

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 519.642.2

УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. М. Х. Бештоков

Изучаются краевые задачи для одномерного по пространственной переменной нагруженного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной по времени производной, а также разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Граничные условия являются локальными первого и третьего рода. Рассматриваемое уравнение представляет собой математическую модель движения влаги и солей в почвах с фрактальной структурой. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из которых следуют единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$, где h и τ – шаги по пространственной и временной переменным.

DOI: 10.31857/S0374064121120098

Введение. Нагруженными дифференциальными уравнениями принято называть уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях размерности меньшей, чем размерность области определения искомой функции [1]. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают, например, при изучении движения подземных вод, в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоём из нескольких источников поступает загрязняющее вещество определённой интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

В разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений большой вклад внесён авторами работ [1–4]. В обзорных статьях А.М. Нахушева на многочисленных примерах показана практическая и теоретическая важность исследований нагруженных дифференциальных уравнений. Одним из методов приближённого решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А.М. Нахушевым метод редукции интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным дифференциальным уравнениям. В работе [1] впервые указана связь нелокальных задач с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи типа Бицадзе–Самарского для уравнений Лапласа и теплопроводности эквивалентным образом редуцированы к локальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [5, 6], передачи тепла в гетерогенной среде [7, 8], влагопереноса в почво-грунтах [9] (см. [10, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных соболевского типа:

$$u_{xxt} + du_t + \eta u_{xx} + au_x + bu = q(x, t), \quad (0.1)$$

где $\eta = \eta(x, t)$, $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, $d = d(x, t)$. Уравнение (0.1) часто называют также *псевдопараболическим уравнением* или *уравнением псевдопараболического типа*.

Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений рассматривались в работах [11–13]. Задачи расчёта тепломассообмена с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции [14] и, подобно [15, 16], задачи регулирования уровня грунтовых

вод при орошении приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

В работе [17] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежит уравнение Аллера дробного порядка.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [18–24]. В частности, в [20] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной трактовке. В работе [21] построен новый разностный аналог (называемый формулой $L2 - 1_\sigma$), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для нагруженного уравнения соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной производной Герасимова–Капуто. Основным результатом работы заключается в доказательстве априорных оценок для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные оценки означают устойчивость решения относительно возмущения входных данных задачи и в предположении существования точного её решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности задачи позволяют утверждать сходимость приближённых решений к точному при увеличении точности аппроксимации.

1. Постановка первой краевой задачи. В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u(x_0, t) + f(x, t),$$

здесь $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, рассмотрим первую краевую задачу

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$ – дробная производная в смысле Герасимова–Капуто порядка

α , $0 < \alpha < 1$, x_0 – фиксированная точка интервала $(0, l)$, функции k , η , r , q , f и u_0 заданы и первые четыре из них удовлетворяют условиям

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x) \leq c_1, \quad |q(x, t)|, |r(x, t)|, |r_x(x, t)|, |k_x(x, t)| \leq c_2 \quad (1.4)$$

(c_i , $i = 0, 1, 2$, – положительные постоянные); считаем, что коэффициенты и свободный член уравнения (1.1), а также начальное условие (1.3) задачи имеют такую гладкость, которая обеспечивает нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Отметим, что приведённая выше конструкция дробной производной введена [25] итальянским механиком М. Капуто в 1967 г. Поэтому за рубежом её называют дробной производной Капуто. Однако правильнее называть её дробной производной Герасимова–Капуто, так как ещё в 1948 г. советский механик А.Н. Герасимов рассматривал [26] подобные выражения:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Как отмечено в работе [10, с. 159], второе слагаемое в правой части уравнения (1.1) очень мало при впитывании влаги и велико при испарении.

В дальнейшем предполагаем, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными для справедливости проводимых рассуждений производными. Через M_i , $i = 1, 2, \dots$, обозначаем положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи. При этом нумерация постоянных в каждом пункте статьи самостоятельная.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме. Чтобы получить априорную оценку решения задачи (1.1)–(1.3) в дифференциальной форме, введём скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(a, b) = \int_0^l ab \, dx, \quad (a, a) = \|a\|_0^2, \quad (2.1)$$

где a и b – заданные на $[0, l]$ функции. Умножив уравнение (1.1) скалярно на u , получим

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) = ((ku_x)_x, u) + (\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u) + (ru_x, u) - (qu(x_0, t), u) + (f, u). \quad (2.2)$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (2.2), пользуясь неравенством Коши с ε [27, с. 100]. Тогда

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l u \, dx \int_0^t u_\tau(x, \tau) (t-\tau)^{-\alpha} \, d\tau. \quad (2.3)$$

Справедлива следующая

Лемма 1 [20]. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t) \partial_{0t}^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пользуясь формулой (2.1) для скалярного умножения и леммой 1, получаем

