ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 162–168

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

О КОНЕЧНОСТИ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ СТАНДАРТНЫМИ И ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

© 2021 г. М. М. Васьковский, А. А. Карпович

Доказано, что сильные решения стохастического дифференциального уравнения смешанного типа, управляемого стандартным и дробным с индексом Хёрста, большим $1/2$, броуновскими движениями, имеют конечные моменты порядка $p\geqslant 1$ в предположении, что коэффициенты уравнения непрерывны и ограничены вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно, а начальное условие имеет конечный момент порядка p.

DOI: 10.31857/S0374064121020035

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t=b(X_t)\,dt+h(X_t)\,dW_t+\sigma(X_t)\,dB_t^H,\quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$, $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times k}$ – детерминированные функции, а W_t и B_t^H – независимые $\mathcal{F}_t$-согласованные броуновские движения: m-мерное стандартное и k-мерное дробное с показателем Хёрста $H\in(1/2,1)$ соответственно.

Стохастические дифференциальные уравнения со стандартными и дробными броуновскими движениями вызывают большой интерес исследователей как с теоретической точки зрения, так и с практической стороны. Уравнение (1) объединяет два принципиально различных класса стохастических уравнений: стохастические дифференциальные уравнения Ито и стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, выходящие за рамки теории стохастических уравнений по семимартингалам. Уравнение (1) представляет универсальный инструмент для построения гибких математических моделей реальных физических явлений, экономических и финансовых процессов благодаря возможности учитывать эффект долговременной памяти [1, 2].

В работах [3–12] доказаны теоремы о существовании, единственности, непрерывной зависимости решений от начальных данных, об устойчивости и притяжении решений, построены методы интегрирования уравнений (1). Важное значение при исследовании общих и асимптотических свойств решений уравнения (1) имеют оценки моментов решений уравнений (1). Тем не менее, вопрос о конечности моментов решений таких уравнений в общем случае остаётся открытым.

В статье [13] доказано, что ограниченность правых частей уравнения (1) с $h=0$ влечёт за собой конечность моментов решений. Наличие слагаемого $h(X_t)\,dW_t$ в уравнении (1) не позволяет применять потраекторные методы статьи [13] для оценки моментов решений уравнения (1), поскольку сумма показателей Гёльдера траекторий процессов X_t и W_t меньше единицы. Эффективные потраекторные методы исследования свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с нерегулярными возмущениями разработаны в работах Т. Лайонса [14], М. Губинелли [15], М. Хайрера [16] и других математиков. Совокупность этих методов получила название теории грубых траекторий. Следуя работам [17–19], мы рассматриваем уравнение (1) в контексте теории грубых траекторий: для уравнения (1) строим соответствующее уравнение в грубых траекториях и доказываем потраекторные оценки для решений построенного уравнения, при этом ключевую роль при переходе от уравнения в грубых траекториях к исходному уравнению (1) играет свойство согласованности решений с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, а также конечность моментов от гёльдеровских норм процессов W_t и B_t^H.

Основным результатом настоящей работы является теорема 2, гарантирующая конечность моментов всех порядков от гёльдеровских норм решений уравнений (1) в предположении, что коэффициенты уравнения достаточно гладкие и ограниченные.

Определение 1. *Сильным решением* уравнения (1) называется $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс X_t такой, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(X_s)ds + \int\limits_0^t h(X_s)\,dW_s + \int\limits_0^t \sigma(X_s)\,dB_s^H,$$

где интеграл по W_s – интеграл Ито, а интеграл по B_s^H – потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса [20]. Сильное решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$, где ξ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, называется *единственным*, если для любого сильного решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется условие $P(X_t = Y_t$ для всех $t \in [0,T]) = 1$.

Пусть $d = 1+m+k$. Определим d-мерный случайный процесс $B_t = (t, W_t, B_t^H)$. Обозначим через H_i показатели Хёрста его компонент $B_t^{(i)}$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = \ldots = H_{m+1} = 1/2$, $H_{m+2} = \ldots = H_d = H$.

Зафиксируем произвольное $\alpha \in (1/3, 1/2)$. Полагая $f = \mathrm{col}\,(b,h,\sigma)$, рассмотрим уравнение

$$dX_t = f(X_t)\,dB_t, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Для прозвольного случайного процесса Y_t, $t \in [0,T]$, через $Y_{s,t}$ будем обозначать приращение процесса Y, т.е. $Y_{s,t} = Y_t - Y_s$.

