

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ С НАГРУЗКАМИ И БИФУРКАЦИОННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение Вольтерры с локальными и/или интегральными нагрузками на искомое решение, заданными с помощью интеграла Стилтеса. Уравнение содержит бифуркационный параметр и при любом его значении имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на те значения параметра (точки бифуркации), в окрестности которых уравнение имеет нетривиальные непрерывные вещественные решения. Построены главные члены асимптотики ветвей решений и указан способ их уточнения. Приведены иллюстрирующие примеры. Установлен принцип линеаризации, позволяющий находить точки бифуркации, используя только информацию о линейной части нелинейного уравнения с векторной нагрузкой и векторным бифуркационным параметром.

DOI: 10.31857/S0374064121120086

Введение. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – бифуркационный параметр, $x(t) \in C[0, T]$ – искомая функция, функционал x_α , называемый в приложениях *нагрузкой*, задаётся с помощью интеграла Стилтеса: $x_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} x(t) d\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ – заданная функция ограниченной вариации, $[t_1, t_2] \in (0, T)$. Поэтому нагрузка x_α может быть как локальной вида $x_\alpha = x(\alpha)$, $\alpha \in (0, T)$, так и нелокальной. Нелинейное интегральное отображение $\mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda)$ определяется формулой (2) (см. ниже).

Уравнения с нагрузками по свойствам и по области приложений близки нестандартным дифференциально-интегральным уравнениям [1] и уравнениям нейтрального типа [2]. Отметим, что метод выпуклых мажорант позволяет исследовать области существования нелинейных интегральных уравнений (см., например, [3]). Функционал x_α и функция $x(t)$ зависят от параметра λ . В дальнейшем для упрощения записи эта зависимость не всегда указывается явно.

В последние годы части этих разделов теорий дифференциальных и интегральных уравнений оформились в самостоятельные направления. Однако несмотря на наличие большого числа работ (см. работы [4–10] и библиографию в них) даже простейшие классы уравнений Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами оставались неизученными. Цель настоящей работы – указать подход к исследованию таких уравнений достаточно общего вида.

1. Постановка задачи. Пусть выполняется условие**I.** Нелинейное отображение $\mathcal{L} : C[0, T] \rightarrow C([0, T] \times \mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda) = & a(t, \lambda)x_\alpha + \sum_{i+k=l}^N f_{ik}(t, \lambda)x^i(t)x_\alpha^k + \\ & + \int_0^t \sum_{i+k=l}^N K_{ik}(t, s, \lambda)x^i(s)x_\alpha^k ds + R(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь l и N – заданные натуральные числа, $l \geq 2$, $t \in [0, T]$, функции $x(t)$, $f_{ik}(t, \lambda)$, $K_{ik}(t, s, \lambda)$, $R(x(t), x_\alpha, t, \lambda)$ являются непрерывными по совокупности переменных и достаточно гладкими по переменной $\lambda \in \mathbb{R}$, которая в приложениях играет роль параметра. Кроме того, в окрестности точки λ_0 предполагается выполненной следующая оценка, указывающая порядок малости при $\|x\| \rightarrow 0$, $|x_\alpha| \rightarrow 0$ нелинейного члена R :

$$\|R(x(t), x_\alpha, t, \lambda)\| = \mathcal{O}((\|x\| + |x_\alpha|)^{N+1}),$$

где $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$.

Очевидно, что при любом λ уравнению (1), (2) удовлетворяет пара $x(t) = 0$, $x_\alpha = 0$. Областью значений отображения $\mathcal{L}$ является пространство функций непрерывных по аргументу t и достаточно гладких по параметру λ .

Определение 1. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации* уравнения (1), если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдутся непрерывная функция $x(t)$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам $0 < \|x(t)\| < \varepsilon$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ и уравнению (1).

В данной работе находятся условия, при выполнении которых точка $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ является точкой бифуркации уравнения (1), (2) и можно построить асимптотику нетривиальных ветвей малых решений уравнения (1), (2). Под ветвью понимается непрерывное вещественное решение $x(t)$ такое, что $x(t) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ (или $\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$). Очевидно, что каждому решению $x(t)$ ставится в соответствие единственная нагрузка с помощью заданного линейного функционала.

Известно (см., например, [4–7]), что нагруженные уравнения моделируют процессы, состояние которых в какие-либо моменты (или локальные промежутки времени) оказывает влияние на их протекание в целом. Нагруженным дифференциальным уравнениям (обыкновенным и в частных производных) посвящено достаточно много работ (см. библиографию в [5]). Но классы интегральных уравнений Вольтерры с нагрузками и бифуркационный анализ в моделях с нагрузками в известной нам литературе ранее не изучались.

