ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 147–152

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

# ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЫ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИЗОХРОННЫХ ЦЕНТРОВ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

© 2021 г. **В. В. Амелькин**

Рассматривается полиномиальная система Льенара $\dot{x}=-y,\ \ \dot{y}=x+A(x)-B(x)y$ в предположении, что вещественные полиномы $A(x),\ B(x)$ и производная $A'(x)$ удовлетворяют условиям $A(0)=B(0)=A'(0)=0$. Доказывается, что эта система имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр тогда и только тогда, когда полиномы $A(x)$ и $B(x)$ являются нечётными функциями и связаны между собой тождеством $x^3A(x)=(\int_0^x sB(s)\,ds)^2$.

DOI: 10.31857/S0374064121020011

Рассмотрим вещественное полиномиальное уравнение Льенара

$$\ddot{x}+B(x)\dot{x}+x+A(x)=0, \tag{1}$$

полиномы $A(x)$ и $B(x)$ в котором задаются равенствами

$$A(x)=\sum_{k=2}^{n}A_kx^k,\quad B(x)=\sum_{j=1}^{r}B_jx^j,\quad A_n\neq 0,\quad B(x)\not\equiv 0,$$

где $n\geqslant 3$ – нечётное число, $r\leqslant n-1$.

Уравнение (1) всесторонне изучалось и изучается с самых разных точек зрения. Обычный приём здесь – переход к эквивалентной ему двумерной автономной системе. Одной из таких систем является система Льенара в так называемой первой форме

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x+A(x)-B(x)y. \tag{2}$$

Другой является система [1]

$$\dot{x}=-y-x\Phi(x),\quad \dot{y}=x-y\Phi(x)+A(x)-x\Phi^2(x), \tag{3}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{x^2}\int\limits_0^x sB(s)\,ds.$$

Заметим, что система (2) переводится в систему (3) (с сохранением в последней обозначений для исходных фазовых переменных) заменой координат

$$u=x,\quad v=y-x\Phi(x).$$

Напомним, что центр $O(0,0)$ системы (2) (или, что то же самое, системы (3)) называется *изохронным*, если период обхода изображающей точкой каждого цикла из области этого центра равен $2\pi$.

В работах [2, 3] и [1, 4] в соответственно полиномиальном и голоморфном случаях доказано, что если функции $A(x)$ и $B(x)$ нечётные, то при условии

$$A(x)=\frac{1}{x^3}\biggl(\int\limits_0^x sB(s)\,ds\biggr)^2 \tag{4}$$

система (3) принимает вид

$$\dot{x} = -y - x\Phi(x), \quad \dot{y} = x - y\Phi(x), \tag{5}$$

и это условие является необходимым и достаточным условием изохронности центра $O(0,0)$ системы (2).

**Замечание.** Из вида системы (5) следует, что точка $O(0,0)$ является единственной конечной вещественной особой точкой этой системы и, следовательно, единственной особой точкой системы (2).

**Гипотеза** [2, 3] (см. также [4]). *Система (2) с полиномиальными функциями* $A(x)$ *и* $B(x)$ *имеет в особой точке* $O(0,0)$ *изохронный центр тогда и только тогда, когда выполняется равенство (4) и* $B(x)$ *– нечётная функция.*

Пусть далее $y^+$ и $y^-$ – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси $Oy$ прямоугольной декартовой системы координат $xOy$. Изохронный центр $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если дополнительно изображающая точка, выходящая из точки полуоси $y^+$, пересечёт полуось $y^-$ через время $\pi$.

Эквивалентным приведённому определению является следующее определение.

Центр $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$ $u = x$, $v = y - x\Phi(x)$ $(x = u,\ y = v + u\Phi(u))$ переводит систему (2) в систему $\dot{u} = -v - u\Phi(u)$, $\dot{v} = u - v\Phi(u)$.

Эквивалентность приведённых определений следует из работ [5, 6].

Отметим, что в работе [7, теорема 3.3.2] в голоморфном (полиномиальном) случае, а также в [6] в голоморфном и полиномиальном (замечание 1) случаях, доказано, что нечётность функции $B(x)$ и выполнение равенства (4) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система (2) имела в особой точке $O(0,0)$ сильно изохронный центр. Поэтому приведённую гипотезу можно переформулировать следующим образом: *изохронный центр* $O(0,0)$ *полиномиальной системы Льенара (2) является сильно изохронным центром.*

По поводу сформулированной гипотезы в работе [8], в частности, отмечается: “... имеются достаточно веские основания считать, если говорить о полиномиальных системах Льенара, что других случаев изохронности не существует, хотя этого пока никто не может доказать”.

Обращаясь к этой гипотезе, авторы работы [4] смогли доказать, используя систему REDUCE, её справедливость для полиномиальных систем Льенара с полиномами $A(x)$ и $B(x)$ степени не выше 34-й.

