt, \quad x \in X, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

при этом для всех $a'' \in (0,\pi/2)$ существует такая константа $c_{a''} > 0$, что

$$\|\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C\| \leqslant c_{a''}[|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1-\max(1,a)n/2}], \quad \lambda \in \Sigma_{a''},$$

соответственно

$$\|\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C\| \leqslant c_{a''}[|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1-\max(1,a)n|1/p-1/2|}], \quad \lambda \in \Sigma_{a''}.$$

При $a = 1$ или $a = 2$ в предположении, что существенный образ функции $h(\cdot)$ является компактным $\mathbb{C}$ подмножеством, содержащимся в секторе Σ_θ при некотором $\theta \in (0, a\pi/2)$, из теоремы 1 и замечания 1 (iv) несложно получаем, что при всех $a' \in (0, a - (2\theta/\pi))$ оператор $B\overline{P(A)}$ является интегральным генератором экспоненциально ограниченного $(g_{a'}, g_{b'+1})$-регуляризованного C-разрешающего семейства при каждом $b' \geqslant \max(0, a' - 1)$ с углом аналитичности $\alpha = \min(\pi/2, \pi(a - a')/(2a') - (\theta/a'))$ (см. также теорему 2.9.48 [5] о полугруппах, порождённых дробными степенями почти C-неотрицательных операторов).

Отметим, что вопросы порождения дробного разрешающего семейства операторов степенями почти C-неотрицательных операторов до сих пор не исследовались.

Замечание 2. Напомним, что многочлен $P(x)$ называется *r-коэрцитивным* $(0 < r \leqslant N)$, если существуют такие положительные постоянные M и L, что $|P(x)| \geqslant M|x|^r$ при $|x| \geqslant L$. К сожалению, мы не можем распространить наши рассуждения на дифференциальные операторы, символы которых являются r-коэрцитивными многочленами.

Очевидно, что доказанная теорема (см. также замечание 1 (iii)) может быть использована при исследовании класса почти секториальных операторов в банаховых пространствах. К сожалению, подход, использованный в примере 3.4 [9] и в приведённом выше приложении, не может быть использован при рассмотрении дифференциальных операторов высокого порядка с переменными показателями в гёльдеровых пространствах, исследованных впервые в работе [27] (см. также [5, 6, 28]). В самом деле, предположим, что $\alpha \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^{4m} и $X := C^\alpha(\overline{\Omega})$. Рассмотрим оператор $A : D(A) \subseteq C^\alpha(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ вида

$$Au(x) := \sum_{|\beta| \leqslant 2m} a_\beta(x) D^\beta u(x) \quad \text{при всех } x \in \overline{\Omega}$$

с областью определения $D(A) := \{u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}) : D^\beta u_{|\partial\Omega} = 0$ при всех $|\beta| \leqslant m - 1\}$. Здесь $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_j$ и функции $a_\beta : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ удовлетворяют следующим условиям:

(a) $a_\beta(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \overline{\Omega}$ и $|\beta| = 2m$,

(b) $a_\beta \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ для всех $|\beta| \leqslant 2m$,

(c) существует такое $M > 0$, что

$$M^{-1}|\xi|^{2m} \leqslant \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x)\xi^\beta \leqslant M|\xi|^{2m} \quad \text{при всех } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ и } x \in \overline{\Omega}.$$

В таком случае хорошо известно, что оператор A не плотно определён и существует достаточно большое число $\sigma > 0$ такое, что для оператора $-A_\sigma \equiv -(A+\sigma)$ выполняется включение $\Sigma_\omega \bigcup \{0\} \subseteq \rho(-A_\sigma)$ с некоторым $\omega \in (\pi/2, \pi)$ и $\|R(\lambda : -A_\sigma)\| = O(|\lambda|^{-1+\alpha/(2m)})$, $\lambda \in \Sigma_\omega$. Если мы хотим применить подход из примера 3.4 [9] (с оператором B, определённым выше), то необходимо потребовать, чтобы выполнялось тождество $a_\beta(x) \equiv 0$ для всех наборов $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, для которых существует такое $j \in \mathbb{N}_a$, что $\beta_j > 0$. Но это противоречит условию (c).

3.2. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения. Этот пункт начнём с наблюдения, что доказанная в работе теорема может быть применена к ситуации с чисто многозначными линейными операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Рассмотрим самый простой пример, в котором $X := L^p(1, \infty)$ с некоторым $p \in [1, \infty]$ и $\mathcal{A}$ представляет собой оператор умножения на функцию $m_b^{-1}(x)m_a(x)$, где $m_a(x) := x + ie^x$, $m_b(x) := \chi_{[a,b]}(x)$ и $1 < a < b < \infty$.