Мы получим решение поставленной задачи, построив уравнение относительно нагрузки с бифуркационным параметром λ и исследовав его с помощью метода последовательных приближений, методов степенной геометрии и при помощи вращения конечномерных векторных полей. Сочетание таких методов восходит к классическим подходам, изложенным в [11–17], и нашло приложение при решении ряда сложных задач механики, математической физики и энергетики [1, 17–20].

2. Построение уравнения относительно нагрузки и необходимые условия бифуркации. Для большей наглядности предлагаемого подхода сначала проведём его изложение при наличии только одной нагрузки (т.е. в приведённой выше постановке; случай же, когда λ и x_2 – векторы, рассматривается в п. 5 работы). Используя метод последовательных приближений и теорему о неявном отображении в аналитическом случае, решение $x(t)$ интегрального уравнения Вольтерры (1) построим при $t \in [0, T]$ и $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$, $|x_\alpha| \leq \rho_2$ в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, \lambda) x_\alpha^n. \quad (3)$$

Функции $a_n(t, \lambda)$ вычислим последовательно, используя рекуррентные формулы

$$a_1(t, \lambda) = a(t, \lambda),$$

$$a_n(t, \lambda) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \mathcal{L} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t, \lambda) x_\alpha^k, x_\alpha, t, \lambda \right) \Big|_{x_\alpha=0}, \quad n = 2, 3, \dots$$

При этом в силу структуры оператора (2) очевидно, что для первых $2l - 2$ коэффициентов ряда (3) получим простые формулы

$$a_2(t, \lambda) = \dots = a_{l-1}(t, \lambda) \equiv 0,$$

$$a_n(t, \lambda) = \frac{1}{n!} \sum_{i+k=n} \left[f_{ik}(t, \lambda) a^i(t, \lambda) + \int_0^t K_{ik}(t, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right], \quad n = \overline{l, 2l-2}.$$

На основании теоремы о неявном отображении ряд (3) сходится в достаточно малой окрестности $|x_\alpha| \leq \rho_2$. Величину ρ_2 можно оценить снизу, используя метод выпуклых мажорант [3, 18]. Эту возможность продемонстрируем ниже в п. 4 при рассмотрении примера 2. Из изложенного вытекает

Лемма 1. Пусть выполнены условия I. Тогда нагрузка x_α удовлетворяет уравнению

$$A_1(\lambda)x_\alpha + \sum_{i=l}^{\infty} A_i(\lambda)x_\alpha^i = 0, \quad (4)$$

где

$$A_1(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} a_1(t, \lambda) d\alpha(t) - 1, \quad A_i(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} a_i(t, \lambda) d\alpha(t), \quad i = l, l+1, \dots$$

Доказательство вытекает из возможности представления решения $x(t)$ в виде ряда (3) и задания нагрузки с помощью линейного функционала (интеграла Стилттьеса).

Следствие 1 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы число λ_0 могло быть точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (2), необходимо выполнение равенства

$$A_1(\lambda_0) = 0.$$

Доказательство. Уравнение (4) при каждом λ имеет тривиальное решение $x_\alpha \equiv 0$. Если $A_1(\lambda_0) \neq 0$, то при $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$ в окрестности $|x_\alpha| < \rho_2$ на основании теоремы о неявной функции малое решение уравнения (4) единственно. Следовательно, в этом случае $x_\alpha \equiv 0$ и λ_0 , согласно определению 1, не является точкой бифуркации уравнения (1). Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть в уравнении (4) все коэффициенты $A_i(\lambda)$ в точке λ_0 равны нулю. Тогда λ_0 будет точкой бифуркации. Более того, уравнение (1), (2) при $\lambda = \lambda_0$ имеет с-параметрическое нетривиальное решение $x(t, s)$, зависящее от достаточно малого параметра s . При $0 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_1$ других малых решений уравнения (1), (2) не имеет.

Доказательство очевидно, так как в силу условий следствия 2 нагрузка x_α при $\lambda = \lambda_0$ в разложении (3) решения уравнения (1), (2) остаётся произвольным параметром s из интервала $|s| \leq \rho_2$, в котором сходится ряд (3). Следствие доказано.

3. Достаточные условия существования точки бифуркации и асимптотика решений. Конструктивные достаточные условия существования точек бифуркации получим, определив вещественные решения $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) уравнения (4) и подставив их в правую часть представления (3). Напомним, что в уравнении (4)

$$A_l(\lambda) = \frac{1}{l!} \sum_{i+k=l} \left(f_{ik}(\alpha, \lambda) a^i(\alpha, \lambda) + \int_0^\alpha K_{ik}(\alpha, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right)$$

в случае локальной нагрузки и

$$A_l(\lambda) = \frac{1}{l!} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i+k=l} \left(f_{ik}(t, \lambda) a^i(t, \lambda) + \int_0^t K_{ik}(t, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right) d\alpha(t)$$

в случае интегральной (нелокальной) нагрузки.