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) \geq \frac{1}{2} (1, \partial_{0t}^\alpha u^2) = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2, \quad (2.4)$$

$$((ku_x)_x, u) = \int_0^l u (ku_x)_x \, dx = uku_x \Big|_0^l - \int_0^l ku_x^2 \, dx, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u) &= \int_0^l u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x \, dx = u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) \Big|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_x \partial_{0t}^\alpha u_x \, dx \leq \\ &\leq u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 \, dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(ru_x, u) = \int_0^l ruu_x \, dx \leq \frac{c_2}{2} \int_0^l u^2 \, dx + \frac{c_2}{2} \int_0^l u_x^2 \, dx \leq M_1 (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -(qu(x_0, t), u) &= - \int_0^l qu(x_0, t) u \, dx = -u(x_0, t) \int_0^l qu \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} u^2(x_0, t) + \frac{1}{2} \left(\int_0^l qu \, dx \right)^2 \leq M_2 (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(f, u) = \int_0^l f u \, dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + M_3(\varepsilon) \|f\|_0^2. \quad (2.9)$$

В силу соотношений (2.3)–(2.9) из тождества (2.2) и условий (1.2) следует неравенство

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 \, dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_4 \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_5 \|f\|_0^2,$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$, применяя к обеим частям которого оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_4 D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2), \quad (2.10)$$

где $D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) \, d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (2.10) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2 [20]. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет при почти всех t из $[0, T]$ неравенству $\partial_{0t}^\alpha y(t) \leq c_1 y(t) + \bar{c}_2(t)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, где $c_1 = \text{const} > 0$, а $\bar{c}_2(t)$ – суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0) E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(c_1 t^\alpha) D_{0t}^{-\alpha} \bar{c}_2(t),$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$$

– функции Миттаг-Лёффлера.

На основании леммы 2 оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.10). Пусть $y(t) = D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2$, $\partial_{0t}^\alpha y(t) = \|u(x, t)\|_{W_2^1(0,l)}^2$, тогда

$$D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_7 (D_{0t}^{-2\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (2.11)$$

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на $[0, T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha} g(t) \leq \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} D_{0t}^{-\alpha} g(t), \quad (2.12)$$

то из (2.10) с учётом неравенств (2.11) и (2.12) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_8 (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (2.13)$$

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(Q_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(Q_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(Q_T)$ и выполнены условия (1.4), то для решения задачи (1.1)–(1.3) справедлива априорная оценка (2.13).

Из оценки (2.13) следуют единственность решения задачи (1.1)–(1.3) и его непрерывная зависимость от входных данных в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для приближённого решения задачи (1.1)–(1.3) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные и учитывающую знак функции

$r(x, t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1.1) следующее уравнение с возмущёнными коэффициентами [27]:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \kappa(x, t)(k(x, t)u_x)_x + \partial_{0t}^\alpha (\eta(x)u_x)_x + r(x, t)u_x - q(x, t)u(x_0, t) + f(x, t),$$

где $\kappa(x, t) = 1/(1 + R(x, t))$, $R(x, t) = 0.5h|r(x, t)|/k(x, t)$ – разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.3) поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ :

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = & \kappa_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - \\ & - d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (3.2)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (3.3)$$

где

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_i^s \quad (3.4)$$

– дискретный аналог дробной производной Герасимова–Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [21]. Величины в правой части равенства (3.1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_i^j &= k(x_{i-0.5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2}, \\ r(x, t_{j+\sigma}) &= r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \\ r^+(x, t_{j+\sigma}) &= 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geq 0, \quad r^-(x, t_{j+\sigma}) = 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leq 0, \\ y^{(\sigma)} &= \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \\ x_{i_0}^- &= \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{i_0}^+ = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}, \quad x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}. \end{aligned}$$

Чтобы определить коэффициенты в дискретном аналоге (3.4), зададим сначала величины

$$\begin{aligned} a_0^{(\alpha,\sigma)} &= \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l + \sigma)^{1-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1, \\ b_l^{(\alpha,\sigma)} &= \frac{1}{2 - \alpha} [(l + \sigma)^{2-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{2-\alpha}] - \frac{1}{2} [(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}], \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_0^{(\alpha,\sigma)} &= a_0^{(\alpha,\sigma)} \quad \text{при } j = 0; \\ c_s^{(\alpha,\sigma)} &= \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } 1 \leq s \leq j - 1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } s = j, \end{cases} \quad \text{при } j > 0. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что $c_s^{(\alpha,\sigma)} > (1 - \alpha)(s + \sigma)^{-\alpha}/2 > 0$.

