ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1698–1704

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.972.7+517.972.5

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ 2D СИСТЕМ

© 2021 г. Г. А. Курина

Установлены условия разрешимости обратной задачи оптимизации для одного класса дискретных 2D-систем. Получено в явном виде выражение для функционала, для которого данная система из рассматриваемого класса доставляет необходимое условие экстремума. Приведены иллюстрирующие примеры.

DOI: 10.31857/S0374064121120116

Введение. Обратная задача вариационного исчисления состоит в нахождении функционала, для которого данное уравнение представляет собой необходимое условие экстремума этого функционала. Решение различных задач такого типа изложено, например, в [1–3]. Сформулированная задача для системы дискретных уравнений рассматривалась в [4]. Разрешимость обратной задачи для некоторого уравнения позволяет использовать для его решения вариационные методы.

В последние десятилетия активно изучаются дискретные 2D-системы. Так, например, для таких систем в [5] исследовалась линейно-квадратичная задача оптимального управления, а в [6] – стохастическая устойчивость.

В настоящей работе рассматривается дискретная 2D-система вида

$$\varphi_{ij}(z_{(i-1)j}, z_{i(j-1)}, z_{ij}, z_{(i+1)j}, z_{i(j+1)}, z_{(i-1)(j+1)}, z_{(i+1)(j-1)}) \equiv$$
$$\equiv A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) +$$
$$+ C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

где функции A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} заданы и непрерывно дифференцируемы, а значения

$$z_{i0}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad z_{0j}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad z_{in}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad z_{mj}, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

известны.

Системы вида (1) возникают при дискретизации задачи на экстремум двойного интеграла по прямоугольнику такого, что его подынтегральная функция зависит только от переменных интегрирования, искомой функции и её частных производных первого порядка, при этом значения искомой функции на границе области интегрирования заданы.

1. Условия разрешимости обратной задачи оптимизации.

Теорема. *Необходимое условие экстремума для функционала*

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}), \tag{3}$$

где натуральные числа m *и* n *фиксированы, дважды непрерывно дифференцируемые функции* V_{ij} *заданы, а значения (2) и* z_{00} *известны, записывается в виде системы (1) с функциями*

$$A_{ij} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_{ij}}, \quad B_{ij} = \frac{\partial V_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}}, \quad C_{ij} = \frac{\partial V_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}}; \tag{4}$$

при этом выполняются условия

$$\frac{\partial A_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}, \quad i=\overline{1,m-1}, \quad j=\overline{2,n-1},$$

$$\frac{\partial A_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}, \quad i=\overline{2,m-1}, \quad j=\overline{1,n-1},$$

$$\frac{\partial B_{(i+1)(j-1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{(i+1)(j-1)}}, \quad i=\overline{1,m-2}, \quad j=\overline{2,n-1}. \tag{5}$$

Обратно, если для системы (1) выполняются условия (5), то эта система доставляет необходимое условие экстремума для функционала вида (3), где в качестве $V_{00}(z_{10},z_{00},z_{01})$ *может быть взята любая постоянная, а*

$$V_{i0} = \int\limits_0^{z_{i1}} C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1})\,dz_{i1}, \quad i=\overline{1,m-1},$$

$$V_{0j} = \int\limits_0^{z_{1j}} B_{1j}(z_{1j}, z_{0j}, z_{0(j+1)})\,dz_{1j}, \quad j=\overline{1,n-1},$$

$$V_{ij} = \int\limits_0^{z_{ij}} A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)})\,dz_{ij} + \int\limits_0^{z_{(i+1)j}} B_{(i+1)j}(z_{(i+1)j},0,0)\,dz_{(i+1)j} +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{i(j+1)}} C_{i(j+1)}(z_{(i+1)j}, 0, z_{i(j+1)})\,dz_{i(j+1)}, \quad i=\overline{1,m-2}, \quad j=\overline{1,n-2},$$