В силу леммы 1 для построения асимптотики величины x_α следует в уравнении (4) положить $\lambda = \lambda_0 + \mu$, где μ – малый вещественный параметр.

Потребуем выполнения условий.

II. Число λ_0 – корень уравнения $A_1(\lambda) = 0$ кратности p .

III. Имеет место соотношение $A_l(\lambda_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (4) при $\lambda = \lambda_0 + \mu$ преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)\mu^p + \mathcal{O}(|\mu|^{p+1})\right)x_\alpha + (A_l(\lambda_0) + \mathcal{O}(|\mu|))x_\alpha^l + \mathcal{O}(|x_\alpha|^{l+1}) = 0 \quad (5)$$

в окрестности точек $x_\alpha = 0$, $\mu = 0$. Решение уравнения (5) будем искать, используя разложение Ньютона–Пьюизё (диаграмма Ньютона определяет показатель $p/(l-1)$):

$$x_\alpha = (c_0 + \mathcal{O}(|\mu|))\mu^{p/(l-1)}, \quad c_0 \neq 0.$$

Очевидно, что значение c_0 удовлетворяет уравнению

$$\text{sign } \mu^p \frac{1}{p!} \frac{d^p A_1(\lambda)}{d\lambda^p} \Big|_{\lambda=\lambda_0} c + A_l(\lambda_0)c^l = 0. \quad (6)$$

Поэтому при нечётном p получаем два уравнения, а именно

$$\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)c + A_l(\lambda_0)c^l = 0 \quad \text{при } \mu > 0, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)c + A_l(\lambda_0)c^l = 0 \quad \text{при } \mu < 0. \quad (8)$$

При нечётном p и любом l уравнение (6) хотя бы в одной из полукрестностей точки $\mu = 0$ имеет простой вещественный корень $c_0 \neq 0$.

Случай 1. При чётном l вещественным корнем уравнения (7) является

$$c_0 = \sqrt[l-1]{-\frac{1}{p!} \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)}},$$

а уравнение (5) имеет вещественное решение $x_\alpha \sim c_0|\mu|^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow +0$ и соответственно $x_\alpha \sim -c_0|\mu|^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow -0$.

Случай 2. При нечётном l и $A_1^{(p)}(\lambda_0)A_l(\lambda_0) < 0$ у уравнения (7) будет два вещественных корня

$$c_{0\pm} = \pm \sqrt[l-1]{\frac{1}{p!} \left| \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)} \right|},$$

а у уравнения (5) при $0 \leq \mu \leq \rho_1$ – два вещественных решения $x_{\alpha\pm} \sim c_{0\pm}\mu^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow +0$. Если l нечётно и $A_1^{(p)}(\lambda_0)A_l(\lambda_0) > 0$, верен аналогичный результат при $-\rho_1 \leq \mu \leq 0$.

Из изложенного вытекает

Теорема 1. Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (2). Более того, при чётном l уравнение (1), (2) имеет в окрестности точки λ_0 единственное малое вещественное решение $x(t, \lambda)$, при этом

$$x(t, \lambda) \sim a_1(t, \lambda_0) \sqrt[l-1]{-\frac{1}{p!} \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)}} (\lambda - \lambda_0)^{p/(l-1)} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_0.$$

При нечётном l уравнение (1), (2) имеет в одной из полукрестностей точки λ_0 два вещественных решения с аналогичной асимптотикой.

Из доказательства теоремы 1 с учётом следствия 2 вытекает

Теорема 2. Пусть выполнены условия I, II и λ_0 – корень уравнения $A_1(\lambda) = 0$ нечётной кратности. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (2).

Теорема 1 с учётом возможности представления других многообразий решений уравнения (4) в виде разложений Ньютона–Пуизё допускает обобщения.

Действительно, рассмотрим коэффициенты $A_1(\lambda)$, $A_l(\lambda)$, $A_{l+1}(\lambda)$, ..., $A_{n-1}(\lambda)$ уравнения (4) и введём условие

IV. Число λ_0 является нулём функции $A_i(\lambda)$ кратности p_i , $i=1, l, \dots, n-1$, а $A_n(\lambda_0) \neq 0$.

Нанесём на координатную плоскость точки $(1, p_1)$, (l, p_l) , ..., $(n-1, p_{n-1})$, $(n, 0)$ и построим диаграмму Ньютона для этих точек (рисунок).

Возьмём на рисунке грань (a, b) . На этой грани лежат точки (i, p_i) , удовлетворяющие равенству $ir/s + k = \theta$, где $r/s = \tan \varphi$, а θ – ордината точки пересечения продолжения грани (a, b) с осью ординат. Очевидно, что θ также будет рациональным числом.