Априорную оценку найдём методом энергетических неравенств, для этого введём скалярные произведения и норму следующим образом:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u\|_0^2.$$

Умножив равенство (3.2) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) &= (\kappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедлива следующая

Лемма 3 [21]. Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

Преобразуем суммы, входящие в равенство (3.5), с учётом условий (3.2) и леммы 3:

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) \geq \frac{1}{2} (1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2)); \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} (\kappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) &= \kappa ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}|_0^N - (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\kappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] = -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - (a\kappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] \leq \\ &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - \frac{1}{(1+hM_1)} (a\kappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})|_0^N - (\gamma, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})] \leq \\ &\leq -(\gamma_i/2, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2] \leq -\frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} - (d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) &= -(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) (d, y^{(\sigma)}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)^2 + \frac{1}{2} (d, y^{(\sigma)})^2 \leq M_1 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2); \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(\varphi, y^{(\sigma)}) \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \quad (3.10)$$

В силу соотношений (3.6)–(3.10) из равенства (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2) \right) + \frac{1}{(1+hM_1)} (a\kappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + M_1 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выбирая $\varepsilon = 1/2$, из (3.11) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + c_0 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_2 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + M_2 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + M_3 \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразуем первое, второе и третье слагаемые в правой части неравенства (3.12):

$$-(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) \leq M_4 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \quad (3.13)$$

Учитывая (3.13), из (3.12) получаем оценку

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_5 \|y^{(\sigma)}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 \|\varphi\|_0^2, \quad (3.14)$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$, которую запишем в виде

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_7 \|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_8 \|y^j\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9 \|\varphi\|_0^2. \quad (3.15)$$

Справедлива

Лемма 4. Пусть $\{p_j\}$ – последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$p_0 = 1, \quad \bar{\sigma}^{1-\alpha} p_j = \sum_{s=1}^j (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) p_{j-s}, \quad j \geq 1,$$

где $\bar{\sigma}^{1-\alpha} = \sigma^{1-\alpha}$, если $j = 0$, и

$$\bar{\sigma}^{1-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha} ((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}) - \frac{1}{2} ((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}), \quad \text{если } j \geq 1.$$

Тогда

$$0 < p_j < 1, \quad \sum_{s=k}^j p_{j-s} c_{s-k}^{(\alpha,\sigma)} = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leq k \leq j, \quad (3.16)$$

$$\sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \sum_{s=0}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = p_0 c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}. \quad (3.17)$$

Доказательство. Следуя [28], докажем равенство (3.16). Тогда, учитывая, что $c_s^{(\alpha,\sigma)} < c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)}$ для $s \geq 1$, получаем

$$\sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)},$$

где

$$I_j = \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{s=0}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{s=1}^{j+1} p_{j+1-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = I_{j+1}, \quad j \geq 1. \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что

$$I_1 = \sum_{s=1}^1 p_{1-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} = p_0 c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad p_0 = 1. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.17) и (3.19), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} &= \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^j p_{j-s} (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) < \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \\ \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} &< \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} + p_j c_0, \quad p_j c_0 > 0, \quad c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из равенства в (3.18) вытекает, что

$$c_0 p_j = \sum_{s=1}^j (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) p_{j-s}.$$

Поэтому в силу (3.19), (3.20) верны неравенства $0 < p_j c_0 < \bar{\sigma}^{1-\alpha}$, $0 < p_j < 1$. Пусть $s = l + k - 1$, тогда с учётом равенства (3.19) получаем

$$\sum_{s=k}^j p_{j-s} c_{s-k}^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{l=1}^{j-k+1} p_{j-k+1-l} c_{l-1}^{(\alpha,\sigma)} = I_{j-k+1} = I_1 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leq k \leq j.$$

Лемма доказана.

Справедливы следующие три леммы.

Лемма 5. Пусть выполнено неравенство (3.16), тогда для $k = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} \sum_{s=1}^j p_{j-s} s^{(k-1)\alpha} \leq \frac{\bar{\sigma}^{1-\alpha} j^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}. \quad (3.21)$$

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 3.2 из [28].

Лемма 6. Пусть $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^j$, $j \times j$ -матрица J задана равенством

$$J = 2\bar{\sigma}^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha) \lambda \tau^\alpha \begin{bmatrix} 0 & p_1 & \dots & p_{j-2} & p_{j-1} \\ 0 & 0 & \dots & p_{j-3} & p_{j-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и выполнена оценка (3.21). Тогда $J^i = 0$, $i \geq j$, и

$$J^k \vec{e} \leq \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha)} ((2\lambda t_j^\alpha)^k, (2\lambda t_{j-1}^\alpha)^k, \dots, (2\lambda t_1^\alpha)^k)^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{s=0}^i J^s \vec{e} = \sum_{s=0}^{j-1} J^s \vec{e} \leq (E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), E_\alpha(2\lambda t_{j-1}^\alpha), \dots, E_\alpha(2\lambda t_1^\alpha))^T, \quad i \geq j.$$

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 3.3 в [28] с помощью метода математической индукции и неравенства (3.21). Знак неравенства между векторами понимается поэлементно, т.е. между всеми элементами соответствующих векторов с одноимёнными координатами.

Лемма 7. Пусть последовательности $\{y^j\}$, $\{\varphi^j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяют неравенству $\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j$, $j \geq 1$, где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ – константы. Тогда существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедливы оценки

$$y^{j+1} \leq 2 \left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \varphi^{j'} \right) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k / \Gamma(1+k\alpha)$ – функция Миттаг-Лёффлера, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 / (2 + 2^{1-\alpha})$.

