ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 179–186

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕМОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА

© 2021 г. Л. Б. Княжище

Представлены приёмы доказательства новых достаточных признаков устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономного дифференциального уравнения с использованием немонотонных незнакоопределённых функций Ляпунова. В качестве примера применения доказанных утверждений установлены новые признаки устойчивости градиентной системы, положение равновесия которой не является изолированным, а функция, задающая правую часть, не имеет минимума в точке покоя. Указан признак устойчивости гамильтоновой системы для случая нестрогого минимума потенциальной энергии в точке покоя.

DOI: 10.31857/S0374064121020059

В настоящей работе представлены новые условия устойчивости решений дифференциальных уравнений
$$\dot{y} = f(t, y), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$
где $t \in \mathbb{R}_+$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Относительно функции f предполагается, что её свойства обеспечивают существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных задачи Коши для уравнения (1). Решение этого уравнения с начальными данными $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ обозначим через $y(t, t_0, y_0)$. Всюду, где указание на конкретные начальные данные (t_0, y_0) несущественно, будем использовать для обозначения решения уравнения (1) укороченную запись $y(t)$.

Через $B(y, H)$ обозначаем шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса H с центром в точке y, а через S_r – сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле. Граница множества M обозначается через $\operatorname{Fr} M$, а множество натуральных чисел – через $\mathbb{N}$. Стандартную норму и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ обозначаем через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно.

Очевидно, что $y(t, 0, 0) \equiv 0$ является решением уравнения (1), которое ниже называется нулевым решением и устойчивость по Ляпунову которого будем изучать для начального момента времени $t_0 = 0$.

Скалярную монотонную функцию $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такую, что $a(0) = 0$ и $a(\tau) > 0$ для всех $\tau > 0$, традиционно будем называть функцией *класса Хана*. Функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$, называется определённо положительной (определённо отрицательной), если для некоторой класса Хана функции a верно неравенство $V(t, y) \geqslant a(\|y\|)$ (неравенство $V(t, y) \leqslant -a(\|y\|)$) для всех (t, y), принадлежащих множеству $\mathbb{R}_+ \times B(0, H)$. Если же на этом множестве выполнено неравенство $V(t, y) \geqslant 0$ (неравенство $V(t, y) \leqslant 0$), то функция V называется знакоположительной (знакоотрицательной). Определённо положительные и определённо отрицательные функции называются знакоопределёнными, а знакоположительные и знакоотрицательные – знакопостоянными. Говорят, что функция V допускает бесконечно малый высший предел, если для некоторой класса Хана функции b верно неравенство $V(t, y) \leqslant a(\|y\|)$ при всех $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, H)$.

Хорошо известны классические достаточные условия устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1), формулируемые с помощью знакоопределённых функций Ляпунова.

Устойчивость нулевого решения уравнения (1) при любом начальном моменте времени будет гарантирована, если верно

Утверждение 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывная положительно определённая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+,$ $V(t,0)\equiv 0,$ *такая, что для всех начальных данных* $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}_+\times B(0,H)$ *функция* $V(t,y(t,t_0,y_0))$ *переменной* $t\geqslant t_0$ *не возрастает, то нулевое решение* $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Здесь не требуется гладкости функции $V(t,y).$ При этом проверка условия "не возрастания функции $V(t,y)$ вдоль решений" для негладких функций может оказаться непростой задачей. Для дифференцируемых функций $V(t,y)$ такая задача упрощается и может быть выполнена без знания решений, поскольку верна следующая

Теорема 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+,$ $V(t,0)\equiv 0,$ *такая, что для всех* $(t,y)\in\mathbb{R}_+\times$ $\times B(0,H)$ *верно неравенство*

$$\dot V(t,y)=V'_t(t,y)+V'_y(t,y)f(t,y)\leqslant 0, \tag{2}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Если дополнительно функция V *допускает бесконечно малый высший предел и вместо условия знакоотрицательности (2) выполняется для всех* $(t,y)\in\mathbb{R}_+\times B(0,H)$ *условие отрицательной определённости производной функции Ляпунова вдоль решений уравнения (1)*

$$\dot V(t,y)=V'_t(t,y)+V'_y(t,y)f(t,y)\leqslant -\omega(\|y\|), \tag{3}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво.*

Анализируя условия теоремы 1, нетрудно увидеть, что условия (2), (3) гарантируют монотонное поведение функции Ляпунова вдоль решений уравнений (1). Совершенно очевидно, что монотонный характер поведения функции V вдоль всех решений связан с тем, что условия (2) и (3) означают соответственно знакоотрицательность и определённую отрицательность производной $\dot V(t,y)$ функции Ляпунова вдоль решений во всех точках окрестности $\mathbb{R}_+\times B(0,H)$ нулевого решения $y\equiv 0$ уравнения (1).

