ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1705–1714

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 519.63+519.651:517.956.4

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АГРЕГАТА

© 2021 г. А. Б. Утесов, А. А. Базарханова

В рамках общей постановки задачи восстановления оператора решена задача дискретизации решений уравнения теплопроводности с начальным условием f из периодического анизотропного класса Соболева вычислительными агрегатами, построенными по тригонометрическим коэффициентам Фурье $\hat{f}(m)$, в метрике пространства $L^{\infty,q}$, $q \geqslant 2$. Найдена также погрешность $\bar{\varepsilon}_N$ вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье начального условия f, соответствующих оптимальному вычислительному агрегату, и доказана неулучшаемость порядка погрешности $\bar{\varepsilon}_N$.

DOI: 10.31857/S0374064121120128

1. Постановка задачи. Впервые задача дискретизации рассматривалась Н.М. Коробовым для уравнения Пуассона [1, с. 185–190]. Затем в работах [2, 3] С.А. Смоляком был предложен оригинальный метод – метод тензорных произведений классов, позволяющий строить оптимальные вычислительные агрегаты в задачах восстановления интеграла, функций и решений уравнения в частных производных. Впоследствии метод Смоляка и его различные применения стали предметом изучения многих математиков (см., например, [4], а также [5] и имеющуюся в ней библиографию). Задачами дискретизации занимались и китайские математики: в монографии [6] Хуа Ло Кен и Вань Юань рассмотрели, в частности, уравнение теплопроводности с начальным условием из класса Коробова. Н. Темиргалиевым и его учениками, кроме уравнений из работ [1, 6], рассматривались и другие классические уравнения математической физики и в рамках общей постановки задачи восстановления оператора были установлены точные или близкие к точным порядки погрешности оптимальной дискретизации, а также найдены предельные погрешности оптимальных вычислительных агрегатов (см., например, [7] и имеющуюся в ней библиографию).

Приведём общую постановку задачи восстановления оператора в редакции работы [8]. Пусть F – какой-либо класс числовых функций, заданных на множестве Ω_F, а Y – некоторое нормированное пространство числовых функций, заданных на множестве Ω_Y, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_Y$. Для каждого целого $N \geqslant 1$ через $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_N^{(1)}, \ldots, l_N^{(N)})$ – набор функционалов $l_N^{(1)} : F \to \mathbb{C}, \ \ldots, \ l_N^{(N)} : F \to \mathbb{C}$, а φ_N – функция $\varphi_N(z_1, \ldots, z_N; y) : \mathbb{C}^N \times \Omega_Y \to \mathbb{C}$, которая при всяком фиксированном $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ как функция от переменной y принадлежит пространству Y. Далее при каждой фиксированной $f \in F$ функцию $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \ldots, l_N^{(N)}(f); y)$ от переменной y, определяемую парой $(l^{(N)}, \varphi_N)$, будем называть *вычислительным агрегатом.*

Всюду ниже для любого числа A и положительного числа B запись $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ будет означать существование постоянной $C(\alpha, \beta, \ldots) > 0$, зависящей лишь от указанных под знаком $\ll$ параметров, такой, что $|A| \leqslant C(\alpha, \beta, \ldots)B$. Отсутствие под знаком $\ll$ параметров означает, что постоянная может быть выбрана одной и той же для всех рассматривающихся параметров. Для положительных чисел A и B одновременное выполнение соотношений $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ и $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A$ записывается в виде $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} B$.

Пусть заданы класс F, пространство Y и оператор $T : F \to Y$. Тогда для множества $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ положим

$$\delta_N(D_N;T;F)_Y = \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \delta_N((l^{(N)},\varphi_N);T;F)_Y, \tag{1}$$

где

$$\delta_N((l^{(N)},\varphi_N);T;F)_Y = \sup_{f\in F} \|(Tf)(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot)\|_Y.$$

Задача восстановления оператора Tf вычислительными агрегатами

$$(l^{(N)},\varphi_N) \equiv \varphi_N(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot)$$

в метрике пространства Y заключается в установлении точного порядка величины (1) (т.е. в нахождении последовательности $\{\psi_N\}_{N\geqslant 1}$ положительных чисел, удовлетворяющей соотношению $\delta_N(D_N;T;F)_Y \succ\prec \psi_N$) и в указании такого вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N) \equiv \equiv \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);\cdot)$, для которого $\delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N);T;F)_Y \succ\prec \psi_N$ (в этом случае вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N)$ называется *оптимальным*).