В настоящей работе получено полное доказательство приведённой гипотезы. Перейдём к его изложению.

В работе [9] в голоморфном случае системы Льенара доказано следующее утверждение: существует вещественная замена переменных

$$u = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k x^k,$$

переводящая систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + \sum_{k=2}^{\infty} A_k x^k - \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j x^j\right) y$$

в окрестности особой точки $O(0,0)$ в систему вида

$$\dot{u} = -\left(v + u\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\right)\left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\right)^{-1},$$

$$\dot{v} = \left(u - v\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\right)\left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Покажем, какие результаты можно получить, основываясь на приведённом утверждении, в случае полиномиальной системы (2), когда диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$ задаётся соотношениями

$$u = x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{n} \beta_k x^k. \tag{7}$$

Для этого, как и в голоморфном случае [9], будем использовать метод неопределённых коэффициентов. Сначала дифференцируем каждое из тождеств (7) по $t$ в силу системы (2), а затем полученные равенства приводим с учётом соотношений (6) и (7) к системе

$$y\bigg\{\sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1} + \sum_{s=2}^{\infty} H_s\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1} + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty} H_s\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1}\bigg\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s},$$

$$\sum_{k=2}^{n}(A_k - \alpha_k)x^k + \bigg(x + \sum_{k=2}^{n} A_k x^k\bigg)\sum_{s=2}^{\infty} H_s\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1} \equiv y\bigg\{\sum_{k=2}^{n}(B_{k-1} + k\beta_k)x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}(B_{k-1} + k\beta_k)x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty} H_s\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1}\bigg\}. \tag{8}$$

Далее, приравнивая к нулю в первом тождестве системы (8) коэффициенты при $yx^p$, получаем тождество

$$\sum_{s=2}^{\infty} H_s\bigg(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\bigg)^{s-1} \equiv -1 + \bigg(1 + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1}\bigg)^{-1}. \tag{9}$$

Так как отображение (7) – диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$, то по теореме о существовании обратной функции [10, с. 26] и по теореме о производной обратной функции [11, с. 74] заключаем, что справедливо неравенство

$$1 + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1} > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Следовательно, в правой части тождества (9) стоит рациональная функция, определённая на всём множестве $\mathbb{R}$. А значит, левая часть тождества (9) – это сходящийся степенной ряд, определяющий голоморфную на всём множестве $\mathbb{R}$ функцию. Теперь на основании (9), (10) и того, что радиусы сходимости степенного ряда с вещественными коэффициентами в вещественной и комплексной областях одинаковы (формула Коши–Адамара [12, с. 39; 13, с. 114]), приходим к выводу, что тождество (9) возможно лишь при выполнении условий

$$\alpha_k = 0, \quad H_s = 0 \quad \text{для всех} \quad k, s \geqslant 2. \tag{11}$$

Приравнивая к нулю в первом тождестве системы (8) коэффициенты при $x^p$, с учётом условий (11) получаем тождество

$$\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^s \equiv 0.$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\gamma_s = 0 \quad \text{при всех} \quad s > n \tag{12}$$

и

$$\gamma_{k-1} = -\beta_k, \quad k = \overline{2, n}. \tag{13}$$

Далее, приравнивая к нулю во втором тождестве системы (8) коэффициенты при $yx^p$, с учётом равенств (11)–(13) получаем, что

$$\beta_k = -\frac{B_{k-1}}{k+1}, \quad k = \overline{2, n}. \tag{14}$$

Из соотношений (11)–(14) следует, что диффеоморфизм (7) и система (6) принимают соответственно вид

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} x^{k-1} \tag{15}$$

и

$$\dot{u} = -v - u\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}. \tag{16}$$

Приравнивая к нулю во втором тождестве системы (8) коэффициенты при $x^p$, с учётом равенств (11)–(14) приходим к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1}\, x^k \sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} x^{s-1} \equiv 0,$$

или, равносильно, к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^{k-1} \equiv \left(\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} x^{s-1}\right)^2. \tag{17}$$

Предположим теперь, что точка $O(0,0)$ – изохронный центр системы (2). Тогда вследствие теоремы 5 из работы [9] и формул (13), (14) получаем, что имеют место равенства

$$B_{2l} = 0, \quad l = \overline{1, (n-1)/2}. \tag{18}$$

Поэтому соотношения (15) и (16) принимают соответственно следующий вид:

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} x^{2l-1} \tag{19}$$

и

$$\dot{u} = -v - u\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1} u^{2l-1}. \tag{20}$$

Но из тождества (17) вытекает, что полином $A(x)$ – нечётная функция, а значит, справедливы равенства

$$A_{2l} = 0, \quad l = \overline{1, (n-1)/2}. \tag{21}$$

Следовательно, с учётом равенств (18) и (21) тождество (17) запишется в виде

$$\sum_{l=1}^{(n-1)/2} A_{2l+1} x^{2l} \equiv \left(\sum_{s=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2s-1}}{2s+1} x^{2s-1}\right)^2. \tag{22}$$

Если обратиться теперь к формулировке гипотезы в предположении, что точка $O(0,0)$ системы (2) является изохронным центром, то тождество (22) (с нечётной функцией-полиномом $B(x)$) оказывается необходимым условием изохронности центра системы (2).