Будем искать решение уравнения (4) в виде $x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}$, $c(0) \neq 0$. Тогда $c(0)$ должно удовлетворять по крайней мере одному из двух уравнений

$$P_\pm(c) := \sum_{ir/s+k=\theta} \text{sign} \mu^k \frac{1}{p_i!} a_i^{(p_i)}(\lambda_0) c^i = 0.$$

Построив простые вещественные корни $c^* \neq 0$ этих уравнений, запишем, как и в доказательстве теоремы 1, асимптотики малых решений $x(t, \lambda)$ уравнения (1), (2) в двух полукрестностях точки бифуркации λ_0 .

4. Построение решений уравнения (1), (2) методом неопределённых коэффициентов. Изложенный выше подход позволяет строить решения уравнения (1), (2) непосредственно в виде ряда по целым или дробным степеням параметра $\lambda - \lambda_0$, где λ_0 – точка бифуркации. Коэффициенты ряда, как и в известном методе Некрасова–Назарова [13, 15] продолжения решения, определяются из рекуррентной последовательности линейных уравнений. Особенность этого аналитического метода состоит в том, что произвольные постоянные на каждом шаге находятся из условий разрешимости последующих уравнений этой последовательности.

Пример 1 демонстрирует такой способ решения уравнений с нагрузками в условиях теоремы 1, а пример 2 – построение параметрического семейства решений при выполнении условий следствия 2.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = t(\lambda - 2)x(1) - \int_0^t tsx^3(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Для него находим, что уравнение (4) для нагрузки имеет следующие коэффициенты: $A_1(\lambda) = \lambda - 3$, $A_3(\lambda) = -(\lambda - 2)^3/5$. Поэтому, согласно следствию 1, точкой бифуркации уравнения (9) может быть только точка $\lambda_0 = 3$. Для этой точки выполнены условия I, II при $p = 1$, $l = 3$. Следовательно, согласно теореме 1, решение будем искать в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \mu^{n/2}, \quad \text{где} \quad \mu = \lambda - 3.$$

Используя метод неопределённых коэффициентов, для вычисления коэффициентов $a_n(t)$ получаем последовательность линейных уравнений

$$a_1(t) = ta_1(1), \quad a_2(t) = ta_2(1), \quad a_3(t) = ta_3(1) + ta_1(1) - \int_0^t ts a_1^3(s) ds,$$

$$a_4(t) = ta_4(1) + ta_2(1) - 3 \int_0^t tsa_1^2(s)a_2(s) ds, \quad a_5(t) = ta_5(1) + ta_3(1) - 3 \int_0^t tsa_1^2(s)a_3(s) ds, \quad \dots$$

Следовательно, $a_1(t) = tc_1$, $a_2(t) = tc_2$, ... Постоянные c_1 , c_2 определяются из условий разрешимости последующих уравнений цепочки. Именно, c_1 – из алгебраического уравнения $c_1 - c_1^3/5 = 0$. Поэтому $c_1 = \pm\sqrt{5}$, а интегральное уравнение (9) имеет в положительной окрестности точки бифуркации $\lambda_0 = 3$ два малых нетривиальных вещественных решения

$$x_{1,2} \sim \pm t(\lambda - 3)^{1/2}\sqrt{5} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 3.$$

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = tb(\lambda)x(1) - \int_0^t (t-1)x^3(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad T > 1. \quad (10)$$

Пусть $b(1) = 1$. Тогда, согласно следствию 2, точка $\lambda_0 = 1$ будет точкой бифуркации уравнения (10). Более того, при $\lambda_0 = 1$ малое решение этого уравнения можно построить в виде ряда

$$x(t) = tc + \sum_{n=3}^{\infty} a_n(t)c^n,$$

равномерно сходящегося при $t \in [0, T]$ и $|c| \leq \rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало. Коэффициенты $a_n(t)$ также легко вычислить методом неопределённых коэффициентов.

Для оценки радиуса ρ сходимости этого ряда построим, следуя [3], мажорирующую систему

$$r = T\rho + T^2r^3, \quad 1 = 3T^2r^2.$$

Пара $r^* = 1/(\sqrt{3}T)$, $\rho^* = 2r^*/(3T)$ удовлетворяет этой системе. Поэтому при $|c| \leq \rho < 2/(3\sqrt{3}T^2)$ ряд равномерно сходится, а интегральное уравнение (10) в пространстве $C[0, T]$ имеет c -параметрическое решение.