Пусть $u(t,x;f)$ – решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \quad x = (x_1,\ldots,x_s)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^s,$$

с 1-периодическим начальным условием $u(0,x;f) = f(x)$, разлагающимся в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд Фурье $\sum_{m\in\mathbb{Z}^s} \hat{f}(m)\exp(2\pi i(m,x))$, где

$$\hat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\exp(-2\pi i(m,x))\,dx.$$

Тогда имеет место следующее равенство (см., например, [9, лемма B]):

$$u(t,x;f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} \hat{f}(m)\exp(-4\pi^2(m,m)t)\exp(2\pi i(m,x)). \tag{2}$$

Поэтому возникает задача дискретизации решений $u(t,x;f)$ вычислительными агрегатами, построенными по тригонометрическим коэффициентам Фурье $\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)})$ объёма N, где $m^{(1)} \in \mathbb{Z}^s,\ldots,\ m^{(N)} \in \mathbb{Z}^s$. Задача дискретизации бесконечного объекта (в нашем случае решения дифференциального уравнения или ряда) состоит в его приближении простым (в некотором смысле) конечным объектом и в указании точности предложенного приближения.

В данной работе эта задача изучается в рамках сформулированной выше задачи восстановления оператора при (необходимые определения даны ниже в п. 2)

$$(Tf)(\cdot) = u(\cdot\,;f), \quad F = W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s, \quad Y = L^{\infty,q} \equiv L^{\infty,q}([0,+\infty)\times[0,1]^s),$$

$$D_N = \Phi_N \equiv \{(l^{(N)},\varphi_N) : l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}),\ \ldots,\ l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})\}.$$

Задачи дискретизации решений $u(t,x;f)$ в других конкретизациях F, Y и D_N изучены в работах [9–11]. В них в качестве классов F, содержащих начальные условия, рассматривались периодические изотропные классы Никольского–Бесова, Коробова и Соболева. В [12] в задачах дискретизации решений уравнений в частных производных впервые был рассмотрен анизотропный класс Соболева $W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ и найден точный порядок погрешности дискретизации при $Y = L^{\infty,2}$ и $D_N = P_N \equiv \{(l^{(N)},\varphi_N) : l_N^{(\tau)}(f) = f(\xi_N^{(\tau)}),\ \tau = \overline{1,N}\}$, где $\xi_N^{(1)} \in [0,1]^s,\ \ldots,\ \xi_N^{(N)} \in [0,1]^s$. Рассмотрение анизотропного класса Соболева $W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ обусловлено тем, что в случае изотропного класса Соболева $W_2^r[0,1]^s$ точный порядок $\delta_N(\Phi_N;(Tf)(\cdot) = u(\cdot\,;f);W_2^r[0,1]^s)_{L^{\infty,2}} \succ\prec N^{-r/s}$ ухудшается с увеличением размерности s, а в случае анизотропного класса Соболева $W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ точный порядок $\delta_N(\Phi_N;(Tf)(\cdot) = u(\cdot\,;f);W^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s)_{L^{\infty,2}} \succ\prec N^{-(1/r_1+\ldots+1/r_s)^{-1}}$ не зависит от s. Подчеркнём, что в работе [12] задача нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата не изучалась (эта задача пока остаётся нерешённой).

В настоящей работе при $Y = L^{\infty,q}$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$ и $D_N = \Phi_N$ установлен точный порядок погрешности дискретизации решений $u(t,x;f)$ и найдена предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\hat f(\overline{m}^{(1)}),\ldots,\hat f(\overline{m}^{(N)});t,x)$.

2. Необходимые определения и полученные результаты. Сначала условимся об используемых обозначениях и приведём определения класса $W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ и пространства $L^{\infty,q}([0;+\infty)\times[0,1]^s)$. Для конечного множества E через $|E|$ обозначаем количество его элементов. Как обычно, $[a]$ – целая часть числа a. Всюду $m = (m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s$. Для упрощения записи вместо $\|f\|_{L^{\infty,q}}$, $\underset{s,q,r_1,\ldots,r_s}{\gg}$ и $\underset{s,q,r_1,\ldots,r_s}{\ll}$ будем писать $\|f\|_q$, $\underset{s,q,r}{\gg}$ и $\underset{s,q,r}{\ll}$ соответственно.

Пусть $s = 2,3,\ldots$ и $r = (r_1,\ldots,r_s)$ – вектор с положительными компонентами. *Анизотропный класс Соболева* $W_2^{r_1,\ldots,r_s} \equiv W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ по определению состоит из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1,\ldots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat f(m)$, $m \in \mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s} |\hat f(m)|^2(\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}) \leqslant 1,$$

где $\widetilde{m}_i = \max\{1,|m_i|\}$ для каждого $i = \overline{1,s}$.