Лемма 7 доказывается на основании лемм 4–6 аналогично лемме 3.1 из [28].

Вследствие леммы 7 и оценки (3.15) получаем

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right), \quad (3.22)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ , а $\tau \leq \tau_0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.4). Тогда существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ для решения разностной задачи (3.1)–(3.3) справедлива априорная оценка (3.22), а значит, имеют место единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), а $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (3.1)–(3.3). Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Для оценки точности разностной схемы (3.1)–(3.3) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.1)–(3.3), получаем для функции z следующую задачу:

$$\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha z = \kappa_i^j (a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_i z_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)},$$

$$-d_i^j (z_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (3.23)$$

$$z_0^{(\sigma)} = z_N^{(\sigma)} = 0, \quad (3.24)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad (3.25)$$

где $\Psi = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) разностной схемой (3.1)–(3.3) решения задачи (1.1)–(1.3).

Применяя априорную оценку (3.22) к решению задачи (3.23)–(3.25), получаем, что

$$\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \|\Psi^{j'}\|_0^2, \quad (3.26)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (3.26) вытекает сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.3) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2$ на каждом слое: существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)} \leq M(h^2 + \tau^2).$$

4. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме. Рассмотрим для уравнения (1.1) третью краевую задачу:

$$\Pi(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \quad -\Pi(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \quad (4.1)$$

где $\Pi(x, t) \equiv k(x, t)u_x + \partial_{0t}^\alpha(\eta u_x)$, а функции β_1 , β_2 и μ_1 , μ_2 удовлетворяют условиям

$$|\beta_1|, |\beta_2| \leq c_2, \quad \mu_1(t), \mu_2(t) - \text{непрерывные функции}. \quad (4.2)$$

Умножив уравнение (1.1) скалярно на u , получим равенство (2.2), из которого в силу соотношений (2.4)–(2.9) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + c_0 \|u_x\|_0^2 \leq u \Pi(x, t)|_0^l + M_1(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + M_2 \|f\|_0^2. \quad (4.3)$$

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства:

$$\begin{aligned} u \Pi(x, t)|_0^l &= \Pi(l, t)u(l, t) - \Pi(0, t)u(0, t) = u(l, t)(\mu_2(t) - \beta_2(t)u(l, t)) + \\ &+ u(0, t)(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0, t)) = -\beta_2(t)u^2(l, t) + \mu_2(t)u(l, t) - \beta_1(t)u^2(0, t) + \mu_1(t)u(0, t) \leq \\ &\leq M_3(u^2(0, t) + u^2(l, t)) + \frac{1}{2}(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) \leq M_4(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + \frac{1}{2}(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда из (4.3) и (4.4) следует оценка

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_5 \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)), \quad (4.6)$$

применяя к обеим частям которой оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ и повторяя те же рассуждения, что и для неравенств (2.11)–(2.13), находим априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_6(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (4.5)$$

Теорема 3. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.4), (4.2), то для решения задачи (1.1), (4.1), (1.3) справедлива априорная оценка (4.5).

Из оценки (4.5) следуют единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы. На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (4.1), (1.3) поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ :

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \varkappa_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.1)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_1 y_{\bar{x},0}) = \beta_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + d_0^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) - \tilde{\mu}_1, \quad x = 0, \quad (5.2)$$

$$-(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N y_{\bar{x},N})) = \beta_2 y_N^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + d_N^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) - \tilde{\mu}_2, \quad x = l, \quad (5.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5.4)$$

где $\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0$, $\tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N$.

Запишем схему (5.1)–(5.4) в операторном виде

$$\begin{cases} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}(t)y + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \varkappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x + b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), & i = \overline{1, N-1}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = (\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_1 y_0^{(\sigma)} - 0.5h d_0^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) / (0.5h), & i = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = (-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_2 y_N^{(\sigma)} - 0.5h d_N^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) / (0.5h), & i = N, \end{cases}$$

$$\bar{\delta}y = \begin{cases} \delta y_i = (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, & i = \overline{1, N-1}, \\ \delta^- y_0 = 2(\gamma_1 y_{x,0})_t / h, & i = 0, \\ \delta^+ y_N = -2(\gamma_N y_{\bar{x},N}) / h, & i = N, \end{cases} \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ \varphi^- = 2\tilde{\mu}_1 / h, & i = 0, \\ \varphi^+ = 2\tilde{\mu}_2 / h, & i = N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varkappa = (1 + 0.5h|r|/k)^{-1}, \\ \varkappa_0 = (1 + 0.5h|r_0|/k_{0.5})^{-1}, & r_0 \leq 0, \\ \varkappa_N = (1 + 0.5h|r_N|/k_{N-0.5})^{-1}, & r_N \geq 0, \end{cases}$$

$$r_0 = r(0, t_{j+\sigma}) = r_0^{j+\sigma} \leq 0, \quad r_N = r(x_N, t_{j+\sigma}) = r_N^{j+\sigma} \geq 0.$$