1. Немонотонные вдоль решений знакоопределённые функции Ляпунова. Нашей первой целью будет формулировка и доказательство условий устойчивости нулевого решения уравнения (1), использующих менее жёсткие, чем в теореме 1, требования к производной функции Ляпунова в точках множества $\mathbb{R}_+\times B(0,H).$ Точнее говоря, мы попытаемся отказаться от требования повсеместного в $\mathbb{R}_+\times B(0,H)$ выполнения условия (2). При этом всюду ниже будем называть такие вспомогательные функции *функциями Ляпунова*, возможно, несколько отступая от классического понимания этого термина.

Введём предварительно несколько обозначений. Пусть задана непрерывная на $\mathbb{R}_+\times B(0,H)$ функция V и задано некоторое решение $y(t,0,y_0)$ с начальными данными $(0,y_0).$ Положим $V_r(t)=\max\limits_{y_0\in S_r}V(t,y(t,0,y_0))$ для всякого $t\geqslant 0.$ Обозначим

$$M_r(t)=\{y_0\in S_r: V(t,y(t,0,y_0))=V_r(t)\}$$

для всех $t\geqslant 0,$ $r>0.$ Образ любого множества начальных данных S из $\mathbb{R}^n$ при отображении $y_0\mapsto y(t,0,y_0)$ будем обозначать $y(t,0,S).$ Очевидно, что множество $M_r(t)$ не пусто вследствие непрерывности функции $V(t,y).$ По построению множеств $M_r(t)$ при всяком $t>0$ функция $V(t,y(t,0,y_0))$ достигает максимума по $y_0\in S_r$ при $y_0\in M_r(t).$ С другой стороны, при всяком $t>0$ функция $V(t,y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t,0,S_r)$ в точках множества $y(t,0,M_r(t)).$

Одну из основных идей данной работы, лежащих в основе поиска минимального (в некотором смысле) множества, содержащего информацию об устойчивости положения равновесия, описывает

Лемма 1. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывная положительно определённая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+,$ $V(t,0)\equiv 0,$ *такая, что функция* $V_r(t)$ *при любом* $0\leqslant r\leqslant H$ *является невозрастающей, то нулевое решение* $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Доказательство. Пусть задано некоторое число $0 < \varepsilon \leqslant H$. Укажем число $\delta > 0$ такое, что решения уравнения (1), начинающиеся в шаре радиуса $\delta > 0$, не выходят из шара радиуса $\varepsilon > 0$. Для этого вычислим $v = \min\limits_{y\in S_\varepsilon} V(0,y)$. В силу положительной определённости функции $V(0,y)$ можно утверждать, что $v > 0$. По числу $v > 0$, используя непрерывность функции $V(0,y)$, выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы число $V_\delta = \max\limits_{y\in B(0,\delta)} V(0,y)$ удовлетворяло неравенству $V_\delta < v$. По определению функции $V_r(t)$ и в силу условия её невозрастания для всякого $y_0 \in B(0,\delta)$ и всех $t \geqslant 0$ верны неравенства

$$V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant V_{\|y_0\|}(t) \leqslant V_\delta < v.$$

Отсюда очевидно следует, что решения уравнения (1), начинающиеся в шаре радиуса $\delta(\varepsilon) > 0$, не выходят из шара радиуса $\varepsilon > 0$, что и означает устойчивость по Ляпунову нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1). Лемма доказана.