Нормированное пространство $L^{\infty,q} \equiv L^{\infty,q}([0;+\infty)\times[0,1]^s)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, определяется как линейное пространство всех функций $g : [0,+\infty)\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ таких, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ функция $g_t(x) = g(t,x)$ как функция аргумента $x \in \mathbb{R}^s$ является измеримой, 1-периодической по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{\infty,q}} \equiv \sup_{t\geqslant 0}\operatorname{vrai}\|g(t,\cdot)\|_q < +\infty \quad (L^\infty[0,1]^s \equiv C[0,1]^s).$$

Приведём определение предельной погрешности (см., например, [7, с. 10]). *Предельной погрешностью* оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar l_N^{(1)}(f),\ldots,\bar l_N^{(N)}(f);\cdot)$, $N \in \mathbb{N}$, называется последовательность $\{\bar\varepsilon_N\}$ положительных чисел такая, что:

во-первых, для всех N имеет место соотношение

$$\triangle_N(\bar\varepsilon_N;(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N);T;F)_Y \succ\prec \delta_N(D_N;T;F)_Y; \tag{3}$$

где

$$\triangle_N(\bar\varepsilon_N;(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N);T;F)_Y =$$

$$= \sup_{f\in F}\sup_{z_1,\ldots,z_N}\{\|(Tf)(\cdot) - \overline{\varphi}_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)\|_Y : |z_i - \bar l_N^{(i)}(f)| < \bar\varepsilon_N,\ \ i = \overline{1,N}\} =$$

$$= \sup_{f\in F}\sup_{|\gamma_N^{(1)}|\leqslant 1,\ldots,|\gamma_N^{(N)}|\leqslant 1}\|(Tf)(\cdot) - \overline{\varphi}_N(\bar l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\bar\varepsilon_N,\ldots,\bar l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\bar\varepsilon_N;\cdot)\|_Y;$$

во-вторых, справедливо равенство

$$\varlimsup_{N\to+\infty}\frac{\triangle_N(\eta_N\bar\varepsilon_N;(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N);T;F)_Y}{\delta_N(D_N;T;F)_Y} = +\infty \tag{4}$$

для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N\geqslant 1}$ положительных чисел.

Соотношение (3) означает, что при вычислении значений оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);\cdot)$ функционал $\bar{l}_N^{(\tau)}(f)$, $\tau=\overline{1,N}$, можно заменить неточными значениями z_τ такими, что $|z_\tau-\bar{l}_N^{(\tau)}(f)|<\bar{\varepsilon}_N$ $(\tau=\overline{1,N})$, сохраняя при этом точный порядок погрешности оптимального восстановления. Выполнение же равенства (4) означает неулучшаемость порядка погрешности $\bar{\varepsilon}_N$, так как сколь угодно медленное возрастание к бесконечности величины $\bar{\varepsilon}_N$ нарушает точный порядок погрешности восстановления.

Далее для упрощения записи положим $(Tf)(\cdot)=u(\cdot\,;f)$ и

$$\delta_N(\Phi_N;(Tf)(\cdot);W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s)_{L^{\infty,q}}\equiv\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}},$$

$$\delta_N((l^{(N)},\varphi_N);(Tf)(\cdot);W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s)_{L^{\infty,q}}\equiv\delta_N((l^{(N)},\varphi_N))_{L^{\infty,q}},$$

$$\triangle_N(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N);(Tf)(\cdot);W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s)_{L^{\infty,q}}\equiv\triangle_N(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть даны числа* s $(s=2,3,\ldots)$, $r_1>0$, $\ldots$, $r_s>0$, $q\in[2,\infty]$, *а числа* λ *и* N_i *для каждого* $i=\overline{1,s}$ *определены равенствами* $\lambda\equiv\lambda(r_1,\ldots,r_s)=(1/r_1+\ldots+1/r_s)^{-1}>1/2$ *и* $N_i\equiv N_i(K)=[K^{\lambda/r_i}]$, $K\in\mathbb{N}$. *Тогда для любого* $N\equiv N(K)=\prod_{i=1}^s(2N_i+1)$ *имеют место соотношения*

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}\underset{s,r,q}{\succ\prec}\delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}\underset{s,r,q}{\succ\prec}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda},\tag{5}$$

здесь пара $(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N)$ *состоит из функционалов* $\bar{l}_N^{(1)}(f)=f(\overline{m}^{(1)})$, $\ldots$, $\bar{l}_N^{(N)}(f)=f(\overline{m}^{(N)})$ *и функции* $\overline{\varphi}_N(z_1,\ldots,z_N;t;x)=\sum_{\tau=1}^N z_\tau\exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)},x))$, *а* s*-мерные целочисленные векторы* $\overline{m}^{(1)}$, $\ldots$, $\overline{m}^{(N)}$ *такие, что* $\overline{m}^{(i)}\neq\overline{m}^{(j)}$ *при* $i\neq j$ *и* $\bigcup_{\tau=1}^N\{\overline{m}^{(\tau)}\}=A_K$, *где* $A_K=\{m\in\mathbb{Z}^s:|m_1|\leqslant N_1,\ \ldots,\ |m_s|\leqslant N_s\}$.