Тогда для каждого $a \in (0, 1)$ существует такое $\omega_a > 0$, что требования теоремы работы выполнены при замене в ней МЛО $\mathcal{A}$ на МЛО $\mathcal{A} - \omega_a$. Предположим теперь, что $n_a(\cdot)$ и $n_b(\cdot)$ – некоторые измеримые комплекснозначные функции, для которых $n_b(\cdot)/n_a(\cdot) \in L^\infty(1, \infty)$, а также что при каждом $a \in (0, 1)$ существует число $d > 0$, угол $\theta \in (0, a)$ и компактное множество $K \subseteq \Sigma_\theta$ такие, что расстояние до существенного образа функции $n_b(\cdot)/n_a(\cdot)$ от каждой точки λ^{-1}, где λ не лежит в K, не менее d. Пусть $\mathcal{B}$ – умножение на $n_b^{-1}(x)n_a(x)$; тогда $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq K$ и теорема работы может быть использована (см. также замечание 1 (iii)).

Теперь применим доказанную теорему к абстрактным вырожденным дифференциальным уравнениям в L^p-пространствах. Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – ненулевые многочлены и $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}((P_1(x)/P_2(x))^{1/\alpha}) \leqslant 0$. В § 3.10.1 [6] был получен следующий результат (формулировка теоремы 3.10.17 (i) [6] содержит некоторые типографские опечатки, исправленные здесь).

Лемма 2. *Предположим, что* $0 < a < 2$, $P_1(x)$ *и* $P_2(x)$ *– ненулевые комплексные многочлены,* $N_1 = dg(P_1(x))$, $N_2 = dg(P_2(x))$, $N \in \mathbb{N}$ *и* $r \in (0, N]$. *Пусть* $Q(x)$ *–* r*-коэрцитивный комплексный многочлен степени* N, $a \in \mathbb{C} \setminus Q(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > \dfrac{n}{2r}\max\left(N, \dfrac{N_1+N_2}{\min(1,a)}\right)$ *(соответственно* $\gamma = \dfrac{n}{r}\left|\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right|\max\left(N, \dfrac{N_1+N_2}{\min(1,a)}\right)$, *если* $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* $1 < p < \infty$*),* $P_2(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \in P_1(\mathbb{R}^n)$ *и* $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}((P_1(x)/P_2(x))^{1/a}) \leqslant 0$. *Положим* $\mathcal{A} \equiv \overline{\overline{P_2(A)}\cdot\overline{P_1(A)}^{-1}}$, $C := ((a - Q(x))^{-\gamma})(A)$, $\delta := \max(1,a)n/2$, *если* $X \neq L^p(\mathbb{R}^n)$ *при каком-либо* $p \in (1,\infty)$, *и* $\delta := \max(1,a)n|(1/p)-(1/2)|$, *если* $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ *для некоторого* $p \in (1,\infty)$. *Тогда* $C \in L(X)$ *инъективен и при каждом* $\gamma > 2\delta + (1/2)$ *многозначный линейный оператор* $\mathcal{A}$ *является субгенератором глобального экспоненциально ограниченного* $(g_a, g_{\gamma+1})$*-регуляризованного* C*-разрешающего семейства* $(R_a(t))_{t\geqslant 0}$, *для которого семейство операторов* $\{[t^\gamma(1+t^{-\delta})]^{-1}R_a(t) : t > 0\} \subseteq L(X)$ *ограничено.*

Рассмотрим теперь обычные дифференциальные операторы $P_1(D;x)$ и $P_2(D;x)$. Предположим, что $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{N}_{n-1}$, многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не зависят от переменных $x_1,\ldots,x_a$, $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in (1,\infty)$ и $(Bf)(x) := b(x_1,\ldots,x_a)f(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f \in X$, где $b(\cdot)$ – существенно ограниченная функция. Из доказательств теорем 3.10.17 (i) и 3.10.9 [6] следует, что

$$\lambda^{a-\gamma-1}(\lambda^a - \mathcal{A})^{-1}Cx = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}R_a(t)x\,dt, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Учитывая это равенство и показатель роста для $(R_a(t))_{t\geqslant 0}$, нетрудно видеть, что при каждом $a' \in (0,a)$ существует такое $c_{a'} > 0$, при котором $\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| \leqslant c_{a'}(|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{(\delta-\alpha)/\alpha})$, $\lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}$. Положим $\eta := \max(-1, -1 + (\delta/\alpha))$. Если $a = 1$ или $a = 2$, то, применяя теорему работы (см. также замечание 1 (iii)), получаем, что при каждом $b' > a'(1+\eta)$ МЛО $B\mathcal{A}$ является субгенератором экспоненциально ограниченного, аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$-регуляризованного C-разрешающего семейства $(R_B(t))_{t\geqslant 0}$ с углом аналитичности (4); более того, интегральные вычисления, выполненные при доказательстве теоремы 2.6.1 [3], показывают, что имеет место равенство

$$\|R_B(t)\| = O(t^{b'+1-a'}[t^{a'} + t^{(a'/\alpha)(\alpha-\delta)}]), \quad t > 0.$$