Введём скалярное произведение и норму следующим образом:

$$[u, v] = \sum_{i=0}^N u_i v_i \bar{h}, \quad \text{где } \bar{h} = 0.5h, \text{ если } i = 0, N, \text{ и } \bar{h} = h, \text{ если } i \neq 0, N;$$

$$[u, u] = [1, u^2] = \|u\|_0^2.$$

Умножив первое равенство в (5.5) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}] = [\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] + [\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)}] + [\bar{\Phi}, y^{(\sigma)}]. \quad (5.6)$$

Оценим и преобразуем суммы, входящие в это равенство:

$$[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}] \geq \frac{1}{2} [1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2)], \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] &= (\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^-y_0^{(\sigma)} + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+y_N^{(\sigma)} = (\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + \\
&+ (b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + \varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \\
&- 0.5hd_0(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)y_0^{(\sigma)} - \varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)} - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 - 0.5hd_N(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)y_N^{(\sigma)} = \\
&= -(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] + (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) - [d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}] - \\
&- \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Оценивая сумму первых трёх слагаемых в правой части равенства (5.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
&-(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] + (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) = -(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] - (a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + \\
&+ (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) \leq -\left(\frac{\varkappa a}{1+hM_1}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] + M_1(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2), \tag{5.9} \\
&- [d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}] - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 \leq \frac{1}{2}(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)^2 + \frac{1}{2}[d, y^{(\sigma)}]^2 - \\
&- \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 \leq M_2(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

В силу оценок (5.9) и (5.10) из (5.8) следует, что

$$[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] \leq -M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \tag{5.11}$$

Для двух последних слагаемых в (5.6) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)}] &= (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta y, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^-y_0 + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^+y_N = \\
&= -(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})) \leq -(\gamma/2, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2) \leq -c_0\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2/2, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\Phi}, y^{(\sigma)}] &= (\varphi, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\varphi^- + 0.5hy_N^{(\sigma)}\varphi^+ = [\varphi, y^{(\sigma)}] + \mu_1y_0^{(\sigma)} + \mu_2y_N^{(\sigma)} \leq \\
&\leq M_5(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + M_6(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая в равенстве (5.6) неравенства (5.7), (5.11)–(5.13), получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_7\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_8\|y^{(\sigma)}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2), \tag{5.14}$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$.

Повторяя те же рассуждения, что и для неравенств (3.14)–(3.22), из (5.14) на основании леммы 7 находим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M\left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} (\|[\varphi^{j'}]\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2)\right), \tag{5.15}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4) и (4.2). Тогда существует такое τ , что при $\tau \leq \tau_0$ для решения разностной задачи (5.1)–(5.4) справедлива априорная оценка (5.15), а значит, имеют место единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1), (4.1), (1.3), а $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1)–(5.4). Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Для оценки точности разностной схемы (5.1)–(5.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5.1)–(5.4), получаем для функции z следующую задачу:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z = \varkappa_i^j(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i z_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} -$$

$$-d_i^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+) + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.16)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_1 z_{\bar{x},0}) = \beta_1 z_0^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + d_0^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)) - \tilde{\nu}_1, \quad x = 0, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & -(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N z_{\bar{x},N})) = \\ & = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N + d_N^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)) - \tilde{\nu}_2, \quad x = l, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad (5.19)$$

где $\Psi = O(h^2 + \tau^2)$, $\tilde{\nu}_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\tilde{\nu}_2 = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.3) разностной схемой (5.1)–(5.4) решения задачи (1.1), (4.1), (1.3).

Применяя априорную оценку (5.15) к решению задачи (5.16)–(5.19), получаем, что

$$\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^{j'^2} + \nu_2^{j'^2}), \quad (5.20)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (5.20) вытекает сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2$ на каждом слое: существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)} \leq M(h^2 + \tau^2).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{s=1}^p q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t),$$

где x_s , $s = \overline{1, p}$, – некоторые фиксированные точки интервала $(0, l)$, если потребовать выполнения условия $|q_s| \leq c_2$, $s = \overline{1, p}$.

6. Алгоритм численного решения. Для численного решения рассматриваемых в данной работе краевых задач для дифференциального уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова–Капуто порядка α приведём разностную схему (5.1)–(5.4) к расчётному виду. Для этого воспользуемся методом параметрической прогонки [29]. Тогда уравнение (5.1) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2 \tau \sigma d_i^j (y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^+) = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (6.1)$$

