ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 153–161

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА НА ПРЯМОЙ

© 2021 г. А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

Изучается асимптотика спектра оператора Дирака на прямой с потенциалом из L_2. Показано, что спектр такого оператора лежит в симметричной относительно вещественной оси области комплексной плоскости, ограниченной графиком некоторой непрерывной вещественнозначной квадратично суммируемой функции. Для доказательства используется L_1-функциональное исчисление для самосопряжённых операторов и подходящее преобразование подобия.

DOI: 10.31857/S0374064121020023

Введение. Классический оператор Дирака связан с важными задачами математической физики и имеет многочисленные приложения. Истоки изучения этих задач можно найти в работах Биркгофа [1, 2], Тамаркина [3] и самого Дирака [4, 5]. Среди современных исследований, связанных с оператором Дирака, отметим, например, [6–12]; в них есть ссылки и на другие работы, в которых он также рассматривается. Отметим, что обычно одномерный оператор Дирака изучается на отрезке $[0,\omega]$ с теми или иными краевыми условиями. У такого оператора спектр дискретный, и его можно исследовать различными методами – например, резольвентным или методом подобных операторов. В настоящей работе изучаются спектральные свойства оператора Дирака на прямой; у такого оператора спектр дискретным не является.

Введём используемые в статье пространства функций и определим вид изучаемого оператора. Через $L_2(\mathbb{R})$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из классов эквивалентности, образованных равными между собой почти всюду по мере Лебега комплекснозначными функциями, определёнными на прямой $\mathbb{R}$, измеримыми по Лебегу и суммируемыми на $\mathbb{R}$ с квадратом модуля, скалярное произведение в котором задаётся равенством

$$(x,y)=\int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}\,dt, \quad x,y\in L_2(\mathbb{R}),$$

а через $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)\simeq L_2(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением

$$(x,y)=\int_{\mathbb{R}} (x_1(t)\overline{y_1(t)}+(x_2(t)\overline{y_2(t)})\,dt, \quad x=(x_1,x_2)\in\mathcal{H}, \quad y=(y_1,y_2)\in\mathcal{H}.$$

Через $W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ обозначаем пространство Соболева абсолютно непрерывных вектор-функций из $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$, производные которых также принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$, скалярное произведение в котором задаётся равенством

$$(x,y)_W=(x,y)+(x',y'), \quad x,y\in W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2).$$

Рассмотрим оператор Дирака L на прямой:

$$(Ly)(t)=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt}-v(t)y(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

где

$$v(t)=\begin{pmatrix}0&v_1(t)\\v_2(t)&0\end{pmatrix}, \quad v_i\in L_2(\mathbb{R}), \quad i=1,2, \quad D(L)=W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^2).$$

Представим оператор Дирака в виде $L=A-V$, где

$$A:D(L)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}, \quad (Ay)(t)=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt}$$

и

$$(Vy)(t) = v(t)y(t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1(t) \\ v_2(t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad y \in \mathcal{H}.$$

Отметим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с $\mathbb{R}$. Поэтому подходы, наиболее часто применяемые для изучения аналогичного оператора на отрезке, в настоящей работе неприменимы.

В дальнейшем оператор A играет роль невозмущённого оператора, а подчинённый ему оператор V – роль оператора возмущения.

Для оператора L доказывается существование непрерывной неотрицательной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ такой, что спектр $\sigma(L)$ оператора L находится между графиками функций f и $-f$; иными словами, выполняется неравенство $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant f(\mathrm{Re}\,\lambda)$ для любого $\lambda \in \sigma(L)$.

Для решения поставленной задачи сначала приводится результат о локализации спектра абстрактного самосопряжённого оператора, возмущённого оператором из идеала Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Также описывается алгоритм построения искомой функции f в этом случае и приводится пример для возмущённого оператора импульса на оси.

Так как возмущение V оператора Дирака не принадлежит идеалу Гильберта–Шмидта, то затем рассматривается преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, где B – подчинённый A оператор с дополнительными, выполненными для оператора V условиями, и $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Для доказательства соответствующих результатов используется спектральная теория банаховых модулей [13–17] и предварительное преобразование подобия метода подобных операторов [18–20]. Отметим, что приводимая схема доказательств совпадает с использованной в работе [17], в которой аналогичный результат получен для оператора с инволюцией. Однако, в отличие от [17], в настоящей работе рассмотрен абстрактный класс возмущённых операторов, для которых эта схема работает (см. п. 2), и показано, что оператор Дирака входит в этот класс (см. п. 3).