Покажем, что тождество (22) – это и достаточное условие для изохронности центра $O(0,0)$ системы (2).

Действительно, указанное тождество с нечётной функцией-полиномом $B(x)$ (а значит, с нечётным полиномом $A(x)$) эквивалентно условию (4). Но тогда, как показано, например, в работах [2, 3], точка $O(0,0)$ в системе (2) является изохронным центром.

Следовательно, справедлива

**Теорема 1.** *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронным центром, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (4) и полином $B(x)$ был нечётной функцией.*

Таким образом, сформулированная выше гипотеза имеет положительное решение.

Выясним вопрос о максимальной степени полинома $B(x)$ в тождестве (22). Для этого заметим, что в левой части тождества (22) максимальная степень полинома $A(x)$ равна $n-1$, а максимальная степень правой части указанного тождества равна $2r$, где $r$ – максимальная степень полинома $B(x)$. Поэтому имеет место равенство

$$r = \frac{n-1}{2}, \tag{23}$$

где

$$r = 2\rho - 1, \quad \rho \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

– нечётное число (в силу нечётности функции-полинома $B(x)$). Тогда, выражая $\rho$ из соотношений (23) и (24), заключаем, что максимальная степень полинома $B(x)$ определяется формулой (23) при выполнении условия $(n+1)/4 \in \mathbb{N}$, т.е. условия $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

Имея же в виду формулы (22)–(24), получаем, что

$$A_{2l+1} = \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k-1}}{2k+1}\frac{B_{2l-2k+1}}{2l-2k+3}, \quad l = \overline{1,(n-1)/2}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Следовательно, на основании теоремы 1, диффеоморфизма (7) на $\mathbb{R}^2$, представимого в единственном виде (19), и формулы (25) приходим к выводу, что справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.** *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ изохронный (а значит, и сильно изохронный) центр, необходимо и достаточно, чтобы между коэффициентами полиномов $A(x)$ и $B(x)$ имела место зависимость (25).*

**Теорема 3.** *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ изохронный (а значит, и сильно изохронный) центр, необходимо и достаточно существование вещественного преобразования*

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1}x^{2l-1}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N},$$

*переводящего систему (2) в систему*

$$\dot{u} = -v - u\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1}u^{2l-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{l=1}^{(n-1)/2} \frac{B_{2l-1}}{2l+1}u^{2l-1}, \quad (n+1)/4 \in \mathbb{N}.$$

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + x^3 + 2x^7 + x^{11} - (3x + 7x^5)y.$$

Для этой системы выполняются равенства

$$A_3 = \left(\frac{B_1}{3}\right)^2, \quad A_7 = 2\frac{B_1}{3}\frac{B_5}{7}, \quad A_{11} = \left(\frac{B_5}{7}\right)^2,$$

а значит, согласно теореме 2, её особая точка $O(0,0)$ является сильно изохронным центром. Поэтому по теореме 3 диффеоморфизм на $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \quad v = y - x^2 - x^6 \quad (x = u, \quad y = v + u^2 + u^6)$$

переводит исходную систему в систему

$$\dot{u} = -v - u(u + u^5), \quad \dot{v} = u - v(u + u^5).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 152. P. 467–487.
2. *Algaba A., Freire E., Gamero E.* Isochronicity via normal form. Preprint. Universidad de Sevilla, 1998.
3. *Algaba A., Freire E., Gamero E.* Isochronicity via normal form // Qual. Theory of Dynam. Systems. 2000. V. 1. № 2. P. 133–156.
4. *Christopher C., Devlin J.* On the classification of Liénard systems with amplitude-independent periods // J. Differ. Equat. 2004. V. 200. № 1. P. 1–17.
5. *Руденок А.Е.* Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
6. *Амелькин В.В.* Сильная изохронность системы Льенара // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 579–582.
7. *Руденок А.Е.* Некоторые применения нормальных форм в теории нелинейных дифференциальных уравнений на плоскости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1978.
8. *Волокитин Е.П., Иванов В.В.* Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 30–48.
9. *Амелькин В.В.* Об одной гипотезе в теории изохронных систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1283–1289.
10. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 1. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление. Минск, 2006.
11. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции вещественных переменных. М., 1972.
12. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 3. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям. Минск, 2006.
13. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. Минск, 2008.


Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.04.2020 г.
После доработки 17.04.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.