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t} = B_{t_{l-1}^m} + (t - t_{l-1}^m)B_{t_{l-1}^m, t_l^m}; \quad t \in [t_{l-1}^m, t_l^m); \quad l = \overline{1, 2^m}; \quad t_l^m = Tl/2^m.$$

Построим процесс второго порядка $\mathbb{B} : [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ следующим образом: если $i \neq j$ или $H_i \neq 1/2$, то полагаем

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB_{m,r}^{(i)}\,dB_{m,\tau}^{(j)}; \tag{3}$$

если $H_i = 1/2$, то

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB_r^{(i)}\,dB_\tau^{(i)}, \tag{4}$$

где интегралы в правой части соотношения (3) понимаются как потраекторные интегралы Римана–Стилтьеса, а интегралы в правой части равенства (4) – как интегралы Ито. Существование предела п.н. в соотношении (3) вытекает из результатов работы [21]. Нетрудно видеть, что определённый выше процесс $\mathbb{B}$ удовлетворяет тождеству Чена

$$\mathbb{B}_{s,t} - \mathbb{B}_{s,u} - \mathbb{B}_{u,t} = B_{s,u} \bigotimes B_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$. Таким образом, для любых $s,t \in [0,T]$ имеет место равенство

$$(1, B_t, \mathbb{B}_{0,t}) = (1, B_s, \mathbb{B}_{0,s}) \boxplus (1, B_{s,t}, \mathbb{B}_{s,t}), \tag{5}$$

где через $\boxplus$ обозначена операция группы Ли $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d) = \{(1,b,c) : b \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}^{d\times d}\}$, определяемая для элементов (a,b,c), $(a',b',c') \in T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ правилом:

$$(a,b,c) \boxplus (a',b',c') = (aa', ab' + a'b, ac' + a'c + b \bigotimes b').$$

Траектории процесса $\mathbf{B}_t = (B_t, \mathbb{B}_{0,t})$ п.н. принадлежат множеству $\mathscr{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий [16, гл. 2].

Пусть V – некоторое евклидово пространство. Будем говорить, что процесс Y_t, траектории которого п.н. принадлежат классу $C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V))$ α-непрерывных по Гёльдеру отображений, *управляется процессом* B_t, если существует процесс Y'_t (производная Губинелли от Y_t) такой, что его траектории п.н. принадлежат классу $C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)))$, а остаточный член $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s B_{s,t}$ удовлетворяет п.н. условию

$$|R^Y|_{2\alpha} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$$

Для процесса Y_t, управляемого процессом B_t, определим полунорму $\mathcal{N}(Y)$ его траекторий равенством

$$\mathcal{N}(Y) = \sup_{t\in[0,T]} |Y'_t| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}| + |Y'_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + |R^Y|_{2\alpha},$$

а гёльдеровскую норму $\|Y\|_\alpha$ для них зададим соотношением

$$\|Y\|_\alpha = \sup_{t\in[0,T]} |Y_t| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}.$$

Пусть процесс Y_t управляется процессом B_t. Потраекторным интегралом Губинелли от Y по грубой траектории $\mathbf{B}$ называется следующий предел интегральных сумм (в предположении, что этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[0,T]$ точками t_i):

$$\int_0^T Y_r\, d\mathbf{B}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} B_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max\limits_i (t_{i+1} - t_i)$ – диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots t_l = T\}$, а произведение $Y'_{t_i}\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}$ определено корректно в силу изоморфизма $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d},V)$. Кроме того, вследствие соотношения (5) элемент $(B_{t_i,t_{i+1}}, \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$ можно интерпретировать как приращение процесса $\mathbf{B}_t$.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим соответствующее уравнение в грубых траекториях

$$dX_t = f(X_t)\, d\mathbf{B}_t, \quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Определение 2. *Решением* уравнения (6) будем называть случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, такой, что п.н. выполняются условия: 1) $X \in C^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$; 2) процессы X_t и $f(X_t)$ управляются процессом B_t; 3) для любого $t\in[0,T]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\, d\mathbf{B}_s,$$

где интеграл в правой части – потраекторный интеграл Губинелли, при этом $X'_t = f(X_t)$, $(f(X_t))' = Df(X_t)f(X_t)$. Пусть $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (6) с начальным условием $X_0 = \xi$ называется *единственным*, если для любого решения Y_t уравнения (6) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t$ для всех $t\in[0,T]) = 1$. Решение X_t уравнения (6) будем называть *сильным*, если процесс X_t является $\mathcal{F}_t$-согласованным.