Теорема 2. *Для оптимального вычислительного агрегата* $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);\cdot)$ *величина* $\bar{\varepsilon}_N=N^{-\lambda-1/2}$ *является предельной погрешностью, т.е. имеет место соотношение*

$$\triangle_N(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}\underset{s,r,q}{\succ\prec}\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}\tag{6}$$

и для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ *последовательности* $\{\eta_K\}_{K\geqslant 1}$ *положительных чисел справедливо равенство*

$$\varlimsup_{K\to+\infty}\frac{\triangle_N(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}}{\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}}=+\infty.\tag{7}$$

Тем самым, нами получены следующие результаты:

(i) найден точный порядок погрешности оптимальной дискретизации решений $u(t,x;f)$ уравнения теплопроводности с начальным условием из анизотропного класса Соболева вычислительными агрегатами $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)});t,x)$ в метрике пространства $L^{\infty,q}$, $2\leqslant q\leqslant\infty$;

(ii) доказано, что функция

$$\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);t,x)=\sum_{\tau=1}^N\hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})\exp(-4\pi^2(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)})t)\exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)},x))\tag{8}$$

является оптимальным вычислительным агрегатом;

(iii) выяснено, что при построении оптимального вычислительного агрегата (8) тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})$, $\tau=\overline{1,N}$, можно заменить неточными значениями

z_τ такими, что $|z_\tau - \hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})| \leqslant \bar{\varepsilon}_N$, $\tau = \overline{1,N}$, сохраняя при этом точный порядок погрешности оптимальной дискретизации;

(iv) установлена неулучшаемость порядка погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})$, $\tau = \overline{1,N}$.

3. Доказательство теоремы 1. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1 ([13]). *Пусть дан вектор* $(r_1, \ldots, r_s)$ *с положительными компонентами такой, что* $\lambda = (1/r_1 + \ldots + 1/r_s)^{-1} > 1/2$. *Тогда тригонометрический ряд Фурье каждой функции* $f \in W_2^{r_1,\ldots,r_s}$ *сходится абсолютно (и равномерно при любом методе суммирования).*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда сходится кратный интеграл*

$$\underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \cdots \int\limits_1^{+\infty}}_{s} \frac{dx_1 \cdots dx_s}{x_1^{2r_1} + \ldots + x_s^{2r_s}}. \tag{9}$$

Доказательство. Сходимость интеграла (9) в случае $s \geqslant 4$ устанавливается аналогично случаям $s = 2$ и $s = 3$, рассмотренным в [14, с. 104–109]. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1. Сначала оценим величину $\delta_N((\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}$ сверху. Так как

$$\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \sum_{\tau=1}^{N} \hat{f}(\overline{m}^{(\tau)}) \exp(-4\pi^2 (\overline{m}^{(\tau)}, \overline{m}^{(\tau)}) t) \exp(2\pi i (\overline{m}^{(\tau)}, x)) =$$

$$= \sum_{m \in A_K} \hat{f}(m) \exp(-4\pi^2 (m,m) t) \exp(2\pi i (m,x)),$$

то, согласно равенству (2) и лемме 1, получаем

$$u(t,x;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} \hat{f}(m) \exp(-4\pi^2 (m,m) t) \exp(2\pi i (m,x)).$$

Следовательно, в случае $q = 2$ при каждом фиксированном $t \in [0, \infty)$ в силу равенства Парсеваля и определения пространства $L^{\infty,2}$ приходим к оценке сверху

$$\|u(t,\cdot;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_2 \underset{s,r}{\ll} \frac{1}{N^\lambda}. \tag{10}$$

Далее, рассмотрим случай $q = \infty$. Очевидно, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\|u(t,\cdot;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_\infty \leqslant \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} |\hat{f}(m)|,$$

откуда, используя неравенства Гёльдера и учитывая определение пространства $L^{\infty,\infty}$, имеем

$$\|u(t,\cdot;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_\infty \underset{s,r}{\ll} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}} \right)^{1/2}. \tag{11}$$