Это может быть использовано при анализе корректности следующей абстрактной вырожденной дробной задачи:

$$(\mathrm{DFP})_{r,b}: \begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha[P_1(D;x)u(t)] = b(x)P_2(D;x)u(t) + f(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad vx \in \mathbb{R}^n; \\ u(0,x) = Cu_0(x); \quad ((\partial^j/\partial t^j)u(t,x))|_{t=0} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant \lceil\alpha\rceil - 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Замечание 3. Так как многочлен $P_1(x)$ не зависит от переменных $x_1,\ldots,x_a$, то из предположения $0 \in P_1(\mathbb{R}^n)$ следует, что нуль принадлежит остаточному спектру оператора $P_1(D;x)$. В самом деле, остаточный спектр этого оператора совпадает с точечным спектром его сопряжённого оператора, который всегда содержит нуль.

Работа Федорова В.Е. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской Академии наук и технологий (проект 21-51-54003). Работа Костича М. выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и технологического развития Республики Сербия (грант 451-03-68/2020/14/200156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *deLaubenfels R.* Existence Families. Functional Calculi and Evolution Equations. Berlin; Heidelberg, 1994.
2. *Xiao T.-J., Liang J.* The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations. Berlin, 1998.
3. *Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Basel, 2001.
4. *Kostić M.* Generalized Semigroups and Cosine Functions. Belgrade, 2011.
5. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. Boca Raton, 2015.
6. *Kostić M.* Abstract Degenerate Volterra Integro-Differential Equations. Belgrade, 2020.
7. *Dorroh J.R.* Contraction semigroups in a function space // Pacific J. Math. 1966. V. 19. P. 35–38.
8. *Gustafson K., Lumer G.* Multiplicative perturbations of semigroup generators // Pacific J. Math. 1972. V. 41. P. 731–742.
9. *deLaubenfels R.* Bounded, commuting multiplicative perturbations of strongly continuous group generators // Houston J. Math. 1991. V. 17. P. 299–310.
10. *deLaubenfels R., Jazar M.* Commuting multiplicative perturbations // Houston J. Math. 1994. V. 20. P. 425–434.
11. *Holderrieth A.* Multiplicative Perturbations. PhD. Thesis. Tübingen, 1992.
12. *Dorroh J.R., Holderrieth A.* Multiplicative perturbation of semigroups generators // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A. 1993. V. 7. P. 47–57.
13. *Holderrieth A.* Commuting Multiplicative Perturbations. Book Chapter in: Evolution Equations, Control Theory and Biomathematics / Eds. P. Clement, G. Lumer. New York, 1994, P. 285–290.
14. *Jung M.* Some perturbation results for semigroups // Arch. Math. 1995. V. 64. P. 475–483.
15. *Xiao T.-J., Liang J.* Multiplicative perturbations of C-regularized semigroups // Comput. Math. Appl. 2001. V. 41. P. 1215–1221.
16. *Rhandi A.* Multiplicative perturbations of linear Volterra equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119. P. 493–501.
17. *Chang J.-C., Shaw S.-Y.* Multiplicative and additive perturbations of resolvent families // Int. Math. J. 2002. V. 2. P. 841–853.
18. *Xin Y., Liang C.* Multiplicative perturbations of C-regularized resolvent families // J. Zheijang University Science. 2004. V. 5. P. 528–532.
19. *Lizama C., Poblete V.* On multiplicative perturbation of integral resolvent families // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 327. P. 1335–1359.
20. *Kostić M.* (a,k)-Regularized C-resolvent families: regularity and local properties // Abstract Appl. Anal. 2009. V. 2009. Art. ID 858242.
21. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. New York, 1998.
22. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston, 2003.
23. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1367–1375.
24. *Федоров В.Е., Авилович А.С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана–Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60. № 2. С. 461–477.
25. *Fedorov V.E., Filin N.V.* On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations // Fractal and Fractional. 2021. V. 5. № 20. P. 1–14.
26. *Martínez C., Sanz M.* The Theory of Fractional Powers of Operators. Amsterdam, 2001.
27. *von Wahl W.* Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1972. Bd. 11. S. 231–258.
28. *Periago F., Straub B.* A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations // J. Evolution Equat. 2002. V. 2. P. 41–68.

Университет Кхеми Мильяны,
г. Кхеми Мильяна, Алжир,
Челябинский государственный университет,
Университет Нови-Сада,
г. Нови-Сад, Сербия

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 20.10.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.