Обозначим через $C_b^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$ класс функций $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, непрерывных и ограниченных вместе со своими частными производными до порядка k включительно.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$, $p \geqslant 1$. *Тогда для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* ξ *существует единственное сильное решение* X_t *уравнения (6) с начальным условием* $X_0 = \xi$. *Кроме того, если* $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, *то* $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.

Доказательство. Из теоремы 8.4 [16] вытекает, что для почти всех $\omega \in \Omega$ существует единственное отображение $t \mapsto X_t(\omega)$ такое, что п.н. выполняются следующие условия: 1) отображение $t \mapsto X_t(\omega)$ принадлежит классу $C^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$; 2) отображения $t \mapsto X_t(\omega)$ и $t \mapsto f(X_t(\omega))$ управляются функцией $t \mapsto B_t(\omega)$, и имеют место равенства $X_t'(\omega) = f(X_t(\omega))$, $(f(X_t(\omega)))' = Df(X_t(\omega))f(X_t(\omega))$; 3) $X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t f(X_s(\omega))\,d\mathbf{B}_s(\omega)$.

Определим процесс второго порядка $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}$ следующим образом: $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}^{(i,j)} = \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$ при $i \neq j$ или $H_i \neq 1/2$; $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}^{(i,i)} = \mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} + (t-s)/2$ при $H_i = 1/2$. Согласно теореме 10.4 [16] траектории процесса $\widetilde{\mathbf{B}}_t = (B_t, \widetilde{\mathbb{B}}_{0,t})$ п.н. принадлежат множеству $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ α-непрерывных по Гёльдеру геометрических грубых траекторий [16, гл. 2].

Используя аналог формулы корректирующего члена Ито–Стратоновича [16, с. 59], для п.в. ω и всех $t \in [0,T]$ получаем следующее равенство:

$$\int\limits_0^t f(X_s(\omega))\,d\mathbf{B}_s(\omega) = \int\limits_0^t f(X_s(\omega))d\widetilde{\mathbf{B}}_s(\omega) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t Dh(X_s(\omega))h(X_s(\omega))\,ds,$$

из которого вытекает, что для п.в. $\omega \in \Omega$ выполняется соотношение

$$X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int\limits_0^t \widetilde{f}(X_t(\omega))\,d\widetilde{\mathbf{B}}_t(\omega), \quad t \in [0,T],$$

здесь $\widetilde{f} = \operatorname{col}(b - 2^{-1}Dh\cdot h, h, \sigma)$. Для каждого натурального m определим сглаженную грубую траекторию $\mathbf{B}_{m,t} = (B_{m,t}, \mathbb{B}_{m,t})$, где

$$\mathbb{B}_{m,t} = \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau dB_{m,r} \bigotimes dB_{m,\tau},$$

а интегралы в правой части понимаются как потраекторные интегралы Римана–Стилтьеса. Тогда для любого натурального m уравнение

$$dX_t = \widetilde{f}(X_t)\,d\mathbf{B}_{m,t}, \quad t \in [0,T],$$

имеет единственное сильное решение $X_{m,t}$ с начальным условием $X_{m,0} = \xi$. Согласно [21] и [16, с. 142] последовательность $\mathbf{B}_{m,t}$ сходится п.н. к геометрической грубой траектории $\widetilde{\mathbf{B}}_t$ в метрике p-вариации при любом $p > 1/H$. Отсюда и из теоремы Лайонса [14, 21] вытекает, что последовательность $X_{m,t}$ сходится п.н. в метрике p-вариации к некоторому случайному процессу $\widetilde{X}_t$. Так как $\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$, то, применяя теорему 8.4 [16] к уравнению $dX_t = \widetilde{f}(X_t)\,d\widetilde{\mathbf{B}}_t$, заключаем, что $P(X_t = \widetilde{X}_t$ для всех $t \in [0,T]) = 1$.