5. Интегральные уравнения Вольтерры с векторной нагрузкой и векторным бифуркационным параметром. Пусть в уравнении (1) $x_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Значения нагрузки и бифуркационный параметр лежат в окрестностях нулей векторных пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $\mathcal{L}$, которая теперь задаётся равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda) = & \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)x_{\alpha_k} + \\ & + \sum_{s=l}^{\infty} \sum_{j+k_1+\dots+k_n=s} \left[f_{jk_1\dots k_n}(t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)x^j(t)x_{\alpha_1}^{k_1}\dots x_{\alpha_n}^{k_n} + \right. \\ & \left. + \int_0^t K_{jk_1,\dots,k_n}(t, s, \lambda_1, \dots, \lambda_m)x^j(s)x_{\alpha_1}^{k_1}\dots x_{\alpha_n}^{k_n} ds \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где b_k , $f_{jk_1,\dots,k_n}$, $K_{jk_1,\dots,k_n}$ – непрерывные функции, достаточно гладкие по всем λ_i в окрестности $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta$. Далее, для краткости, (1), (11) обозначает интегральную систему (1) с правой частью вида (11).

Найдём достаточные условия, когда вектор $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ будет точкой бифуркации и можно построить асимптотику вещественных решений при $\lambda_i = \lambda_{0i} + \mu$, $i = 1, \dots, m$, где $\mu \in [0, \delta]$ (или $\mu \in [-\delta, 0]$).

Начнём с построения системы для определения векторной нагрузки. Для этого построим решение $x(t)$ с помощью ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(t, \lambda, x_\alpha) \quad (12)$$

по однородным формам компонент векторной нагрузки x_α . Здесь $a_j(t, \lambda, \mu x_{\alpha_1}, \dots, \mu x_{\alpha_n}) = \mu^j a_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$. Отметим, что j -однородные формы вычисляются однозначно рекуррентным образом:

$$a_1(t, \lambda, x_\alpha) = \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}; \quad a_1 = \dots = a_{l-1} = 0;$$

$$a_m(t, \lambda, x_\alpha) = \frac{1}{m!} \sum_{j+k_1+\dots+k_n=m} \left[f_{jk_1, \dots, k_n}(t, \lambda) a_1(t, \lambda, x_\alpha)^j x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} + \right. \\ \left. + \int_0^t K_{jk_1, \dots, k_n}(t, s, \lambda) a_1(s, \lambda, x_\alpha)^j x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} ds \right], \quad m = \overline{l, 2l-1};$$

$$a_j(t, \lambda, x_\alpha) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \mu^j} \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{j-1} a_n(t, \mu x_{\alpha_1}, \dots, \mu x_{\alpha_n}), \mu x_\alpha, t, \lambda \right) \Big|_{\mu=0}, \quad j = 2l, 2l+1, \dots$$

Замечание. Последовательность $\{x_m\}$, где $x_m(t) = \mathcal{L}(x_{m-1}(t), x_\alpha, t, \lambda)$ при начальном приближении $x_0(t) = \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}$ и при $\|x_\alpha\| \leq \rho$, равномерно сходится к сумме ряда (12). Поэтому в неаналитическом случае для построения решения и коэффициентов a_j можно использовать метод последовательных приближений.

Лемма 2. Искомая нагрузка x_α в решении (12) должна удовлетворять n нелинейным с параметрами λ_i уравнениям

$$A_1(\lambda) x_\alpha + \sum_{j=l}^{\infty} F_j(\lambda, x_\alpha) = 0. \quad (13)$$

Здесь $F_j = (F_{j1}, \dots, F_{jn})^T$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, F_{ji} , $i = \overline{1, n}$, — j -однородные формы компонент вектора $x_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$, $A_1(\lambda) = [(b_k(t, \lambda), \alpha_i)]_{i,k=\overline{1, n}}$ — $n \times n$ -матрица, α_i — линейные функционалы в пространстве $C[0, T]$ (интегралы Стильтьеса).

Доказательство леммы проводится применением функционалов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ к обоим частям равенства (12) с учётом обозначения $x_{\alpha_i} = (x(t), \alpha_i)$, $i = \overline{1, n}$, для функционалов.

Рассмотрение системы (13) приводит к следующему результату.

Теорема 3 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы вектор $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ мог быть точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11), необходимо выполнение равенства $\det A_1(\lambda_0) = 0$.

Доказательство. Вектор λ_0 может быть точкой бифуркации уравнения (1), (11) тогда и только тогда, когда он является точкой бифуркации и системы (13). Но если $\det A_1(\lambda_0) \neq 0$, то у системы (13) кроме тривиального нет других малых решений, как это следует из теоремы о неявных функциях. Следовательно, так как ряд (12) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между малым решением интегрального уравнения и малым решением системы (13), то интегральное уравнение также имеет только тривиальное малое решение $x(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

6. Достаточное условие бифуркации в векторном случае: принцип линеаризации. Пусть выполнено необходимое условие бифуркации (т.е. теорема 3) и $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$. Пусть $\{\phi_1, \dots, \phi_{n-r}\}$ и $\{\psi_1, \dots, \psi_{n-r}\}$ — ортонормированные базисы в подпространствах нулей $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно.