1. Теорема о локализации спектра для самосопряжённого возмущённого оператора. В этом и следующем пунктах работы $\mathcal{H}$ – абстрактное (комплексное) гильбертово пространство и $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – самосопряжённый оператор. Возмутим оператор A оператором B из двустороннего идеала операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Свойства этого идеала можно найти, например, в монографии [21].

Для операторов A и B можно доказать существование и указать алгоритм построения такой непрерывной действительной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, чтобы спектр $\sigma(A+B)$ оператора $A+B$ находился между графиками функций f и $-f$. Мы полагаем, что такой результат давно известен. Наш вариант доказательства можно найти в [17].

Теорема 1 [17, теорема 4.1]. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– самосопряжённый оператор и* $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. *Тогда существует такая непрерывная вещественнозначная функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *что для всех* $\lambda \in \sigma(A+B)$ *имеет место неравенство*

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant f(\mathrm{Re}\,\lambda).$$

Отметим, что в теореме 1 неважно, имеет ли оператор A дискретный спектр или нет.

Приведём алгоритм построения функции f, вытекающий из доказательства теоремы 1 в [17]. Обозначим через E_n спектральные проекторы оператора A, построенные по интервалам $[-n,n]$, и положим $B_n = B - E_n B E_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для построения (графика) функции f найдём точки с координатами $(\pm(1+2\|B\|_2), 2\|B\|_2)$, $(\pm(n+2\|B\|_2), 3\|B_n\|_2)$, $n \in \mathbb{N}$, и соединим их ломаной линией.

Пример. Пусть A – оператор импульса, $(Ax)(t) = tx(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $D(A) = \{x \in L_2(\mathbb{R}) : Ax \in \in L_2(\mathbb{R})\}$ и $Bx = (x,u)v$, где $u, v \in L_2(\mathbb{R})$ – фиксированные функции. Оператор B является интегральным с ядром $K(t,s) = v(t)\overline{u(s)}$, $t, s \in \mathbb{R}$, суммируемым с квадратом на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$.

Пусть $\Delta_n = [-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$. Введём в рассмотрение характеристическую функцию

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_n, \\ 0, & t \notin \Delta_n. \end{cases}$$

Тогда $E_n x = \chi_n x$, $x \in L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что

$$B_n x = (B - E_n B E_n)x = (x,u)v - (x,u_n)v_n = (x,u)(v - v_n) + (x, u - u_n)v_n =$$

$$= (x,u_n)(v - v_n) + (x, u - u_n)v,$$

где $u_n = \chi_n u$, $v_n = \chi_n v$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначая $\tilde{u}_n = u - u_n$ и $\tilde{v}_n = v - v_n$, имеем

$$\|B_n\| \leqslant \min\{\|\tilde{u}_n\|\|v\| + \|u_n\|\|\tilde{v}_n\|, \|\tilde{u}_n\|\|v_n\| + \|u\|\|\tilde{v}_n\|\} := b_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

при этом последовательность (b_n) принадлежит пространству ℓ_2.

Для построения функции f достаточно соединить точки с координатами

$$(\pm(1 + 2\|u\|\|v\|), 2\|u\|\|v\|), \quad (\pm(n + 2\|u\|\|v\|), 3b_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

ломаной линией.

2. Теорема о локализации спектра для возмущений, подчинённых оператору $\boldsymbol{A}$. Результат предыдущего пункта можно применить не только к самосопряжённым операторам, возмущённым операторами из идеала Гильберта–Шмидта. Например, это возможно, если существует преобразование подобия рассматриваемого оператора в оператор с возмущением из идеала Гильберта–Шмидта. В этом пункте будут получены условия, при которых такое преобразование имеет место.