Докажем, что решение X_t уравнения (6) с начальным условием $X_0 = \xi$ является сильным решением. Из определения кусочно-линейных аппроксимаций $B_{m,t}$ вытекает, что при каждом натуральном m процесс $X_{m,t}$ является $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-согласованным, где $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+1/2^m}$. В силу непрерывности справа семейства σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ заключаем, что при каждом $t \in [0,T]$ случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой.

Предположим, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$. Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ множество всех $\omega \in \Omega$, при которых для процесса X_t выполнены условия 1)–3) определения 2. Зафиксируем какое-нибудь $\omega \in \widetilde{\Omega}$. Выберем некоторые постоянные $\tau \in (0,1)$, $M > 0$ (вообще говоря, зависящие от ω;

значения этих постоянных уточним ниже). Возьмём произвольный отрезок $[a, a+\tau] \subset [0, T]$. На множестве $\mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n)$ α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий Z с начальным условием $Z_a = X_a(\omega)$ и управляемых функцией $t \mapsto B_t(\omega)$ рассмотрим шар D_M^a радиуса M, т.е.

$$D_M^a = \{Z \in \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n) | Z_a = X_a(\omega), \mathcal{N}(Z) \leqslant M\}.$$

Нетрудно видеть, что полунорма $\mathcal{N}(\cdot)$ является нормой на шаре D_M^a, превращая этот шар в полное метрическое пространство [16, гл. 8; 22]. Отображение

$$\mathcal{J} : \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}^\alpha([a, a+\tau], \mathbb{R}^n)$$

определим следующим образом:

$$(\mathcal{J}(Z))_t = Z_a + \int\limits_a^t f(Z_s)\, d\mathbf{B}_s(\omega), \quad t \in [a, a+\tau].$$

Пусть $Z, \widetilde{Z}, \bar{Z} \in D_M^a$, тогда из предложений 3.9, 3.10 [22] и доказательства теоремы 8.4 [16] вытекают следующие неравенства:

$$\mathcal{N}(\mathcal{J}(Z)) \leqslant c_B(\omega) c_f (1 + \tau^{\gamma-\alpha} \mathcal{N}^2(Z)), \tag{7}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{J}(\widetilde{Z}) - \mathcal{J}(\bar{Z})) \leqslant c_B^2(\omega) c_f^2 \tau^{\gamma-\alpha} \mathcal{N}(\widetilde{Z} - \bar{Z}), \tag{8}$$

где

$$c_B(\omega) = c\Bigg(\sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \bigg(\frac{|B_{s,t}(\omega)|}{|t-s|^\gamma} + \frac{|\mathbb{B}_{s,t}(\omega)|}{|t-s|^{2\gamma}}\bigg)\Bigg) \vee 1,$$

$\gamma \in (\alpha, 1/2)$, c и $c_f \geqslant 1$ – универсальные детерминированные постоянные.

Положим $\tau = (8c_B^2(\omega)c_f^2)^{1/(\alpha-\gamma)}$. Несложно видеть, что при выбранном значении τ существует такое $M = (4 - 2\sqrt{2})c_B(\omega)c_f$, при котором выполняется неравенство

$$c_B(\omega) c_f (1 + \tau^{\gamma-\alpha} M^2) \leqslant M. \tag{9}$$

Таким образом, из соотношений (7)–(9) вытекает, что $\mathcal{J}(D_M^a) \subseteq D_M^a$ и отображение $\mathcal{J}$ является сжимающим в шаре D_M^a. Следовательно, существует единственная неподвижная точка отображения $\mathcal{J}$ в шаре D_M^a, которая совпадает с траекторией $X|_{[a,a+\tau]}(\omega)$. Таким образом, справедлива оценка

$$\mathcal{N}(X|_{[a,a+\tau]}(\omega)) \leqslant (4 - 2\sqrt{2}) c_B(\omega) c_f. \tag{10}$$

Применяя неравенство треугольника и оценку (10) при $a = 0, \tau, 2\tau, \ldots,$ получаем неравенство

$$\mathcal{N}(X|_{[0,T]}(\omega)) \leqslant (4 - 2\sqrt{2}) c_B(\omega) c_f (T\tau^{-1} + 1) = C(c_B(\omega))^{1+2/(\gamma-\alpha)}, \tag{11}$$

где C – универсальная детерминированная постоянная, зависящая лишь от f, T.