Введём квадратную матрицу $\hat{A}_1(\lambda) = A_1(\lambda) + \sum_{i=1}^{n-r} (\cdot, \phi_i) \psi_i$ порядка n . Отметим, что эта матрица обратима, поскольку несложно показать, что однородная система $\hat{A}_1(\lambda_0)l = 0$ имеет только тривиальное решение $l = 0$. Поэтому в силу непрерывности $A_1(\lambda)$ относительно λ матрица $\hat{A}_1(\lambda)$ также обратима по крайней мере в малой окрестности $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \rho$ на основании теоремы об обратном операторе.

Введём обозначение $\lambda_0 + \mu := (\lambda_{01} + \mu, \lambda_{02} + \mu, \dots, \lambda_{0m} + \mu)$, вспомогательные параметры $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ и запишем систему (13) в виде

$$\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)x_\alpha = \sum_{k=1}^{n-r} \xi_k \psi_k - \sum_{j=l}^{\infty} F_j(\lambda_0 + \mu, x_\alpha), \quad (14)$$

где $\xi_i = (x_\alpha, \phi_i)$, $i = \overline{1, n-r}$.

Так как $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, то параметры ξ_i являются бесконечно малыми величинами. Матрица $\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)$ имеет обратную при $|\mu| < \rho$. Поэтому можно построить сходящуюся последовательность $\{x_\alpha^n\}$, используя рекурсию

$$x_\alpha^n = [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \sum_{k=1}^{n-r} \xi_k \psi_k - [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \sum_{k=l}^{\infty} F_k(\lambda_0 + \mu, x_\alpha^{n-1})$$

при начальном приближении $x_\alpha^0 = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_\alpha^n = x_\alpha$. Следовательно,

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{n-r} [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \psi_k \xi_k + R(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, \mu), \quad (15)$$

где $\|R(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, \mu)\| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Подставляя построенный вектор x_α в равенство (14), получаем $n-r$ уравнений для определения компонент вектора $\xi(\mu)$:

$$\sum_{k=1}^{n-r} [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1} \psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}] \xi_k + r_i(\xi, \mu) = 0, \quad (16)$$

$i = \overline{1, n-r}$, $|r_i(\xi, \mu)| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Найдём достаточные условия, не зависящие от вида нелинейных функций $r_i(\xi, \mu)$, при выполнении которых $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (16).

Введём непрерывную функцию

$$\Delta(\mu) = \det [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1} \psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}]_{i,k=1}^{n-r}. \quad (17)$$

Ввиду равенства $\hat{A}_1(\lambda_0) \phi_k = \psi_k$ верно тождество $\hat{A}_1^{-1}(\lambda_0) \psi_k = \phi_k$, $k = \overline{1, n-r}$. Поэтому $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) = 0$ и точка $\mu = 0$ является нулём функции $\Delta(\mu)$.

Пусть выполняется условие

V. Значение $\mu = 0$ является k -кратным нулём функции $\Delta(\mu)$.

Тогда $\Delta(\mu) \sim c\mu^k$ при $\mu \rightarrow 0$ и $d^i \Delta(\mu)/d\mu|_{\mu=0} = 0$, $i = \overline{0, k-1}$, $d^k \Delta(\mu)/d\mu^k|_{\mu=0} \neq 0$. Если матрица $A_1(\lambda + \mu)$ в изолированной особой точке λ_0 имеет полный обобщённый жорданов набор (см. [17, § 30]) из $n-r$ цепочек длины p_i , $i = \overline{1, n-r}$, то $k = p_1 + \dots + p_{n-r}$.

Определение 2. Назовём число k *корневым числом* матрицы $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 .

В монографии [17, гл. 9] показано, что корневое число не зависит в фредгольмовой особой точке λ_0 от выбора базисов в подпространствах $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A^*(\lambda_0))$.

Теорема 4 (принцип линеаризации). Пусть корневое число k матрицы $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 нечётное. Тогда λ_0 будет точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11).

Доказательство. Вследствие (12), (15) λ_0 будет точкой бифуркации уравнения (1), (11) тогда и только тогда, когда $\mu = 0$ является точкой бифуркации системы (16). Запишем систему (16) в векторном виде

$$S(\mu)\xi + r(\xi, \mu) = 0,$$

где $S(\mu) = [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1}\psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}]_{k,i=\overline{1,n-r}}$ – квадратная матрица, $\xi \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\|r(\xi, \mu)\| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Зададим сколь угодно малые $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ и введём векторное поле

$$H(\xi, t) := S((2t-1)\delta)\xi + r(\xi, (2t-1)\delta) : \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r},$$

определённое при $\xi, t \in M$, где $M = \{\xi, t : \|\xi\| < \varepsilon, 0 \leq t \leq 1\}$.