Прежде чем привести формулы для коэффициентов A_i , B_i , C_i и свободного члена F_i в уравнении (5.1), введём для упрощения записи обозначения $\delta = \tau^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$ и $\Delta = c_0^{(\alpha, \sigma)} \delta$. Тогда

$$A_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \Delta - \tau h \sigma b_i^{-j} a_i, \quad B_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \Delta + \tau h \sigma b_i^{+j} a_{i+1}, \quad C_i = A_i + B_i + h^2 \Delta,$$

$$\begin{aligned} F_i = & AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2 \tau \varphi_i^j - \tau (1 - \sigma) h^2 d_i^j (y_{i_0}^j x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^j x_{i_0}^+) + \\ & + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} [(\gamma_{i+1} y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1} y_{i+1})^s - h^2 (y_i^{s+1} - y_i^s)] + \\ & + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} [(\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s - ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^{s+1} + ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^s], \end{aligned}$$

где $AA_i = -A_i + \tau (\varkappa_i^j a_i^j - h b_i^{-j} a_i)$, $BB_i = -B_i + \tau (\varkappa_i^j a_{i+1}^j + h b_i^{+j} a_{i+1})$, $CC_i = AA_i + BB_i - h^2 \Delta$.

Запишем, какой вид примут краевые условия (5.2) и (5.3). Для упрощения записи введём обозначения

$$\Upsilon_0 = (\tau\sigma\kappa_0 a_1^j + (\gamma_1^{j+1} + 0.5h^2)\Delta + \sigma h\tau\beta_1^j)^{-1} \quad \text{и} \quad \Upsilon_N = (\tau\sigma\kappa_N a_N^j + (\gamma_N^{j+1} + 0.5h^2)\Delta + \sigma h\tau\beta_2^j)^{-1}.$$

Краевое условие (5.2) принимает вид

$$y_0 = \kappa_{11}y_1 + \kappa_{12}y_{i_0} + \kappa_{13}y_{i_0+1} + \mu_1, \quad (6.2)$$

где

$$\kappa_{11} = (\tau\sigma\kappa_0 a_1 + \gamma_1\Delta)\Upsilon_0, \quad \kappa_{12} = -0.5d_0\sigma h\tau(x_{i_0+1} - x_0)\Upsilon_0, \quad \kappa_{13} = -0.5d_0\sigma h\tau(x_0 - x_{i_0})\Upsilon_0,$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \Upsilon_0 \bigg\{ & \tilde{\mu}_1 h\tau - (1 - \sigma)h\tau\beta_1 y_0^j + \tau(1 - \sigma)\kappa_0 a_1(y_1^j - y_0^j) - \gamma_1\Delta(y_1^j - y_0^j) + 0.5h^2\Delta y_0 - \\ & - 0.5h^2\delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_0^{s+1} - y_0^s) + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}[(\gamma_1 y_1)^{s+1} - (\gamma_1 y_1)^s - (\gamma_1 y_0)^{s+1} + (\gamma_1 y_0)^s] - \\ & - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^- y_{i_0} - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^+ y_{i_0+1} \bigg\}. \end{aligned}$$

Краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N = \kappa_{21}y_{N-1} + \kappa_{22}y_{i_0} + \kappa_{23}y_{i_0+1} + \mu_2, \quad (6.3)$$

где

$$\kappa_{21} = (\tau\sigma\kappa_N a_N + \gamma_N\Delta)\Upsilon_N, \quad \kappa_{22} = -0.5d_N\sigma h\tau(x_{i_0+1} - x_0)\Upsilon_N, \quad \kappa_{23} = -0.5d_N\sigma h\tau(x_0 - x_{i_0+1})\Upsilon_N,$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = \Upsilon_N \bigg\{ & \tilde{\mu}_2 h\tau - (1 - \sigma)h\tau\beta_2 y_N^j - \tau(1 - \sigma)\kappa_N a_N(y_N^j - y_{N-1}^j) + \gamma_N\Delta(y_N^j - y_{N-1}^j) + 0.5h^2\Delta y_N - \\ & - 0.5h^2\delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1} - y_N^s) - \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}[(\gamma_N y_N)^{s+1} - (\gamma_N y_N)^s - (\gamma_N y_{N-1})^{s+1} + (\gamma_N y_{N-1})^s] - \\ & - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_N x_{i_0}^- y_{i_0} - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^+ y_{i_0+1} \bigg\}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учётом (6.1)–(6.3) разностная схема (5.1)–(5.4) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2 \tau \sigma d_i (y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^+) = -F_i,$$

$$y_0 = \kappa_{11}y_1 + \kappa_{12}y_{i_0} + \kappa_{13}y_{i_0+1} + \mu_1,$$

$$y_N = \kappa_{21}y_{N-1} + \kappa_{22}y_{i_0} + \kappa_{23}y_{i_0+1} + \mu_2,$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (6.4)$$

Решение системы (6.4) ищем в виде

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}y_{i_0} + \gamma_{i+1}y_{i_0+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (6.5)$$

Найдём величины α_i , β_i , γ_i , δ_i , $i = \overline{1, N}$. Из условия (6.2) следует, что

$$\alpha_1 = \kappa_{11}, \quad \beta_1 = \kappa_{12}, \quad \gamma_1 = \kappa_{13}, \quad \delta_1 = \mu_1.$$