Пусть $\operatorname{End}\mathcal{H}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначим векторное нормированное пространство линейных операторов, подчинённых оператору A. Оператор B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если $D(A) \subseteq D(B)$ и при некоторой постоянной C справедливо неравенство

$$\|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), \quad x \in D(A).$$

Норма в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ задаётся равенством

$$\|B\|_A = \{\inf C : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|)\}.$$

Так как резольвентное множество $\rho(A)$ рассматриваемого оператора A не пусто, то в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентные нормы, положив

$$\|B\|_\lambda = \|B(A - \lambda I)^{-1}\|, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Определение. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 или *сплетающим* оператором.

Далее через $L_1(\mathbb{R})$ обозначаем банахову алгебру, состоящую из классов эквивалентности, образованных равными между собой почти всюду по мере Лебега комплекснозначными функциями, определёнными на $\mathbb{R}$, измеримыми по Лебегу и суммируемыми на $\mathbb{R}$, со свёрткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - s)g(s)\, ds, \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

и нормой $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$. Через $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ будем обозначать банахову алгебру преобразований Фурье $\widehat{f}$ функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ с поточечным умножением функций в качестве операции и нормой

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|.$$

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f определяется формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

в частности, $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Преобразование Фурье стандартным образом определяется и для функций из $L_2(\mathbb{R})$, при этом имеет место равенство $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2(\mathbb{R})$.

Для построения преобразования подобия будут необходимы следующие функции из пространства $L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})$. Для $a > 0$ рассмотрим трапецевидную функцию τ_a, заданную условиями

$$\tau_a(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & |\varepsilon| \leqslant a, \\ a^{-1}(2a - |\varepsilon|), & a < |\varepsilon| \leqslant 2a, \\ 0, & |\varepsilon| > 2a. \end{cases}$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $\tau_a \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\tau_a\|_2 \leqslant 2\sqrt{2a/3}$. При этом $\tau_a = \widehat{\varphi}_a$, где

$$\varphi_a(t) = \frac{2\sin(3at/2)\sin(at/2)}{\pi a t^2}.$$

О других применениях функции τ_a см., например, [22].

Также рассмотрим функцию ω_a, заданную условиями

$$\omega_a(\varepsilon) = (1 - \tau_a(\varepsilon))/\varepsilon = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \leqslant a, \\ -a^{-1} - \varepsilon^{-1}, & -2a \leqslant \varepsilon < -a, \\ a^{-1} - \varepsilon^{-1}, & a < \varepsilon \leqslant 2a, \\ \varepsilon^{-1}, & |\varepsilon| > 2a. \end{cases}$$

Несложно видеть, что

$$\|\omega_a\|_2 = \sqrt{(4 - 4\ln 2)/a} \leqslant (1,11)/\sqrt{a}.$$

Пусть $\widehat{\psi}_a = \omega_a$. Нам далее также нужна будет оценка $\|\psi_a\|_\infty \leqslant 1 + 1/\pi$, полученная в [17].

Так как оператор A является самосопряжённым, то оператор iA является генератором некоторой сильно непрерывной группы операторов $T(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$, $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, согласно теореме Стоуна [23, с. 89]. Наряду с представлением T, введём в рассмотрение также представление $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathfrak{L}_A(\mathcal{H}))$, заданное формулой

$$\widetilde{T}(t)X = T(t)XT(-t), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ определим оператор $\widetilde{T}(f)X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ равенством

$$(\widetilde{T}(f)X)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(\widetilde{T}(-t)X)x\,dt, \quad x \in D(A). \tag{1}$$

В работе [17, § 4] показано, что имеет место

Лемма 1. *Для операторов* $\widetilde{T}(\varphi_a)X$ *и* $\widetilde{T}(\psi_a)X$, $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, $a > 0$, *верно равенство*

$$A(\widetilde{T}(\psi_a)X)x - (\widetilde{T}(\psi_a)X)Ax = Xx - (\widetilde{T}(\varphi_a)X)x, \quad x \in D(A). \tag{2}$$

Замечание 1. В лемме 1 вместо функций φ_a и ψ_a можно использовать любые другие функции $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\widehat{\varphi} \equiv 1$ в окрестности нуля и

$$\widehat{\psi}(\varepsilon) = (1 - \widehat{\varphi}(\varepsilon))/\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– самосопряжённый оператор и* $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. *Пусть также выполнены условия:*

