ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 12, с. 1715–1718

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О КРАТНОМ СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2021 г. Е. И. Моисеев, Т. Е. Моисеев, Н. Ю. Капустин

Рассматривается задача для уравнения Бесселя целого порядка с комплексным физическим и спектральным параметрами в граничном условии. Спектральный параметр в граничное условие входит квадратично. Изучается вопрос базисности системы собственных функций.

DOI: 10.31857/S037406412112013X

В работе [1] рассмотрена спектральная задача для уравнения Бесселя нулевого порядка

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda U(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$U'(1) = d\lambda^2 U(1), \tag{2}$$

содержащим спектральный параметр λ и комплексный коэффициент d, $d \neq 0$. Предполагая ограниченность решения уравнения (1), получаем систему собственных функций

$$U_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

задачи (1), (2), отвечающих её собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$J_0'(\sqrt{\lambda}) = d(\sqrt{\lambda})^3 J_0(\sqrt{\lambda}). \tag{3}$$

Для всех собственных значений задачи (1), (2) считаем выполненным условие

$$-\pi/2 < \arg\sqrt{\lambda_n} \leqslant \pi/2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Через $\mathcal{R}_0$ обозначим множество корней трансцендентного уравнения

$$-4J_0(z)J_0'(z) = z[J_0^2(z) + (J_0'(z))^2]. \tag{4}$$

Доказано, что кратные корни уравнения (3) удовлетворяют также уравнению (4), и установлена базисность системы собственных функций задачи (1), (2) как в случае появления кратного корня, так и в случае, когда все собственные значения простые, а именно, получены следующие результаты (теоремы 1–3).

Теорема 1. *Пусть $d \notin \{J_0'(z)/(z^3 J_0(z)) : z \in \mathcal{R}_0\}$. Тогда система, полученная из системы $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, удалением любых двух функций, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Для системы $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$, где m, l – номера удалённых функций, биортогонально сопряжённая к ней система $\{\sqrt{r}V_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$ задаётся формулой*

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1}\left[J_0(\sqrt{\lambda_n}r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_l})}J_0(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_m})}J_0(\sqrt{\lambda_m}r)\right],$$

где

$$A_n = \int\limits_0^1 rJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}r)dr + 2d\lambda_n J_0^2(\sqrt{\lambda_n}) = \left(\frac{1+d^2\lambda_n^3}{2}\right)J_0^2(\sqrt{\lambda_n}) + 2d\lambda_n J_0^2(\sqrt{\lambda_n}).$$

Теорема 2. *Если $d = J_0'(z)/(z^3J_0(z))$, где $z \in \mathcal{R}_0$, то система $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N}\backslash\{l\}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, без одной функции, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$ (кратность для этой задачи всегда равна двум), образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая система $\{\sqrt{r}V_n(r)\}$ к этой системе определяется по формуле*

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1}\left[J_0(\sqrt{\lambda_n}r) - \frac{(\lambda_l-\lambda_n)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{J_0(\sqrt{\lambda_l})}Z_l(r) - \left(1 - \frac{(\lambda_l-\lambda_n)Z_l(1)}{J_0(\sqrt{\lambda_l})}\right)\frac{J_0(\sqrt{\lambda_n})}{J_0(\sqrt{\lambda_l})}J_0(\sqrt{\lambda_l}r)\right],$$

где $n \in \mathbb{N}\setminus\{l\}$ и

$$Z_l(r) = \frac{rJ_1(\sqrt{\lambda_l}r)}{2\sqrt{\lambda_l}}.$$

Теорема 3. *Если $d = J_0'(z)/(z^3J_0(z))$, где $z \in \mathcal{R}_0$, то система $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N}\setminus\{m\}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, без одной функции, соответствующей простому собственному значению λ_m, при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая система $\{\sqrt{r}V_n(r)\}$ к этой системе задаётся формулами*

$$\overline{V_l(r)} = A_l^{-1}\left[Z_l^\alpha(r) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{J_0(\sqrt{\lambda_m})}J_0(\sqrt{\lambda_m}r)\right],$$

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1}\left[J_0(\sqrt{\lambda_n}r) - \frac{(\lambda_n-\lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_l-\lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_l})}J_0(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_n-\lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_m-\lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_m})}J_0(\sqrt{\lambda_m}r)\right], \quad n \neq l,$$