Подставляя выражения

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}y_{i0} + \gamma_{i+1}y_{i0+1} + \delta_{i+1}, \\ y_{i-1} &= \alpha_i y_i + \beta_i y_{i0} + \gamma_i y_{i0+1} + \delta_i \end{aligned}$$

в уравнение (6.1), находим, что

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i B_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i0}^-}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{A_i \gamma_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i0}^+}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \delta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \delta_i}{C_i - A_i \alpha_i}.$$

Выразим неизвестные y_i , $i = \overline{0, N}$, через y_{i0} , y_{i0+1} следующим образом:

$$y_i = H_i y_{i0} + T_i y_{i0+1} + \Phi_i. \quad (6.6)$$

В представлении (6.6) найдём H_N , T_N и Φ_N . Учитывая условие (6.3), а также равенства $y_N = H_N y_{i0} + T_N y_{i0+1} + \Phi_N$ и $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N y_{i0} + \gamma_N y_{i0+1} + \delta_N$, получаем

$$H_N = \frac{\varkappa_{21} \beta_N + \varkappa_{22}}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}, \quad T_N = \frac{\varkappa_{21} \gamma_N + \varkappa_{23}}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}, \quad \Phi_N = \frac{\varkappa_{21} \delta_N + \mu_2}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}.$$

Найдём теперь H_i , T_i и Φ_i . Подставляя выражение (6.6) в (6.5), будем иметь

$$H_i = \alpha_{i+1} H_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad \Phi_i = \alpha_{i+1} \Phi_{i+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0}.$$

Выразим y_{i0} , y_{i0+1} через H_i , T_i , Φ_i . Для этого рассмотрим выражения

$$y_{i0} = H_{i0} y_{i0} + T_{i0} y_{i0+1} + \Phi_{i0} \quad \text{и} \quad y_{i0+1} = H_{i0+1} y_{i0} + T_{i0+1} y_{i0+1} + \Phi_{i0+1},$$

учитывая которые, получаем

$$y_{i0+1} = \frac{H_{i0+1} \Phi_{i0} + \Phi_{i0+1} (1 - H_{i0})}{(1 - H_{i0})(1 - T_{i0+1}) - T_{i0} H_{i0+1}}, \quad y_{i0} = \frac{T_{i0}}{1 - H_{i0}} y_{i0+1} + \frac{\Phi_{i0}}{1 - H_{i0}}.$$

Подставляя эти выражения для y_{i0+1} и y_{i0} в представление (6.6), находим решение y_i системы (6.4).

В случае, когда рассматривается первая краевая задача, необходимо в (6.2), (6.3) учесть, что

$$\varkappa_{k1} = 0, \quad \varkappa_{k2} = 0, \quad \varkappa_{k3} = 0, \quad \mu_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

7. Результаты численного эксперимента. Для задачи (1.1), (4.1), (1.3) рассмотрим тестовый пример, в котором

$$\begin{aligned} k(x, t) &= e^{x+t}, \quad \eta(x) = e^x, \quad r(x, t) = (x - 0.5) \cos(x + t), \quad q(x, t) = \cos(x - t), \\ f(x, t) &= e^x \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2t^3 e^{2x+t} - 2e^{2x} \left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \right) - t^3 e^x (x - 0.5) \cos(x + t) + t^3 e^{x_0} \cos(x - t), \\ \beta_1 &= 0.5e^t, \quad \beta_2 = e^{l+t}, \quad \mu_1 = -\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - 0.5t^3 e^t, \\ \mu_2 &= 2t^3 e^{2l+t} + e^{2l} \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + e^{2l} \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}, \quad u_0(x) = 0, \quad l = 1, \quad T = 1. \end{aligned}$$

Точное решение задачи, как несложно убедиться, $u(x, t) = t^3 e^x$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$; $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда

$h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком $O(h^2 + \tau^2)$ аппроксимации.

Таблица. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при значениях $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$; $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