Теперь каждому $l \in \mathbb{Z} \bigcap [1, s-1]$ поставим в соответствие множество T_l, образованное всеми векторами $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ такими, что $a_i \in \mathbb{Z} \bigcap [1, s]$ для каждого $i = \overline{1,l}$. Далее в случае $l \neq 1$ по каждому элементу $(a_1, a_2, \ldots, a_l) \in T_l$, удовлетворяющему неравенству $a_1 < a_2 < \ldots < a_l$, определим множество $A^{(a_1, a_2, \ldots, a_l)}$, состоящее из векторов $(m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$

таких, что $|m_i| > N_i$, если $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, и $|m_i| \leqslant N_i$, если $i \in (\mathbb{Z} \bigcap [1,s]) \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Очевидно, что $\mathbb{Z}^s \backslash A_K = (\bigcup_{l=1}^{s-1} B_l) \bigcup A^*$, где

$$B_l = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_l)\in T_l} A^{(a_1,\ldots,a_l)}, \quad A^* = \{(m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s : |m_1| > N_1, \quad \ldots, \quad |m_s| > N_s\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s/A_K} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \overline{m}_s^{2r_s}} \leqslant \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{m\in B_l} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}} + \sum_{m\in A^*} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}}. \tag{12}$$

Рассмотрим кратный интеграл

$$\int\limits_{N_1}^{+\infty} \cdots \int\limits_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \cdots dx_s}{x_1^{2r_1} + \ldots + x_s^{2r_s}}.$$

Проведя в этом интеграле замену переменных $x_i = N_i u_i$, $i = \overline{1,s}$, получим

$$\int\limits_{N_1}^{+\infty} \cdots \int\limits_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \cdots dx_s}{x_1^{2r_1} + \ldots + x_s^{2r_s}} \leqslant \frac{N_1 \ldots N_s}{N^{2\lambda}} \int\limits_{1}^{+\infty} \cdots \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{du_1 \cdots du_s}{u_1^{2r_1} + \ldots + u_s^{2r_s}} \underset{s,r}{\ll} \frac{N}{N^{2\lambda}}, \tag{13}$$

поскольку $\prod_{i=1}^s N_i \underset{s}{\succ\prec} N$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \ldots \int_1^{+\infty} (u_1^{2r_1} + \ldots + u_s^{2r_s})^{-1} du_1 \cdots du_s$, согласно лемме 2, сходится при $\lambda > 1/2$.

Так как

$$\sum_{m\in A^*} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}} \underset{s,r}{\ll} \int\limits_{N_1}^{+\infty} \cdots \int\limits_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \cdots dx_s}{x_1^{2r_1} + \ldots + x_s^{2r_s}},$$

то в силу оценки (13) имеем

$$\sum_{m\in A^*} \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}} \underset{s,r}{\ll} \frac{N}{N^{2\lambda}}. \tag{14}$$

Пусть U – декартово произведение множеств $[0, N_i]$, $i \in (\mathbb{Z} \bigcap [1,s]) \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, а V – множеств $[N_i, +\infty)$, $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ (здесь, как и выше, при $l \neq 1$ предполагается выполнение неравенств $a_1 < a_2 < \ldots < a_l$). Тогда

$$\sum_m \left\{ \frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_s}} : m \in A^{(a_1,a_2,\ldots,a_l)} \right\} \underset{s,r}{\ll} \int\limits_U \int\limits_V \frac{dx_1 \cdots dx_s}{x_1^{2r_1} + \ldots + x_s^{2r_s}} \underset{s,r}{\ll}$$

$$\underset{s,r}{\ll} \Bigg(\prod_{i\in(\mathbb{Z}\bigcap[1,s])\backslash\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}} N_i \Bigg) \int\limits_{N_{a_1}}^{+\infty} \cdots \int\limits_{N_{a_l}}^{+\infty} \frac{dx_{a_1} \cdots dx_{a_l}}{(x_{a_1})^{2r_{a_1}} + \ldots + (x_{a_l})^{2r_{a_l}}} \underset{s,r}{\ll}$$

(замена переменных $x_{a_1} = N_{a_1} u_1, \ \ldots, \ x_{a_l} = N_{a_l} u_l$)

$$\underset{s,r}{\ll} \frac{1}{N^{2\lambda}} \Bigg(\prod_{i\in(\mathbb{Z}\bigcap[1,s])\backslash\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}} N_i \Bigg) \Bigg(\prod_{\tau=1}^{l} N_{a_\tau} \Bigg) \underbrace{\int\limits_{1}^{+\infty} \cdots \int\limits_{1}^{+\infty}}_{l} \frac{du_1 \cdots du_l}{u_1^{2r_{a_1}} + \ldots + u_l^{2r_{a_l}}},$$