$$V_{i(n-1)} = \int\limits_0^{z_{i(n-1)}} A_{i(n-1)}(z_{(i+1)(n-1)}, z_{i(n-1)}, z_{in})\,dz_{i(n-1)} +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(i+1)(n-1)}} B_{(i+1)(n-1)}(z_{(i+1)(n-1)}, 0, z_{in})\,dz_{(i+1)(n-1)}, \quad i=\overline{1,m-2},$$

$$V_{(m-1)j} = \int\limits_0^{z_{(m-1)j}} A_{(m-1)j}(z_{mj}, z_{(m-1)j}, z_{(m-1)(j+1)})\,dz_{(m-1)j} +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(m-1)(j+1)}} C_{(m-1)(j+1)}(z_{mj}, 0, z_{(m-1)(j+1)})\,dz_{(m-1)(j+1)}, \quad j=\overline{1,n-2},$$

$$V_{(m-1)(n-1)} = \int\limits_0^{z_{(m-1)(n-1)}} A_{(m-1)(n-1)}(z_{m(n-1)}, z_{(m-1)(n-1)}, z_{(m-1)n})\,dz_{(m-1)(n-1)}. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Запишем необходимое условие экстремума для функционала (3), зависящего от переменных z_{ij}:

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = 0, \quad i=\overline{1,m-1}, \quad j=\overline{1,n-1}.$$

Из вида функционала (3) следует равенство

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial (V_{ij} + V_{(i-1)j} + V_{i(j-1)})}{\partial z_{ij}}. \tag{7}$$

Вводя обозначения (4), получаем необходимое условие экстремума функционала (3) в виде системы (1).

Дифференцируя в (4) равенство для $A_{i(j-1)}$ по z_{ij}, а равенство для C_{ij} по $z_{i(j-1)}$, в силу равенства смешанных частных производных второго порядка получаем первое из условий (5). Аналогичным образом устанавливаются второе и третье условия в (5).

Достаточность. Пусть задана система (1), для которой выполняются условия (5). Покажем, что этих условий достаточно для построения функционала вида (3), для которого необходимое условие экстремума представляет собой систему вида (1). Тем самым будет установлена разрешимость обратной задачи оптимизации для такой дискретной 2D-системы (1).

Используя выражения (6), запишем функционал J вида (3) и найдём его частные производные.

Сначала рассмотрим случай $i = \overline{2, m-2}$, $j = 1$. Используя представления (7), (6) и независимость от z_{i1} второго и третьего слагаемых в выражении для V_{i1}, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial (V_{i1} + V_{(i-1)1} + V_{i0})}{\partial z_{i1}} = A_{i1}(z_{(i+1)1}, z_{i1}, z_{i2}) +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(i-1)1}} \frac{\partial}{\partial z_{i1}} A_{(i-1)1}(z_{i1}, z_{(i-1)1}, z_{(i-1)2})\, dz_{(i-1)1} + B_{i1}(z_{i1}, 0, 0) +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(i-1)2}} \frac{\partial}{\partial z_{i1}} C_{(i-1)2}(z_{i1}, 0, z_{(i-1)2})\, dz_{(i-1)2} + C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1}).$$

Для производных воспользуемся следующими равенствами из (5):

$$\frac{\partial A_{(i-1)1}}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial B_{i1}}{\partial z_{(i-1)1}}, \quad \frac{\partial C_{(i-1)2}}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial B_{i1}}{\partial z_{(i-1)2}}.$$

Применяя затем формулу Ньютона–Лейбница, находим, что

$$\frac{\partial J}{\partial z_{i1}} = A_{i1}(z_{(i+1)1}, z_{i1}, z_{i2}) + B_{i1}(z_{i1}, z_{(i-1)1}, z_{(i-1)2}) + C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1}).$$

Пусть теперь $i = \overline{2, m-2}$, $j = \overline{2, n-2}$. Учитывая представления (7), (6) и независимость от z_{ij} второго и третьего слагаемых в выражении для V_{ij}, а также второго слагаемого в выражении для $V_{i(j-1)}$, имеем

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + \int\limits_0^{z_{(i-1)j}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} A_{(i-1)j}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)})\, dz_{(i-1)j} + B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(i-1)(j+1)}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} C_{(i-1)(j+1)}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)})\, dz_{(i-1)(j+1)} +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{i(j-1)}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} A_{i(j-1)}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij})\, dz_{i(j-1)} + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}).$$