x_0	α	h	$\max_{0 \leq j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ [\cdot]\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.1	0.01	1/10	2.8622E-3		3.8970E-3	
		1/20	7.1728E-4	1.9965	9.8010E-4	1.9914
		1/40	1.7943E-4	1.9991	2.4533E-4	1.9982
		1/80	4.4863E-5	1.9998	6.1359E-5	1.9994
		1/160	1.1216E-5	2.0000	1.5340E-5	1.9999
	0.50	1/10	2.8449E-3		3.8733E-3	
		1/20	7.1296E-4	1.9965	9.7431E-4	1.9911
		1/40	1.7834E-4	1.9991	2.4385E-4	1.9984
		1/80	4.4593E-5	1.9998	6.0993E-5	1.9993
		1/160	1.1148E-5	2.0000	1.5248E-5	2.0000
	0.99	1/10	2.8602E-3		3.8943E-3	
		1/20	7.1678E-4	1.9965	9.7943E-4	1.9913
		1/40	1.7930E-4	1.9991	2.4516E-4	1.9982
		1/80	4.4832E-5	1.9998	6.1316E-5	1.9994
		1/160	1.1208E-5	2.0000	1.5330E-5	2.0000
0.5	0.01	1/10	2.9887E-3		4.0537E-3	
		1/20	7.4905E-4	1.9964	1.0236E-3	1.9855
		1/40	1.8713E-4	2.0010	2.5573E-4	2.0010
		1/80	4.6724E-5	2.0018	6.3852E-5	2.0018
		1/160	1.1667E-5	2.0016	1.5945E-5	2.0016
	0.50	1/10	2.9761E-3		4.0376E-3	
		1/20	7.4592E-4	1.9963	1.0194E-3	1.9857
		1/40	1.8635E-4	2.0010	2.5468E-4	2.0010
		1/80	4.6531E-5	2.0018	6.3592E-5	2.0018
		1/160	1.1619E-5	2.0016	1.5881E-5	2.0016
	0.99	1/10	2.9885E-3		4.0534E-3	
		1/20	7.4901E-4	1.9963	1.0236E-3	1.9855
		1/40	1.8713E-4	2.0010	2.5572E-4	2.0010
		1/80	4.6724E-5	2.0018	6.3852E-5	2.0018
		1/160	1.1668E-5	2.0016	1.5945E-5	2.0016
0.9	0.01	1/10	3.0540E-3		4.1615E-3	
		1/20	7.6739E-4	1.9926	1.0485E-3	1.9888
		1/40	1.9205E-4	1.9985	2.6269E-4	1.9969
		1/80	4.8017E-5	1.9999	6.5681E-5	1.9998
		1/160	1.2002E-5	2.0003	1.6419E-5	2.0001
	0.50	1/10	3.0458E-3		4.1510E-3	
		1/20	7.6535E-4	1.9926	1.0457E-3	1.9889
		1/40	1.9154E-4	1.9984	2.6201E-4	1.9968
		1/80	4.7890E-5	1.9999	6.5511E-5	1.9998
		1/160	1.1970E-5	2.0003	1.6377E-5	2.0001
	0.99	1/10	3.0546E-3		4.1623E-3	
		1/20	7.6755E-4	1.9926	1.0487E-3	1.9888
		1/40	1.9209E-4	1.9984	2.6274E-4	1.9969
		1/80	4.8027E-5	1.9999	6.5694E-5	1.9998
		1/160	1.2004E-5	2.0003	1.6422E-5	2.0001

Порядок сходимости определяется по формуле

$$\text{ПС} = \log_{h_1/h_2} \left(\frac{\|z_1\|_0}{\|z_2\|_0} \right),$$

где z_i – это погрешность, соответствующая h_i .

Заключение. В настоящей работе изучены краевые задачи для одномерного по пространству нагруженного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной производной Герасимова–Капуто, а также разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Рассмотрены граничные условия локальные (первого и третьего рода). Для решения краевых задач в дифференциальной и разностной трактовках получены априорные оценки, из которых следуют единственность решения и его устойчивость по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$, где h и τ – шаги по пространственной и временной переменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
2. *Будак В.М., Искендеров А.Д.* Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 1. 20–23.
3. *Казиев В.М.* Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 173–175.
4. *Krall A.M.* The development of general differential and general differential boundary systems // Rock. Moun. J. Math. 1975. V. 5. № 4. С. 493–542.
5. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 25. Вып. 5. С. 852–864.
6. *Дзекиер Е.С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
7. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
8. *Ting T.W.* A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. 1974. Т. 45. № 9.
9. *Hallaire M.* Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L'Eau et la Production Vegetale / Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. V. 9. P. 27–62.
10. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.
11. *Канчукоев В.З.* Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного гипербола-псевдопараболического типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1984.
12. *Бештоков М.Х.* The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 158. № 1. P. 12–19.
13. *Бештоков М.Х.* Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041.
14. *Канчукоев В.З.* Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гипербола-псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассообмена в почвогрунтах // САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983.
15. *Кочина И.И.* Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 51–54.
16. *Нахушев А.М., Борисов В.Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 105–110.
17. *Беданокоева С.Ю.* Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестн. Адыгейск. гос. ун-та. Сер. 4. Естеств.-мат. и техн. науки. 2007. № 4. С. 68–71.
18. *Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткий И.А., Юрков Ю.И.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. М., 2002.
19. *Тауженова Ф.И., Штануков-Лафшиев М.Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 10. С. 1871–1881.
20. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658–664.

21. *Alikhanov A.A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Comput. Phys. 2015. V. 280. P. 424–438.
22. *Бештоков М.Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778.
23. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 919–928.
24. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной Капуто и оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 353–365.
25. *Caputo H.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, Geophys // J. Royal Astronom. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.
26. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12. С. 251–260.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1983.
28. *Li D., Liao H.L., Sun W., Wang J., Zhang J.* Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // Commun. Comput. Phys. 2018. V. 24. P. 86–103.
29. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск, 1981.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 29.04.2019 г.
После доработки 16.12.2020 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.