отсюда в силу равенства

$$\left(\prod_{i\in(\mathbb{Z}\bigcap[1,s])\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}} N_i\right)\left(\prod_{\tau=1}^{l} N_{a_\tau}\right)=\prod_{i=1}^{s} N_i$$

и соотношения $\prod_{i=1}^s N_i \underset{s,r}{\succ\prec} N$ с учётом сходимости последнего интеграла при $\lambda > 1/2$ получим

$$\sum_m \left\{\frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde{m}_s^{2r_s}} : m\in A^{(a_1,a_2,\ldots,a_l)}\right\} \underset{s,r}{\ll} N/N^{2\lambda}.$$

Стало быть, справедливо соотношение

$$\sum_{l=1}^{s-1}\sum_{m\in B_l}\frac{1}{\widetilde{m}_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde{m}_s^{2r_s}} \underset{s,r}{\ll} \frac{N}{N^{2\lambda}}. \tag{15}$$

Из соотношений (11), (12), (14) и (15) вытекает, что

$$\|u(t,\cdot;f)-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);t,\cdot)\|_\infty \underset{s,r}{\ll} \frac{N^{1/2}}{N^{\lambda}}. \tag{16}$$

Хорошо известно, что для любой функции $g\in C[0,1]^s$ при $q\in[2,\infty]$ имеет место неравенство (см., например, [15, с. 50])

$$\|g\|_q \leqslant \|g\|_2^{2/q}\|g\|_\infty^{1-2/q}. \tag{17}$$

Следовательно, в силу (10), (16) и (17) получаем

$$\|u(t,\cdot;f)-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);t,\cdot)\|_q \underset{s,r,q}{\ll} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda}}, \tag{18}$$

откуда, поскольку переменная t и функция f произвольны, заключаем, что

$$\delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}} \underset{s,r,q}{\ll} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda}}, \quad q\in[2,\infty]. \tag{19}$$

Оценим величину $\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}$ снизу. Пусть заданы число N $(N=2,3,\ldots)$, функционалы $l_N^{(1)}(f)=\hat{f}(m^{(1)})$, $\ldots$, $l_N^{(N)}(f)=\hat{f}(m^{(N)})$ и функция $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)$ – алгоритм переработки числовой информации объёма N.

Введём в рассмотрение функцию

$$f_N(x)=\frac{1}{N^{\lambda}\sqrt{N}}\sum_{m\in C_N\setminus B_N}\exp(2\pi i(m,x)),$$

где $C_N=\{m\in\mathbb{Z}^s : |m_1|\leqslant[N^{\lambda/r_1}],\ldots,|m_s|\leqslant[N^{\lambda/r_s}]\}$, $B_N=\{m^{(1)},m^{(2)},\ldots,m^{(N)}\}\subset\mathbb{Z}^s$.

При некотором $C>0$ имеет место включение $Cf_N\in W_2^{r_1,\ldots,r_s}$, поскольку с учётом неравенств $\sum_{m\in C_N\setminus B_N} 1\leqslant\sum_{m\in C_N} 1 < 3^sN$ имеем

$$\sum_{m\in C_N\setminus B_N}|\hat{f}_N(m)|^2(\widetilde{m}_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde{m}_s^{2r_s})=\frac{C^2}{N^{2\lambda}N}\sum_{m\in C_N\setminus B_N}(\widetilde{m}_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde{m}_s^{2r_s})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C^2}{N^{2\lambda}N}\sum_{m\in C_N\setminus B_N}((N^{\lambda/r_1})^{2r_1}+\ldots+(N^{\lambda/r_s})^{2r_s}) < s3^sC^2.$$

Так как $\prod_{i=1}^{s}[N^{\lambda/r_i}] \underset{s}{\succ\prec} N$ и $\|f_N\|_\infty \underset{s,r}{\gg} \sqrt{N}/N^\lambda$, то вследствие неравенства Никольского [16, с. 256] получаем

$$\|f_N\|_q \underset{s,r}{\gg} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}. \tag{20}$$

В силу включения $Cf_N \in W_2^{r_1,\ldots,r_s}$ и равенств $u(0,x;Cf_N) = Cf_N(x)$, $l_N^{(1)}(Cf_N) = 0, \ldots$ $\ldots, l_N^{(N)}(Cf_N) = 0$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sup_{f\in W_2^{r_1,\ldots,r_s}} \|u(\cdot\,;f) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot)\|_{L^{\infty,q}} \geqslant$$

$$\geqslant \max\{\|(Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q, \|(-Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(\|(Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q + \|(-Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q) \geqslant \|Cf_N\|_q.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (20), получаем

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}} \underset{s,r}{\gg} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}. \tag{21}$$