Для дальнейшего наиболее существенно то, что при выполнении условий леммы 1 функция $V(t, y(t,0,y_0))$, $t \geqslant 0$, может и не быть монотонной вдоль всех решений уравнения (1). На основании леммы 1 можно сформулировать признак устойчивости, описывающий минимальное (в некотором смысле) множество, на котором требуется проверка условий (2) или (3) для заключения соответственно об устойчивости или асимптотической устойчивости нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1).

Лемма 2. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V(t,0) \equiv 0$, такая, что при любом $0 < r \leqslant H$ неравенства (2) выполнены для каждого $t \geqslant 0$ и всех $y = y(t,0,y_0)$, для которых $y_0 \in M_r(t)$, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.*

Если дополнительно функция V допускает бесконечно малый высший предел и для каждого $t \geqslant 0$ и всех $y = y(t,0,y_0)$, для которых $y_0 \in M_r(t)$, выполняется условие (3), то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство получается, если учесть компактность множества $M_r(t)$, непрерывность функции $\dot V(t,y) = V_t'(t,y) + V_y'(t,y)f(t,y)$ – производной функции $V(t,y)$ вдоль решений – и условия (2) или (3), гарантирующие неположительность или определённую отрицательность величины $\dot V(t,y)$ в тех точках $y = y(t,0,y_0)$, в которых функция $V(t,y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t,0,S_r)$, т.е. в точках множества $y(t,0,M_r(t))$.

Для продолжения доказательства леммы нам понадобится следующее вспомогательное

Утверждение 2. *Пусть для некоторой непрерывно дифференцируемой (не обязательно знакопостоянной) функции $V(t,y)$ при некотором $r > 0$ и каждом $t > 0$ для точек $y = y(t,0,y_0)$, в которых функция $V(t,y)$ достигает максимального значения на множестве $y(t,0,S_r)$, т.е. для точек множества $y(t,0,M_r(t))$, верно неравенство $\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$. Тогда функция $V_r(t)$ является невозрастающей.*

Если же выполнено более сильное условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$, то функция $V_r(t)$ является монотонно убывающей и при этом для $\tau > 0$ верна оценка $V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau$.

Доказательство утверждения. Покажем сначала, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для всех точек $y_0 \in M_r(t)$. Предположим, что это не так: найдётся $t^* \geqslant 0$ и последовательность точек $t_n > t^*$, $t_n \to t^*$ при $n \to \infty$, таких, что $V_r(t_n) > V_r(t^*)$. Очевидно, что найдутся точки $y_0^n \in M_r(t_n)$, для которых $V(t_n, y(t_n,0,y_0^n)) = V_r(t_n)$. Тогда последовательность $y_0^n \in M_r(t_n)$ в силу компактности сферы S_r может быть выбрана такой, что для некоторой точки $y_0^* \in S_r$ верно, что $y_0^n \to y_0^*$ при $n \to \infty$. Очевидно, что $y_0^* \in M_r(t^*)$ и $V(t_n, y(t_n,0,y_0^n)) = V(t_n, y(t_n,t^*,y(t^*,0,y_0^n)))$. Поскольку $\dot V(t, y(t,0,y_0^*)) < -\varepsilon < 0$ при $t \geqslant t^*$, то, в силу непрерывности $\dot V(t,y)$ и непрерывной зависимости решений от начальных данных, для достаточно больших n выполняется неравенство $\dot V(t, y(t,t^*,y(t^*,0,y_0^n))) \leqslant -\varepsilon < 0$ при $t^* \leqslant t \leqslant t_n$. Отсюда легко следуют соотношения

$$V_r(t_n) = V(t_n, y(t_n,0,y_0^n)) = V(t_n, y(t_n,t^*,y(t^*,0,y_0^n))) \leqslant$$

$$\leqslant V(t^*, y(t^*,0,y_0^n)) - \varepsilon(t_n - t^*) < V_r(t^*) - \varepsilon(t_n - t^*) < V_r(t^*).$$

Полученное противоречие с выбором точек $t_n > t^*$, $t_n \to t^*$ при $n \to \infty$, доказывает, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$.