Для производных по z_{ij} функций $A_{(i-1)j}$, $C_{(i-1)(j+1)}$, $A_{i(j-1)}$ используем равенства из (5):

$$\frac{\partial A_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}, \quad \frac{\partial C_{(i-1)(j+1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)(j+1)}}, \quad \frac{\partial A_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}.$$

Применяя затем формулу Ньютона–Лейбница, получаем последовательно равенства

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + \int\limits_0^{z_{(i-1)j}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)})\, dz_{(i-1)j} + B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{(i-1)(j+1)}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)(j+1)}}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)})\, dz_{(i-1)(j+1)} +$$

$$+ \int\limits_0^{z_{i(j-1)}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij})\, dz_{i(j-1)} + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) =$$

$$= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) - B_{ij}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) +$$

$$+ B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) + B_{ij}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) - B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) +$$

$$+ C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) - C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) =$$

$$= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}).$$

Аналогичным образом устанавливаются равенства

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = \varphi_{ij}(z_{(i-1)j}, z_{i(j-1)}, z_{ij}, z_{(i+1)j}, z_{i(j+1)}, z_{(i-1)(j+1)}, z_{(i+1)(j-1)})$$

для остальных значений i и j.

Следовательно, функционал (3) с функциями V_{ij}, определяемыми формулами (6), является решением обратной задачи оптимизации для системы (1). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$z_{10}^2 z_{20} \exp(z_{10}^2 z_{20} z_{11}) + 4 z_{11} z_{21} z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) = 0,$$

$$2 z_{11}^2 z_{21} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) + 6 z_{12} z_{22} z_{13} \exp(z_{12}^2 z_{22} z_{13}) = 0,$$

$$2 z_{11}^2 z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) + 4 z_{20}^2 z_{30} \exp(4 z_{20}^2 z_{30} z_{21}) + 16 z_{21} z_{31} z_{22} \exp(4 z_{21}^2 z_{31} z_{22}) = 0,$$

$$3 z_{12}^2 z_{13} \exp(z_{12}^2 z_{22} z_{13}) + 8 z_{21}^2 z_{31} \exp(4 z_{21}^2 z_{31} z_{22}) + 24 z_{22} z_{32} z_{23} \exp(4 z_{22}^2 z_{32} z_{23}) = 0, \qquad (8)$$

где z_{i0}, $i = 1, 2, 3$, z_{i3}, $i = 1, 2$, z_{3j}, $j = 1, 2$, известны.

Несложно проверить, что последняя система имеет вид (1) при $m = n = 3$ и выполняются условия (5). Действительно, из каждого уравнения этой системы имеем последовательно

$$A_{11} = 4 z_{11} z_{21} z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}), \quad C_{12} = 2 z_{11}^2 z_{21} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}),$$

$$A_{21} = 16 z_{21} z_{31} z_{22} \exp(4 z_{21}^2 z_{31} z_{22}), \quad C_{22} = 8 z_{21}^2 z_{31} \exp(4 z_{21}^2 z_{31} z_{22}).$$

Отсюда видно, что первое условие из (5) выполняется. Аналогичным образом из вида функций A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} следует выполнение второго и третьего условий в (5). Поэтому в силу доказанной теоремы система (8) доставляет необходимое условие экстремума для функционала вида (3).

Используя формулы (6), запишем явное выражение для этого функционала. В частности, поскольку

$$B_{21} = 2 z_{11}^2 z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}),$$

то, учитывая выражения для A_{11} и C_{12}, в силу третьей формулы в (6) получаем

$$V_{11} = 2\exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) - 2.$$

Таким же способом находим остальные слагаемые в выражении (3). Постоянные слагаемые в J не влияют на условия экстремума, поэтому их можно отбросить. В итоге имеем

$$J = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}(j+1)\exp(i^2 z_{ij}^2 z_{(i+1)j} z_{i(j+1)}).$$

Слагаемое при $i = j = 0$, вообще говоря, можно опустить, поскольку оно известно.