Так как очевидно неравенство $\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}} \leqslant \delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}}$, то из (19) и (21) вытекают соотношения (5). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Для произвольно заданных чисел $\gamma_N^{(\tau)}$ таких, что $|\gamma_N^{(\tau)}| \leqslant$ $\leqslant 1$ $(\tau = \overline{1,N})$ и для каждого фиксированного $t \in [0,\infty)$ справедливо неравенство

$$\|u(t,\cdot\,;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;t,\cdot)\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \|u(t,\cdot\,;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f);t,\cdot)\|_q +$$

$$+ \left\|\sum_{\tau=1}^{N}(-\gamma_N^{(\tau)})\bar{\varepsilon}_N \exp(-4\pi^2(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}))\exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)},\cdot\,))\right\|_q. \tag{22}$$

В силу (17), (18) и (22) имеет место соотношение

$$\left\|u(t,\cdot\,;f) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;t,\cdot)\right\|_q \underset{s,r,q}{\ll} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda},$$

откуда, поскольку переменная t, числа $\gamma_N^{(\tau)}$, $\tau = \overline{1,N}$, и функция f произвольны, следует, что

$$\triangle_N(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}} \underset{s,r}{\ll} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}, \quad q \in [2,\infty]. \tag{23}$$

Так как

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}} \leqslant \delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}} \leqslant \triangle_N(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}},$$

то вследствие (21) и (23) приходим к соотношению (6).

Теперь убедимся в справедливости равенства (7). Для каждого $K \in \mathbb{N}$ определим множество $H_K = \{m \in \mathbb{Z}^s : |m_1| \leqslant [N^{\lambda/r_1}\beta_K^{-\alpha/r_1}], \ \ldots, \ |m_s| \leqslant [N^{\lambda/r_s}\beta_K^{-\alpha/r_s}]\}$, где $N = N(K)$, $\beta_K = \min\{\eta_N, \ln(N+1)\}$ и α – некоторое число из интервала $(2\lambda/(2\lambda+1), \lambda q/(q-1))$. Здесь же заметим, что условие $\lambda > 1/2$ обеспечивает выполнение неравенства

$$2\lambda/(2\lambda+1) < \lambda q/(q-1).$$

Так как $\lim\limits_{K\to+\infty}\beta_K=+\infty$, то существует номер K_0 такой, что для всех $K\geqslant K_0$ имеет место неравенство $\beta_K\geqslant 1$.

Для каждого $K\geqslant K_0$ функция $h_K(x)=(3^s s)^{-1/2}\beta_K\bar\varepsilon_N\sum_{m\in H_K}\exp(2\pi i(m,x))$ принадлежит классу $W_2^{r_1,\ldots,r_s}$. Действительно, используя неравенства $|H_K|<3^sN\beta_K^{-\alpha/\lambda}$, $2\alpha-2+{}$ ${}+\alpha/\lambda>0$ и $\beta_K\geqslant 1$ $(K\geqslant K_0)$, имеем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}|\hat h_K(m)|^2(\widetilde m_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde m_s^{2r_s})=\sum_{m\in H_K}|\hat h_K(m)|^2(\widetilde m_1^{2r_1}+\ldots+\widetilde m_s^{2r_s})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\beta_K^2\bar\varepsilon_N^2}{3^s s}\sum_{m\in H_K}sN^{2\lambda}\beta_K^{-2\alpha}=\frac{1}{3^sN}\beta_K^{2-2\alpha}\sum_{m\in H_K}1\leqslant\frac{1}{\beta_K^{2\alpha-2+\alpha/\lambda}}\leqslant 1.$$

Так как $\|h_K\|_\infty\underset{s}{\gg}\beta_K\bar\varepsilon_N|H_K|$ и $N\beta_K^{-\alpha/\lambda}<|H_K|$, то $\|h_K\|_\infty\underset{s}{\gg}N^{-\lambda+1/2}\beta_K^{1-\alpha/\lambda}$. Поэтому в силу неравенства Никольского и соотношения (5) получаем, что

$$\|h_K\|_q\underset{s}{\gg}\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}\beta_K^{1-\alpha(1-1/q)/\lambda}. \tag{24}$$