где $n \in \mathbb{N}\setminus\{m\}$ и

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{rJ_1(\sqrt{\lambda_l}r)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha J_0(\sqrt{\lambda_l}r), \quad Z_l^\alpha(1) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_l})}{\lambda_l-\lambda_m},$$

$$A_l = \int\limits_0^1 rZ_l^\alpha(r)J_0(\sqrt{\lambda_l}r)dr + d(\lambda_l+\lambda_m)Z_l^\alpha(1)J_0(\sqrt{\lambda_l}).$$

Доказательства этих теорем проводятся по схемам, разработанным в статьях [2, 3], с использованием результатов работ [4, 5]. Построение биортогонально сопряжённых систем основывается в свою очередь на равенствах

$$\int\limits_0^1 rJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_k}r)dr + d(\lambda_n+\lambda_k)J_0(\sqrt{\lambda_n})J_0(\sqrt{\lambda_k}) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 rJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)Z_l(r)dr + d(\lambda_n+\lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_n})Z_l(1) - dJ_0(\sqrt{\lambda_n})J_0(\sqrt{\lambda_l}) = 0,$$

в которых λ_n, λ_k и λ_l – различные собственные значения задачи (1), (2), причём λ_l – кратный корень.

Функция $Z_l(r)$ – это присоединённая функция для собственной функции $U_l(r)$ с кратным собственным значением. Действительно, пусть $z \in \mathcal{R}_0$, $d = J_0'(z)/(z^3 J_0(z))$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим задачу для присоединённой функции

$$Z_l''(r) + \frac{1}{r} Z_l'(r) + \lambda Z_l(r) = U_l(r), \quad 0 < r < 1, \tag{5}$$

$$Z_l'(1) = d\lambda^2 Z_l(1) - 2d\lambda U_l(1). \tag{6}$$

Решением задачи (5), (6) в случае собственной функции $U_l(r) = J_0(\sqrt{\lambda_l} r)$ является корневая функция

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r J_1(\sqrt{\lambda_l} r)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha J_0(\sqrt{\lambda_l} r),$$

где α – любое комплексное число.

Задача (1), (2) имеет кратный корень при действительном значении параметра d. Это следует из того, что уравнение (4) имеет действительный корень.

В настоящей работе рассматриваем спектральную задачу для уравнения Бесселя целого порядка

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{7}$$

с граничным условием

$$R'(1) = d\lambda^2 R(1), \tag{8}$$

соответствующим условию (2). Через

$$R_k(r) = J_n(\sqrt{\lambda_k} r), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

обозначим систему собственных функций задачи (7), (8), отвечающих её собственным значениям λ_k – корням характеристического уравнения

$$J_n'(\sqrt{\lambda}) = d(\sqrt{\lambda})^3 J_n(\sqrt{\lambda}). \tag{9}$$

Для кратных корней уравнения (9) аналогично случаю $n = 0$ выводится уравнение

$$-4J_n(z)J_n'(z) + n^2 J_n^2(z) = z[J_n^2(z) + (J_n'(z))^2]. \tag{10}$$

Доказывается, что корни уравнения (10) простые при $n \neq 0$ (при $n = 0$ значение $z = 0$ – кратный корень). Действительно, условие для кратного корня уравнения (10) определяется равенством

$$(n^2 - z^2) J_n^2(z) + 3z^2 (J_n'(z))^2 = 0.$$

Множество корней уравнения (10) обозначим через $\mathcal{R}_n$.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть $d \notin \{J_n'(z)/(z^3 J_n(z)) : z \in \mathcal{R}_n\}$. Тогда система, полученная из системы $\{\sqrt{r} R_k(r) : k \in \mathbb{N}\}$ собственных функций задачи (7), (8), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, удалением любых двух функций, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Для системы $\{\sqrt{r} R_k(r) : k \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$, где m, l – номера удалённых функций, биортогонально сопряжённая к ней система $\{\sqrt{r} W_k(r) : k \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$ задаётся формулой*

$$\overline{W_k(r)} = A_k^{-1} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m) J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m) J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l) J_0(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l) J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m} r) \right],$$

где

$$A_k = \int_0^1 r J_n^2(\sqrt{\lambda_k} r) dr + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) = \left(\frac{1 + d^2\lambda_k^3}{2}\right) J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-51-18006 Болг-а, 18-29-10085 мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moiseev E.I., Moiseev T.E., Kapustin N.Yu.* On the multiple spectrum of a problem for the Bessel equation // Integral Transforms and Special Functions. 2020. V. 31. № 12. P. 1020–1024.
2. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1426–1430.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Капустин Н.Ю.* О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 701–706.
5. *Капустин Н.Ю.* О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 962–964.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.11.2021 г.
После доработки 22.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.