Поскольку случайная величина c_B имеет конечные моменты любого порядка $p \geqslant 1$ [16, гл. 10], то из неравенства (11) и конечности величины $\mathbb{E}(|X_0|^p)$ вытекает, что $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функции b, h, σ непрерывны и ограничены вместе со своими производными до четвёртого порядка включительно. Тогда для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ такой, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, существует единственное сильное решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$, и для любого $\alpha \in (1/3, 1/2)$ выполняется неравенство $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.*

Доказательство. Зафиксируем произольные $p \geqslant 1$, $\alpha \in (\max\{1/3, 1-H\}, 1/2)$ и $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину ξ такую, что $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$. Согласно теореме 1 существует единственное сильное решение X_t уравнения (6) с правой частью $f = \mathrm{col}\,(b, h, \sigma)$ и начальным условием $X_0 = \xi$.

Так как почти все траектории процессов W_t и B_t^H непрерывны по Гёльдеру с показателями $1/2 - \varepsilon$ и $H - \varepsilon$ соответственно, где ε – произвольное малое положительное число, то с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ выполнены соотношения

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t f(X_s)\, d\mathbf{B}_s = \xi + \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}}) =$$

$$= \xi + \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (b(X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + h(X_{t_i}) W_{t_i, t_{i+1}} + \sigma(X_{t_i}) B^H_{t_i, t_{i+1}} + Dh(X_{t_i}) h(X_{t_i}) \mathbb{W}_{t_i, t_{i+1}}),$$

где $\mathbb{W}_{0,t} = \int_0^t \int_0^\tau dW_r \bigotimes dW_\tau$ – процесс второго порядка Ито, а $\mathcal{P}$ – произвольное конечное разбиение отрезка $[0, t]$ точками t_i.

Поскольку почти все траектории процесса X_t непрерывны по Гёльдеру с показателем $\alpha > 1 - H$, то с вероятностью 1 справедливы равенства

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} b(X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = \int\limits_0^t b(X_s) ds, \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \sigma(X_{t_i}) B^H_{t_i, t_{i+1}} = \int\limits_0^t \sigma(X_s)\, dB_s^H, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Так как процесс X_t является $\mathcal{F}_t$-согласованным, то имеет место сходимость в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} h(X_{t_i}) W_{t_i, t_{i+1}} = \int\limits_0^t h(X_s)\, dW_s, \quad t \in [0, T]. \tag{14}$$

Определим дискретный мартингал S_k рекуррентным образом:

$$S_0 = 0, \quad S_{k+1} = S_k + Dh(X_{t_k}) h(X_{t_k}) \mathbb{W}_{t_k, t_{k+1}}.$$

Тогда из ограниченности функции $Dh(X) \cdot h(X)$ вытекают соотношения

$$\mathbb{E}\bigg| \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} Dh(X_{t_i}) h(X_{t_i}) \mathbb{W}_{t_i, t_{i+1}} \bigg|^2 = \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}|S_{i+1} - S_i|^2 \leqslant C \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}|\mathbb{W}_{t_i, t_{i+1}}|^2 = O(|\mathcal{P}|).$$

Отсюда и из равенств (12)–(14) следует, что с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t b(X_s) ds + \int\limits_0^t h(X_s)\, dW_s + \int\limits_0^t \sigma(X_s)\, dB_s^H.$$

Таким образом, процесс X_t является сильным решением уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$. Согласно теореме 1 величина $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p)$ является конечной. Единственность сильного решения вытекает из результатов работы [4]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. London, 2008.
2. *Mishura Y.S.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin; Heidelberg, 2008.
3. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stochastic Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
4. *Mishura Y.S., Shevchenko G.M.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H>1/2 // Commun. in Statistics. Theory and Methods. 2011. V. 40. № 19–20. P. 3492–3508.
5. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
6. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
7. *Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
8. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.
10. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
11. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
12. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
13. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Collect. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.
14. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Revista Matematica Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
15. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Func. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
16. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
17. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
18. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stochastic Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
19. *Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
20. *Zahle M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I // Probability Theory and Related Fields. 1998. V. 111. № 3. P. 333–374.
21. *Coutin L., Qian Z.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions // Probability Theory Related Fields. 2002. V. 122. № 1. P. 108–140.
22. *Neuenkirch A., Nourdin I., Robler A., Tindel S.* Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations // Annal. de Inst. Henri Poincare (B) Probability and Statistics. 2009. V. 45. № 1. P. 157–174.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 24.08.2020 г.
После доработки 07.12.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.