Для каждого $K\geqslant K_0$ определим наборы $(\tilde\gamma_N^{(1)},\ldots,\tilde\gamma_N^{(N)})$ и $(\tilde\omega_N^{(1)},\ldots,\tilde\omega_N^{(N)})$, где $N=N(K)$, с компонентами $\tilde\gamma_N^{(\tau)}=-\hat h_K(m^{(\tau)})(\bar\varepsilon_N\eta_N)^{-1}$, $\tau=\overline{1,N}$, и $\tilde\omega_N^{(\tau)}=-(-\hat h_K)(m^{(\tau)})(\bar\varepsilon_N\eta_N)^{-1}$, $\tau={}$ ${}=\overline{1,N}$. Так как для каждого $\tau=\overline{1,N}$ выполнены неравенства $|\tilde\gamma_N^{(\tau)}|\leqslant 1$, $|\tilde\omega_N^{(\tau)}|\leqslant 1$ и равенства $\hat h_K(m^{(\tau)})+\eta_N\tilde\gamma_N^{(\tau)}\bar\varepsilon_N=0$, $(-\hat h_K)(m^{(\tau)})+\eta_N\tilde\omega_N^{(\tau)}\bar\varepsilon_N=0$, то для всякой пары $(l^{(N)},\varphi_N)\in{}$ ${}\in\Phi_N$ будем иметь

$$\sup_{f\in W_2^{r_1,\ldots,r_s}}\sup_{\substack{|\gamma_N^{(1)}|\leqslant 1\\ \cdots\\ |\gamma_N^{(N)}|\leqslant 1}}\|u(\cdot\,;f)-\varphi_N(\hat f(m^{(1)})+\gamma_N^{(1)}\eta_N\bar\varepsilon_N,\ldots,\hat f(m^{(N)})+\gamma_N^{(N)}\eta_N\bar\varepsilon_N;\cdot)\|_{L^{\infty,q}}\geqslant$$

$$\geqslant\max\{\|h_K(\cdot)-\varphi_N(\hat h_K(m^{(1)})+\tilde\gamma_N^{(1)}\eta_N\bar\varepsilon_N,\ldots,\hat h_K(m^{(N)})+\tilde\gamma_N^{(N)}\eta_N\bar\varepsilon_N;0,\cdot)\|,$$
$$\|(-h_K)(\cdot)-\varphi_N((-\hat h_K)(m^{(1)})+\tilde\omega_N^{(1)}\eta_N\bar\varepsilon_N,\ldots,(-h_K)(m^{(N)})+\tilde\omega_N^{(N)}\eta_N\bar\varepsilon_N;0,\cdot)\|_q\}=$$
$$=\max\{\|h_K(\cdot)-\varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q,$$
$$\|(-h_K)(\cdot)-\varphi_N(0,\ldots,0;0,\cdot)\|_q\}\geqslant\|h_K\|_q. \tag{25}$$

Сопоставляя соотношения (24) и (25), заключаем, что

$$\triangle_N(\eta_N\bar\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N))_{L^{\infty,q}}\underset{s}{\gg}\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}\beta_K^{1-\alpha(1-1/q)/\lambda},$$

откуда, поскольку $1-\alpha\lambda^{-1}(1-1/q)>0$, следует равенство (7). Теорема 2 доказана.

Замечание. Так как равенство (7) доказано для каждой пары $(l^{(N)},\varphi_N)\in\Phi_N$, то никакой оптимальный вычислительный агрегат $\varphi_N(\hat f(m^{(1)}),\ldots,\hat f(m^{(N)});\cdot)$, $N=N(K)$, не имеет большей (по порядку) предельной погрешности, чем $\bar\varepsilon_N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
3. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1965.

4. *Sickel W., Ullrich T.* The Smolyak's algorithm, sampling on sparse grids and function spaces of dominating mixed smoothness // East J. Approx. 2007. V. 13. № 4. P. 287–425.
5. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А.* Применение квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // Изв. вузов. Математика. 2010. № 3. С. 52–71.
6. *Loo Keng Hua, Yang Wang.* Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg; New York, 1981.
7. *Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К.* Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2019. Т. 126. № 1. С. 8–51.
8. *Темиргалиев Н.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 1997. № 3. С. 90–144.
9. *Ажгалиев Ш.* О дискретизации решений уравнения теплопроводности // Мат. заметки. 2007. Т. 82. № 2. С. 177–182.
10. *Шерниязов К.Е.* Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
11. *Таугынбаева Г.Е.* О предельной погрешности неточной информации при оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности по тригонометрическим коэффициентам Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2010. Т. 79. № 6. С. 35–48.
12. *Утесов А.Б.* Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решений уравнения теплопроводности: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2001.
13. *Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т.* Полное К(В)П-исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2018. № 1 (122). С. 90–98.
14. *Ляшко И.И.и др.* Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. Т. 3. М., 2001.
15. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
16. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1951. Т. 38. С. 244–278.

Актюбинский региональный университет
им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан,
Назарбаев Университет,
г. Нур-Султан, Казахстан

Поступила в редакцию 06.05.2021 г.
После доработки 26.08.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.