Докажем теперь, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, если выполнено условие $\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$. Рассмотрим функции

$$V_\varepsilon(t,y) = V(t,y) - \varepsilon t.$$

Через M_r^ε обозначим множество M_r для функции V_ε. Для каждой из этих функций очевидно верны неравенства $\dot V_\varepsilon(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек соответствующего этой функции множества $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$, так как множество $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$ не изменяется и при любом $\varepsilon > 0$ совпадает с множеством $y(t,0,M_r(t))$. Согласно только что доказанному, функции $V_r^\varepsilon(t)$ являются невозрастающими. Следовательно, не возрастает и функция $V_r(t)$, являющаяся поточечным пределом функций $V_r^\varepsilon(t)$.

Теперь для завершения доказательства утверждения нам остаётся показать, что если $\dot V(t, y(t,0,y_0)) < -\varepsilon < 0$ для точек множества $y(t,0,M_r(t))$, то для всех $t > 0$ и $\tau > 0$ верна оценка $V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau$. Рассмотрим функцию $V_\varepsilon(t,y) = V(t,y) + \varepsilon t$. Для этой функции верно неравенство $\dot V_\varepsilon(t, y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ для точек множества $y(t,0,M_r^\varepsilon(t))$, совпадающего с множеством $y(t,0,M_r(t))$. Следовательно, функция $V_r^\varepsilon(t)$, которая совпадает с функцией $V_r(t) + \varepsilon t$, не возрастает, а значит, для $\tau > 0$ верна оценка

$$V_r(t+\tau) - V_r(t) < -\varepsilon\tau.$$

Утверждение доказано.

Вернёмся к доказательству леммы. Устойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1) очевидна, так как при выполнении условий данной леммы вследствие справедливости утверждения 2 выполнены условия леммы 1.

Установим асимптотическую устойчивость нулевого решения $y \equiv 0$ уравнения (1), если выполнены указанные в формулировке леммы дополнительные условия.

Поскольку нулевое решение $y \equiv 0$ устойчиво, то по числу H можно указать число $h > 0$ такое, что решения, начинающиеся в шаре радиуса h, не покидают шар радиуса H. Покажем, что всякое решение, начинающееся в шаре радиуса h, с течением времени стремится к нулевому решению $y \equiv 0$ уравнения (1).

Предположим, что это не так. Это означает, что найдутся решение $y(t,0,y_0)$, $\|y_0\| < h$, и последовательность моментов времени $t_n > 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такие, что $\|y(t_n,0,y_0)\| > \varepsilon > 0$ для некоторого ε и всех n. Поскольку функция $V(t,y)$ положительно определена, то существует число $v > 0$ такое, что $V(t, y(t_n,0,y_0)) > v$ для всех n. Положим $r = \|y_0\|$ и рассмотрим функцию $V_r(t)$. Согласно определению этой функции выполняется неравенство $V_r(t_n) \geqslant V(t, y(t_n,0,y_0)) > v$ для всех n. Отсюда в силу того, что функция $V_r(t)$ является невозрастающей, следует неравенство $V_r(t) \geqslant v$ для всех $t > 0$.

Учитывая, что $V(t, y(t,0,y_0)) = V_r(t) > v$ для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$, и используя наличие бесконечно малого высшего предела у функции $V(t,y)$, приходим к заключению, что для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$ при некотором $\varepsilon_1 > 0$ выполняется неравенство $\|y(t,0,y_0)\| > \varepsilon_1 > 0$. Теперь из того, что для всех $y_0 \in M_r(t)$ и каждого $t > 0$, согласно условиям леммы 2, выполняется неравенство (3), вытекает неравенство

$$\dot V(t, y(t,0,y_0)) \leqslant -\omega(\varepsilon_1) < 0.$$

Таким образом, выполнены условия второй части утверждения 2, а значит, имеет место неравенство $V_r(t) < V_r(0) - \omega(\varepsilon_1)t$. Для больших t это неравенство противоречит тому, что $V(t, y(t,0,y_0)) = V_r(t) > v$. Полученное противоречие доказывает асимптотическую устойчивость. Лемма доказана.

Очевидно, что совокупность множеств $(t, y(t,0,M_r(t)))$, как правило, значительно меньше множества $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, однако её построение может быть сопряжено с трудностями, сравнимыми с нахождением решений.

На основании леммы 2 установим следующий признак устойчивости, не требующий непосредственного построения множеств $M_r(t)$.