Случай 1. Если существует пара $(\xi^*, t^*) \in M$, для которой $H(\xi^*, t^*) = 0$, то, согласно определению 1, точка $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (16), и теорема 4 справедлива.

Случай 2. Предположим, что $H(\xi, t) \neq 0$ при любых $(\xi, t) \in M$ и, следовательно, теорема 4 неверна. Ввиду непрерывности поля $H(\xi, t)$ при $\xi, t \in M$ поля $H(\xi, 0)$ и $H(\xi, 1)$ гомотопны на сфере $\|\xi\| = \varepsilon$, поэтому их вращения на этой сфере равны между собой, т.е.

$$J(H(\xi, 0), \|\xi\| = \varepsilon) = J(H(\xi, 1), \|\xi\| = \varepsilon). \quad (18)$$

В силу малости ε поля $H(\xi, 0)$ и $H(\xi, 1)$ гомотопны своим невырожденным линейным частям $S(-\delta)\xi$ и $S(+\delta)\xi$ соответственно, т.е.

$$J(H(\xi, 0), \|\xi\| = \varepsilon) = J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) \quad \text{и} \quad J(H(\xi, 1), \|\xi\| = \varepsilon) = J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon).$$

В силу условия V имеем $\det S(-\delta) \sim c(-\delta)^k$ и $\det S(+\delta) \sim c(+\delta)^k$. Поэтому по теореме Кронекера об индексе получаем

$$J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = \text{sign}(-\delta)^k, \quad J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = \text{sign}(+\delta)^k.$$

В силу нечётности k приходим к равенствам

$$J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = -1, \quad J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = +1,$$

а значит, равенство (18) невозможно. Следовательно, при нечётном k найдётся пара $(\xi^*, t^*) \in M$, для которой $H(\xi^*, t^*) = 0$ и, согласно определению 1, точка $\mu = 0$ является точкой бифуркации системы (16), а точка λ_0 – точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11). Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 4 в случае одной нагрузки как следствие вытекает справедливость теоремы 2.

Следствие 3. Пусть для уравнения (1), (11) $\det A_1(\lambda_0) = 0$, $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$, а $\{\phi_i\}_1^{n-r}$ и $\{\psi_i\}_1^{n-r}$ – базисы в подпространствах $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно. Если при этом $n - r$ – нечётное число и $\det [(A_1^{(1)}(\lambda_0)\phi_1, \psi_k)]_{i,k=1}^{n-r} \neq 0$, то λ_0 – точка бифуркации этого уравнения.

Доказательство. В условиях следствия 3 в изолированной фредгольмовой точке λ_0 матрица $A_1(\lambda_0 + \mu)$ при $|\mu| < r$ не имеет присоединённых элементов. Поэтому векторы $\phi_1, \dots, \phi_{n-r}$ составляют её полный обобщённый жорданов набор и корневое число k равно $n - r$. Таким образом, условия теоремы 4 выполнены. Следствие доказано.

Следствие 4. Пусть для уравнения (1), (11) $\det A_1(\lambda_0) = 0$, $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$, а $\{\phi_i\}_1^{n-r}$ и $\{\psi_i\}_1^{n-r}$ – базисы в подпространствах $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно.

Пусть, кроме того,

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} A_1(\lambda)\phi_i|_{\lambda=\lambda_0} = 0, \quad j = \overline{0, p-1}, \quad i = \overline{1, n-r}, \quad \text{и} \quad \det \left[\frac{d^p}{d\lambda^p} \langle A_1(\lambda)\phi_i, \psi_j \rangle \right]_{i,j=1}^{n-r} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0,$$

а число $p(n - r)$ – нечётное. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (11).

Доказательство. В условиях следствия 4 у функции $\Delta(\mu)$, определённой выше формулой (17), точка $\mu = 0$ является $p(n - r)$ -кратным нулём. Так как число $p(n - r)$ нечётно, то справедливость следствия 4 вытекает из доказательства принципа линеаризации. Следствие доказано.

Принцип линеаризации является достаточным условием существования точки бифуркации, при проверке которого используется только информация о линейной части уравнения (1), (11). При выполнении условий теоремы 4 уравнение (1), (11) с n нагрузками может иметь многообразие малых вещественных решений $x(t, \lambda_0)$, зависящих от $n - r$ малых параметров, где r – ранг матрицы $A_1(\lambda_0)$, а λ_0 – точка бифуркации.

Далее, как и в п. 3, получим в векторном случае достаточные условия, когда нетривиальные вещественные решения $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ можно построить по крайней мере в одной из полукрестностей точки бифуркации, используя дополнительную информацию о нелинейной части уравнения (1), (11).

Так как ряд (12) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между решениями уравнения (1), (11) и системы (13), то для построения указанных решений уравнения (1), (11) достаточно уметь строить вещественное решение $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) системы (13).