1) $\widetilde{T}(\psi_a)B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *и существует такое* $a > 0$, *что* $\|\widetilde{T}(\psi_a)B\| < 1$;

2) $(\widetilde{T}(\psi_a)B)D(A) \subset D(A)$;

3) $B\widetilde{T}(\psi_a)B + \widetilde{T}(\varphi_a)B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

4) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \rho(A)$ *такое, что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - B_0$, *где*

$$B_0 = \widetilde{T}(\varphi_a)B + (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B - (\widetilde{T}(\varphi_a)B)\widetilde{T}(\varphi_a)B) =$$

$$= (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B + \widetilde{T}(\varphi_a)B). \tag{3}$$

При этом справедливо включение $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *и преобразование подобия оператора* $A - B$ *в* $A - B_0$ *осуществляет обратимый оператор* $I + \widetilde{T}(\psi_a)B$.

Доказательство. Из условия 1) вытекает обратимость оператора $I + \widetilde{T}(\psi_a)B$, т.е. ограниченность оператора $(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}$.

Отметим, что

$$D(A - B) = D(A - B_0) = D(A).$$

Для доказательства подобия нам надо сначала установить равенство

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}D(A) = D(A).$$

Действительно, для $\lambda \in \rho(A)$ имеем

$$\widetilde{T}(\psi_a)B(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}((A - \lambda I)\widetilde{T}(\psi_a)B(A - \lambda I)^{-1}) =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}(B - \widetilde{T}(\varphi_a)B + \widetilde{T}(\psi_a)BA - \lambda\widetilde{T}(\psi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}((B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\psi_a)B)^n(A - \lambda I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda I)^{-1}((B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)^n.$$

В силу условия 4) можно выбрать такое число $\lambda \in \rho(A)$, что

$$\|(B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B\| < 1.$$

Поскольку

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}(I + (B - \widetilde{T}(\varphi_a)B)(A - \lambda I)^{-1} + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1},$$

то

$$(I + \widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}D(A) \subseteq D(A).$$

Обратное включение следует из условия 2). Таким образом, операторы определены корректно, а их области определения согласованы.

Теперь нам надо установить равенство

$$(A - B)(I + \widetilde{T}(\psi_a)B) = (I + \widetilde{T}(\psi_a)B)(A - B_0). \tag{4}$$

Рассмотрим каждую из частей равенства (4) отдельно. При этом учтём равенства (2), (3) и согласованность областей определения. Тогда

$$(A-B)(I+\widetilde{T}(\psi_a)B) = A-B+A\widetilde{T}(\psi_a)B - B\widetilde{T}(\psi_a)B =$$

$$= A - B\widetilde{T}(\psi_a)B + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B;$$

$$(I+\widetilde{T}(\psi_a)B)(A-\widetilde{T}(\varphi_a)B - (I+\widetilde{T}(\psi_a)B)^{-1}(B\widetilde{T}(\psi_a)B - (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B))) =$$

$$= A + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B - (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B) - B\widetilde{T}(\psi_a)B +$$

$$+ (\widetilde{T}(\psi_a)B)(\widetilde{T}(\varphi_a)B) = A + (\widetilde{T}(\psi_a)B)A - \widetilde{T}(\varphi_a)B - B\widetilde{T}(\psi_a)B.$$

Таким образом, равенство (4) имеет место. Теорема доказана.

Итак, в теореме 2 записаны условия, при выполнении которых оператор $A-B$ с $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ подобен оператору $A-B_0$ с $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Важно отметить, что помимо использованного выше преобразования подобия подойдёт и любое другое преобразование подобия, переводящее оператор $A-B$, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, в оператор $A-B_0$, $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Мы использовали приведённое выше преобразование, так как оно представляет собой хорошо известное и опробованное предварительное преобразование подобия метода подобных операторов (см. [7; 18–20; 24]).