Теорема 2. *Если для уравнения (1) найдётся непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, $V(t,0)\equiv 0$, *такая, что неравенства (2) выполнены для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y=y(t,0,y_0)$, *для которых найдётся константа* $c(t,y_0)\in\mathbb{R}$ *такая, что*

$$V'_y(t,y(t,0,y_0))y'_{y_0}(t,0,y_0)=c(t,y_0)y_0, \tag{4}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Если дополнительно V *допускает бесконечно малый высший предел и для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y=y(t,0,y_0)$, *для которых выполняется условие (4), выполнено условие (3), то нулевое решение* $y\equiv 0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство получить достаточно просто, если заметить, что условие (4) является необходимым условием [1, с. 205] достижения функцией $V(t,y(t,0,y_0))$ экстремума в точке $(t,y(t,0,y_0))$ на сфере $S_{\|y_0\|}$. Пусть $M^1_{\|y_0\|}(t)$ – это множество, при каждом $t\geqslant 0$ включающее точки $y=y(t,0,y_0)$, для которых найдётся константа $c(t,y_0)\in\mathbb{R}$ такая, что выполнено условие (4). Очевидно включение $M_{\|y_0\|}(t)\subset M^1_{\|y_0\|}(t)$. Отсюда следует, что неравенства (2) справедливы для каждого $t\geqslant 0$ и всех $y=y(t,0,y_0)$, для которых $y_0\in M_{\|y_0\|}(t)$. Это означает, что выполнены условия леммы 2. Теорема доказана.

В приведённых выше леммах и в теореме 2 используются положительно определённые функции, которые, в принципе, могут быть, в отличие от функций, удовлетворяющих классическим требованиям второго метода Ляпунова, немонотонными вдоль решений уравнения (1). Это связано с тем, что требования к знаку производной $\dot V(t,y)$ вдоль решений уравнения (1) предъявляются не на всей окрестности положения равновесия, а только в тех точках $y_0\in M_{\|y_0\|}(t)$, в которых при заданном t функция Ляпунова $V(t,y(t,0,y_0))$ достигает максимума на сфере $S_{\|y_0\|}$.

2. Условия устойчивости для незнакопостоянных функций Ляпунова. Приведём теперь достаточное условие устойчивости, допускающее использование даже знакопеременных функций, не обязательно являющихся монотонными вдоль решений уравнения (1). Для случая знакопостоянных, но не знакоопределённых функций данные утверждения представляют собой дополнения к результатам работы [2].

Теорема 3. *Пусть для уравнения (1) найдутся число* $H>0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $V(t,0)\equiv 0$, *последовательность чисел* r_n, $n\in\mathbb{N}$, $r_n\to 0$ *при* $n\to\infty$, *и последовательность окрестностей* $M_n\subset B(0,r_n)$ *точки* $y=0$ *такие, что неравенства (2) выполнены для каждого* $t\geqslant 0$ *и всех* $y\in B(0,H)$, *для которых* $V(t,y)>0$. *Если при этом для любого* $t\geqslant 0$ *верно неравенство*

$$\min_{y\in \operatorname{Fr} M_n} V(t,y)>0, \tag{5}$$

то нулевое решение $y\equiv 0$ *уравнения (1) устойчиво.*

Доказательство. Установим устойчивость по Ляпунову нулевого решения $y\equiv 0$ уравнения (1).

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Покажем существование $\delta>0$ такого, что $\|y(t,0,y_0)\|\leqslant\varepsilon$, если $\|y_0\|\leqslant\delta$. Для этого по величине $\varepsilon>0$ выберем число r_{n_ε} из последовательности, указанной в условиях теоремы, таким, чтобы выполнялось неравенство $r_{n_\varepsilon}<\varepsilon$. Из условия (5) следует, что

$$\min_{y\in \operatorname{Fr} M_{n_\varepsilon}} V(t,y)>m(\varepsilon)>0$$

для некоторого $m(\varepsilon)$. Непрерывность функции V позволяет выбрать $\delta>0$ таким образом, что $V(0,y_0)\leqslant m(\varepsilon)$, если $\|y_0\|\leqslant\delta$.