2. Интегрирующий множитель. Если в системе (8) разделим второе уравнение на 2, то получим другую запись этого уравнения. Изменённую таким образом в (8) функцию C_{12} обозначим через $\tilde{C}_{12}$. Так как

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial z_{12}} \neq \frac{\partial \tilde{C}_{12}}{\partial z_{11}},$$

то для полученной системы не выполняются условия (5), а значит, обратная задача оптимизации для неё не разрешима.

Обратно, если в качестве исходной 2D-системы взять преобразованную указанным образом систему (8), то для неё, как сказано, обратная задача оптимизации не разрешима, но умножив второе уравнение этой системы на 2, получим систему (8), для которой обратная задача оптимизации уже будет разрешимой.

Ненулевые функции такие, что после умножения на них уравнений системы, для которой обратная задача вариационного исчисления не разрешима, она становится системой, для которой обратная задача вариационного исчисления разрешима, назовём *интегрирующими множителями*. Такое название используется в [2, с. 57] применительно к функции, обеспечивающей существование вариационного интеграла при умножении исследуемого выражения на эту функцию. Как видим из приведённого примера, это понятие оказывается содержательным и для дискретных 2D-систем.

3. Дискретизация. Отметим, что функционал вида (3) возникает при дискретизации двойного интеграла по прямоугольнику с подынтегральной функцией, зависящей от частных производных первого порядка.

Вариационная задача на экстремум функционала

$$J(z(x,y)) = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$$

с заданными значениями функции $z(x,y)$ на границе области D рассматривалась в [7, с. 312–317]. В качества примера в [7] изучается вариационная задача на экстремум для интеграла

$$J(z(x,y)) = \iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy. \tag{9}$$

Применяя необходимое условие экстремума из [7, с. 314], получаем уравнение

$$-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{10}$$

т.е. решение рассматриваемой вариационной задачи должно являться решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Пример 2. Пусть областью D является прямоугольник, одна сторона которого лежит на оси OX, а другая – на оси OY. Разобьём горизонтальную сторону на m равных частей длины

h_x, а вертикальную сторону на n равных частей длины h_y. Проведя через точки деления прямые, параллельные сторонам прямоугольника, получим его разбиение на равные между собой прямоугольники с площадью $h_x h_y$. Для интеграла (9) запишем интегральную сумму, отвечающую взятому разбиению прямоугольника на части, взяв промежуточные значения подынтегральной функции в левом нижнем углу соответствующего меньшего прямоугольника. Все слагаемые в интегральной сумме будут содержать общий множитель $h_x h_y$, который не оказывает влияния на процедуру отыскания экстремума, поэтому опустим его.

Частные производные $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ в подынтегральной функции в точке (i,j) заменим соответственно разностными отношениями

$$\frac{z_{(i+1)j}-z_{ij}}{h_x}, \quad \frac{z_{i(j+1)}-z_{ij}}{h_y}.$$

В результате получим функционал вида (3):

$$J=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\biggl(\biggl(\frac{z_{(i+1)j}-z_{ij}}{h_x}\biggr)^2+\biggl(\frac{z_{i(j+1)}-z_{ij}}{h_y}\biggr)^2\biggr), \tag{11}$$

где z_{i0}, $i=\overline{0,m-1}$, z_{0j}, $j=\overline{1,n-1}$, z_{in}, $i=\overline{0,m-1}$, z_{mj}, $j=\overline{0,n-1}$, известны, поскольку функция $z(x,y)$ задана на границе области интегрирования.

Учитывая равенство (7), запишем необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}}=-2\biggl(\frac{z_{(i+1)j}-2z_{ij}+z_{(i-1)j}}{h_x^2}+\frac{z_{i(j+1)}-2z_{ij}+z_{i(j-1)}}{h_y^2}\biggr)=0, \quad i=\overline{1,m-1}, \quad j=\overline{1,n-1}. \tag{12}$$

Если использовать для дискретизации частных производных второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$ соответственно выражения

$$\frac{z_{(i+1)j}-2z_{ij}+z_{(i-1)j}}{h_x^2}, \quad \frac{z_{i(j+1)}-2z_{ij}+z_{i(j-1)}}{h_y^2},$$

то нетрудно видеть, что система (12) является дискретизацией уравнения (10).