Пусть для системы (13) выполняется условие

VI. При $\mu \rightarrow 0$ справедливы асимптотические оценки

$$A_1(\lambda_0 + \mu)x_\alpha \sim F_{1p_1}(\lambda_0)^{-1}x_\alpha\mu^{p_1}, \quad F_i(\lambda_0 + \mu, x_\alpha) \sim F_{ip_i}(\lambda_0, x_\alpha)\mu^{p_i}, \quad i = l, l+1, \dots$$

При этом $p_i > 0$, $i = 1, l, l+1, \dots, n-1$, $p_n = 0$, F_{1p_1} – $n \times n$ -матрица, $F_{ip_i}(\lambda_0, x_\alpha)$ – i -однородные формы относительно компонент вектора нагрузки x_α .

Как и в случае одной нагрузки, нанеся на координатную плоскость точки $(1, p_1)$, (l, p_l) , $(l+1, p_{l+1})$, $\dots$, $(n-1, p_{n-1})$, $(n, 0)$ (см. рисунок), построим диаграмму Ньютона и будем искать вектор нагрузки в виде $x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}$, $c(0) \neq 0$.

Для определения вектора $c(0)$ получим две разные системы – одну для $\mu > 0$, а другую для $\mu < 0$:

$$P_\pm(c) := \sum_{k+ir/s=\theta} \text{sign } \mu^k F_{ik}(\lambda_0, c) = 0.$$

Компоненты векторов $F_{ik}(\lambda_0, c)$ – i -однородные формы относительно вектора c . Построив простое ненулевое вещественное решение c одной из этих систем, запишем в соответствующей полукрестности точки бифуркации λ_0 асимптотику

$$x(t, \lambda) \sim \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda_0) c_k^* |\lambda - \lambda_0|_s^r$$

при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) решения интегрального уравнения (1), (11).

Закключение. Предложенный метод позволяет при $\lambda \in \mathbb{R}^m$ получить достаточные условия существования более общих многообразий, а именно кривых и поверхностей бифуркации для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + a(t, \lambda)x(t) = \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \quad x(0) = 0,$$

с нагрузками. С его помощью можно провести бифуркационный анализ и более общих классов дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах с нагрузками в окрестностях точек ветвления решений, а также решения задачи Коши для дифференциального уравнения с нагрузками. Результаты работы могут быть применены при анализе нестандартных нелинейных интегральных моделей с нагрузками, возникающих при исследовании эргодических процессов в приложениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, программы фундаментальных исследований Российской Федерации на 2021–2030 гг.; проект государственного задания (№ FWEU-2021-0006) с использованием ресурсов ЦКП "Высокотемпературный контур" (Министерство образования и науки Российской Федерации, проект 13.ЦКП.21.0038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A.* Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. V. 97. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science. Ser. A / Ed. Prof. L. Chua. Singapore; London, 2020.
2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1982. Т. 19. С. 55–126.
3. *Sidorov D.N., Sidorov N.A.* Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations // Banach J. Math. Anal. 2021. V. 6. № 1. P. 1–10.
4. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. вычислит. математики. 2014. Т. 17. № 1. С. 1–16.
5. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М., 2012.
6. *Дикинов Х.Ж., Кереев А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 12. № 1. С. 177–179.
7. *Agarwal P., Baltaeva U., Alikulov Y.* Solvability of the boundary-value problem for a linear loaded integro-differential equation in an infinite three-dimensional domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. P. 110108.
8. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.* О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 5. С. 773–789.
9. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.* Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 124–129.
10. *Sidorov N.A.* Special Issue "Solvability of Nonlinear Equations with Parameters: Branching, Regularization, Group Symmetry and Solutions Blow-Up". Symmetry, MDPI, 2021.
11. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных уравнений. М., 1956.
12. *Dancer E.N.* Bifurcation theory // Indiana Univ. Math. 1974. V. 23. № 11. P. 1069–1076.
13. *Ахмедов К.Т.* Аналитический метод Некрасова–Назарова в нелинейном анализе // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 4 (76). С. 135–153.
13. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М., 1998.
15. *Люстерник Л.А.* Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. Вып. 6. С. 145–168.
16. *Сидоров Н.А., Треногин В.А.* Точки бифуркации нелинейных уравнений // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. М., 2003.
17. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.
18. *Сидоров Д.Н.* Методы анализа интегральных динамических систем / Под ред. А. Лоренци. Иркутск, 2013.
19. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev V.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht, 2013.
20. *Sidorov D., Muftahov I. et al.* A dynamic analysis of energy storage with renewable and diesel generation using Volterra equations // IEEE Trans. on Industr. Inf. 2020. V. 16. № 5. P. 3451–3459.

Иркутский государственный университет,
Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 07.05.2021 г.
После доработки 07.05.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.