Из теорем 1 и 2 очевидно следует

Теорема 3. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – самосопряжённый оператор, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и для оператора B выполнены условия 1)–4) теоремы 2. Тогда существует такая непрерывная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой при всех $\lambda \in \sigma(A-B)$ имеет место неравенство*

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant f(\mathrm{Re}\,\lambda).$$

3. Спектральный анализ оператора Дирака. В этом пункте будет показано, что теорема 3 применима для операторов Дирака, рассматриваемых в этой работе. Для этого достаточно проверить выполнение условий теоремы 2, которые позволяют осуществить преобразование подобия оператора $A-V$ в оператор $A-V_0$, где $V_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Оператор iA является генератором группы изометрий $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ вида

$$T(t)x = \begin{pmatrix} S(-t)x_1 \\ S(t)x_2 \end{pmatrix},$$

где $S(t)$ – оператор сдвига аргумента функций из $L_2(\mathbb{R})$ на число $t \in \mathbb{R}$, т.е. $S(t)x = x(\cdot + t)$, $x \in L_2(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. *Для всякой функции $f \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$\|\widetilde{T}(f)V\|_2 = \|f\|_2 \|V\|_2.$$

Доказательство. Для $f \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ верны равенства

$$(\widetilde{T}(f)V)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)VT(t)x(s)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} f(t)v_1(s+t)x_2(s+2t) \\ f(t)v_2(s-t)x_1(s-2t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 & f((\tau-s)/2)v_1((\tau+s)/2) \\ f((s-\tau)/2)v_2((\tau+s)/2)\,d\tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Здесь использовались замены переменных $s+2t=\tau$ и $s-2t=\tau$. Таким образом, $\widetilde{T}(f)V$ является интегральным оператором с ядром

$$K(\tau,s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & f((\tau-s)/2)v_1((\tau+s)/2) \\ f((s-\tau)/2)v_2((\tau+s)/2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau, s \in \mathbb{R}.$$

Ядро K суммируемо с квадратом, так как после обратной замены переменных имеем

$$\|K\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \|K(t,s)\|_2^2\,dt\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^2(|v_1(s+t)|^2 + |v_2(s-t)|^2)\,dt\,ds =$$

$$= \|f\|_2^2(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2) = \|f\|_2^2\|V\|_2^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Оператор V обладает следующими свойствами:*

1) $\widetilde{T}(\varphi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\|\widetilde{T}(\varphi_a)V\|_2^2 \leqslant 4a(3\pi)^{-1}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2)$;

2) $\widetilde{T}(\psi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\|\widetilde{T}(\psi_a)V\|_2^2 \leqslant 2(1-\ln 2)(a\pi)^{-1}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2)$;

3) $\widetilde{T}(\psi_a)V(W_2^1(\mathbb{R})) \subset W_2^1(\mathbb{R})$;

4) $P(\widetilde{T}(\psi_a))V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *и* $\|V(\widetilde{T}(\psi_a))V\|_2^2 \leqslant 2(\pi+1)^2\pi^{-2}\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2$;

5) для всякого $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *такое, что* $\|P(\lambda_\varepsilon I - A)^{-1}\| < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из леммы 2 и оценок норм функций ψ_a и φ_a соответственно.

Пусть $R = R(z,A) = (zI - A)^{-1}$ для некоторого $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Из [17, формула (4.5)] следует равенство

$$Rx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_z(t)T(-t)x\,dt, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

где $\widehat{f_z}(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$. Используя это равенство и определение (1), для всякой функции $h \in L_1$ получаем

$$(\widetilde{T}(h)V)Rx = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} h(t)f_z(s)T(-t)VT(t-s)x\,ds\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f_z(s)h(t+s)T(-t-s)VT(t)x\,dt\,ds = R(\widetilde{T}(h_t)V)x,$$

где $h_t(s) = h(t+s)$. Таким образом, утверждение 3) справедливо.

Непосредственным подсчётом нетрудно убедиться, что оператор $V\widetilde{T}(\psi_a)V$ имеет вид

$$((V\widetilde{T}(\psi_a)V)x)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} v_1(s)\psi_a(\tau)v_2(s-\tau) & 0 \\ 0 & v_2(s)\psi_a(\tau)v_1(s+\tau)\end{pmatrix} x(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому $V\widetilde{T}(\psi_a)V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и выполняется неравенство

$$\|V\widetilde{T}(\psi_a)V\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |v_1(s)\psi_a(\tau)v_2(s-\tau)|^2 + |v_2(s)\psi_a(\tau)v_1(s-\tau)|^2\,d\tau\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\psi_a\|_\infty^2\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2 \leqslant 2\Big(\frac{\pi+1}{\pi}\Big)^2\|v_1\|_2^2\|v_2\|_2^2.$$