Теперь для системы (12) рассмотрим обратную задачу оптимизации. Так как эта система представляет собой необходимое условие экстремума функционала (11), то обратная задача оптимизации для системы (12) разрешима.

Как показано в [4], в общем случае нет связи между разрешимостью обратной задачи вариационного исчисления и разрешимостью обратной задачи оптимизации для соответствующего дискретного по времени аналога.

Решим обратную задачу с помощью доказанной теоремы. Чтобы воспользоваться этой теоремой, нужно записать систему (12) в виде (1). Это можно сделать разными способами. Будем выбирать функции A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} таким образом, чтобы выполнялись условия (5) разрешимости обратной задачи оптимизации. Нетрудно проверить, что для этого достаточно взять

$$A_{ij}=-2\biggl(\frac{z_{(i+1)j}-z_{ij}}{h_x^2}+\frac{z_{i(j+1)}-z_{ij}}{h_y^2}\biggr), \quad B_{ij}=-2\frac{z_{(i-1)j}-z_{ij}}{h_x^2}, \quad C_{ij}=-2\frac{z_{i(j-1)}-z_{ij}}{h_y^2}.$$

Используя представления (6), найдём явный вид функционала (3) для этого примера.

При $i=\overline{1,m-2}$, $j=\overline{1,n-2}$ имеем

$$V_{ij}=-2\int\limits_0^{z_{ij}}\biggl(\frac{z_{(i+1)j}-z_{ij}}{h_x^2}+\frac{z_{i(j+1)}-z_{ij}}{h_y^2}\biggr)\,dz_{ij}-$$

$$-2\int\limits_0^{z_{(i+1)j}}\biggl(-\frac{z_{(i+1)j}}{h_x^2}\biggr)\,dz_{(i+1)j}-2\int\limits_0^{z_{i(j+1)}}\biggl(-\frac{z_{i(j+1)}}{h_y^2}\biggr)\,dz_{i(j+1)}=\biggl(\frac{z_{(i+1)j}-z_{ij}}{h_x}\biggr)^2+\biggl(\frac{z_{i(j+1)}-z_{ij}}{h_y}\biggr)^2,$$

что совпадает с соответствующим слагаемым в (11).

Подобным образом находятся остальные слагаемые (11), причём они восстанавливаются с учётом заданных условий с точностью до известных слагаемых, что не влияет на необходимое условие экстремума.

Например, при $j=\overline{1,n-1}$ получаем

$$V_{0j}=-2\int\limits_0^{z_{1j}}\frac{z_{0j}-z_{1j}}{h_x^2}\,dz_{1j}=\frac{z_{1j}^2-2z_{0j}z_{1j}}{h_x^2}.$$

Прибавив к этому выражению известную величину

$$\frac{z_{0j}^2}{h_x^2}+\left(\frac{z_{0(j+1)}-z_{0j}}{h_y}\right)^2,$$

найдём соответствующее слагаемое в (11).

Автор выражает глубокую благодарность В.Г. Задорожнему за полезное обсуждение результата статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. Новые достижения. 1992. Т. 40. С. 3–176.
2. *Задорожний В.Г.* Методы вариационного анализа. М.; Ижевск, 2006.
3. *Kurina G.* On some inverse problems of the calculus of variations for second order differential equations with deviating arguments and partial derivatives // New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations. Springer INdAM Series. V. 10. Cham, 2014. P. 253–270.
4. *Kurina G., Zadorozhniy V.* Inverse problems of the calculus of variations for discrete-time systems // Pure and Appl. Func. Anal. 2016. V. 1. № 4. P. 573–582.
5. *Гайшун И.В., Дымков М.П.* Линейно-квадратичная задача оптимизации композитных дискретных 2-D систем управления // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 71–83.
6. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А., Галковский К., Роджерс Э.* Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 113–129.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1965.

Воронежский государственный университет,
Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.06.2021 г.
После доработки 03.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.