Переходим к доказательству утверждения 5). Из равенства (5) (см. также [23, гл. II, формула (1.14)]) следует, что

$$R = R(z,A) = i\int\limits_0^\infty e^{izt}T(t)x\,dt, \quad x \in \mathcal{H}, \quad z \in \rho(A).$$

Тогда

$$VRx = i\int\limits_0^\infty e^{izt}\begin{pmatrix} v_1(s)x(s+t) \\ v_2(s)x(s-t)\end{pmatrix}dt.$$

Интегральный оператор VR принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и его ядро K_{VR} допускает оценку

$$\|K_{VR}\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2|z|}(\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Таким образом, справедливость утверждения 5) обеспечивается за счёт подходящего выбора числа z. Лемма доказана.

Из леммы 3 немедленно вытекает

Лемма 4. *Оператор* $A - V$ *удовлетворяет всем условиям теоремы 2 для некоторого* $a > 0$.

И, наконец, для оператора $L = A - V$ имеет место

Теорема 4. *Существует такая непрерывная функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, *что для всех* $\lambda \in \sigma(L)$ *имеет место неравенство* $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant f(\mathrm{Re}\,\lambda)$.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что существует такое $a > 0$, что оператор L подобен оператору $A - V_0$, где оператор $V_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определяется формулой, аналогичной (3). К оператору $A - V_0$ можно применить метод подобных операторов и получить подобие операторов $A - V_0$ и $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$, где $\widetilde{T}(\varphi_a)X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а X – решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Оператором преобразования оператора $A - V_0$ в оператор $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$ является оператор

$$U = I + \widetilde{T}(\psi_a)X.$$

Преимущество оператора $A - \widetilde{T}(\varphi_a)X$ перед оператором $A - V_0$ заключается в том, что отображение $t \mapsto \widetilde{T}(t)(\widetilde{T}(\varphi_a)X)$ является сужением целой функции экспоненциального типа.

Замечание 3. Аналогичный результат имеет место [17] и для оператора с инволюцией $-id/dt - V$, где $(Vx)(t) = v(t)x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in L_2(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G.D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 4. P. 373–395.
2. *Birkhoff G.D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. № 2. P. 219–231.
3. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zeitschr. 1928. Bd 27. H. 1. S. 1–54.
4. *Dirac P.A.M.* The quantum theory of the electron. I // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
5. *Dirac P.A.M.* The quantum theory of the electron. II // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1928. V. 118. P. 351–361.
6. *Djakov P., Mityagin B.S.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359–398.
7. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряжённого оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
8. *Джаков П., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
9. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777–810.
10. *Савчук А.М.* О базисности системы собственных и присоединённых функций одномерного оператора Дирака // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 113–139.
11. *Бурлуцкая М.Ш.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Журн. вычислит. математики и мат. физ. 2019. Т. 59. № 3. С. 380–390.
12. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* General Dirac operators as generators of operator groups // arXiv: 1806.10831.

13. *Loomis L.H.* An Introduction of Abstract Harmonic Analysis. Toronto; New York; London, 1963.
14. *Reiter H., Stegeman J.D.* Classical harmonic analysis and locally compact groups // London Math. Soc. Monographs. V. 22. Oxford, 2000.
15. *Баскаков А.Г., Криштал И.А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. № 3. С. 3–54.
16. *Baskakov A.G., Krishtal I.A.* Memory estimation of inverse operators // J. Funct. Anal. 2014. V. 267. P. 2551–2605.
17. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 492. № 2. P. 124473.
18. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 477. P. 930–960.
19. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group // Oper. Matr. 2018. V. 12. № 3. P. 723–756.
20. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
21. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
22. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. М., 1953.
23. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
24. *Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц // Прикл. математика и физика. 2020. Т. 52. № 2. С. 71–85.

Воронежский государственный университет,
Северо-Осетинский государственный университет
им. К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ,
Университет Северного Иллинойса,
г. Де-Калб, Иллинойс, США,
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
После доработки 18.08.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.