Покажем, что выбранное выше число $\delta>0$ является искомым. Действительно, рассмотрим величину $\|y(t,0,y_0)\|$, где $\|y_0\|\leqslant\delta$, и допустим, что при некотором t верно равенство

$\|y(t,0,y_0)\| = \varepsilon$. Тогда при некотором t^* справедливо включение $\|y(t^*,0,y_0)\| \in \operatorname{Fr} M_{n_\varepsilon}$, а значит,

$$V(t^*, y(t^*,0,y_0)) > m(\varepsilon) \tag{6}$$

согласно построению числа $m(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь функцию $V(t, y(t,0,y_0))$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Если при всех $0 \leqslant t \leqslant t^*$ верно неравенство $V(t,y(t,0,y_0)) > 0$, то $\dot V(t,y(t,0,y_0)) \leqslant 0$, а значит, функция $V(t,y(t,0,y_0))$ не возрастает на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Отсюда несложно следует, что

$$V(t^*, y(t^*,0,y_0)) \leqslant V(0,y_0) \leqslant m(\varepsilon),$$

а это противоречит неравенству (6). Если же при некотором $0 \leqslant t_1 \leqslant t^*$ верно неравенство $V(t_1, y(t_1,0,y_0)) \leqslant 0$, то $V(t,y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ при всех $t_1 \leqslant t \leqslant t^*$, поскольку $\dot V(t,y(t,0,y_0)) \leqslant 0$ при $V(t,y(t,0,y_0)) > 0$. Отсюда получаем $V(t^*,y(t^*,0,y_0)) \leqslant 0 < m(\varepsilon)$, что также противоречит неравенству (6). Теорема доказана.

Функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 3, будем называть *вспомогательной функцией*. Теорема 3 предполагает использование вспомогательных функций, являющихся не знакопостоянными, т.е., возможно, имеющих отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности нулевого решения, но заведомо имеющих знакоотрицательную производную. Хорошо известными примерами здесь могут служить градиентные и ряд механических систем с заданной функцией полной энергии.

Прежде чем перейти к рассмотрению этих примеров, приведём одно утверждение, в котором используются знакопостоянные вспомогательные функции для автономных уравнений (1). Пусть $\nabla f(y)$ и $Jf(y)$ обозначают градиент и матрицу вторых производных скалярной функции f в точке y.

Утверждение 3. *Пусть для автономного уравнения (1) найдутся число $H > 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(0) \equiv 0$, последовательность чисел $r_n < H$, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность чисел $\delta_n > 0$ такие, что неравенства (2) выполнены для всех $y \in B(0,H)$, для которых $V(y) > 0$. Если при этом $V(y) \geqslant 0$ при $r_n - \delta_n < \|y\| < r_n$, а для $y \in S_{r_n}$, для которых справедливы соотношения*

$$\nabla V(y) = c(y)y \quad \text{и} \quad (x, JV(y)x) - c(y) \geqslant 0 \tag{7}$$

для всех $x \in S_1$ таких, что $(y,x) = 0$, верно и неравенство $c(y) > 0$, то нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво.

Доказательство легко следует из теоремы 3. Действительно, множество тех точек сферы $y \in S_{r_n}$, для которых верны соотношения (7), содержит в себе все точки, в которых функция $V(y)$ достигает минимума на сфере S_{r_n}. В свою очередь выполнение неравенства $c(y) > 0$ гарантирует, что функция $\min\limits_{y \in S_r} V(y)$ возрастает при r, близких к r_n. Поскольку $V(y) \geqslant 0$ при $r_n - \delta_n < \|y\| < r_n$, то $\min\limits_{y \in S_{r_n}} V(y) > 0$. Утверждение доказано.

3. Примеры. Проиллюстрируем применение теоремы 3 и утверждения 3 на нескольких примерах.

Пример 1. Градиентная система. Рассмотрим градиентную дифференциальную систему

$$\dot y = -\nabla f(y), \quad \nabla f(0) = 0, \quad y \in B(0,H). \tag{8}$$

Основываясь на теореме 3, нетрудно установить признак устойчивости положения равновесия системы (8), который можно использовать для изучения таких систем с функцией f, не имеющей даже нестрогого минимума в точке покоя.

Теорема 4. *Пусть для функции f найдутся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $y = 0$ такие, что верно неравенство*

$$\min_{y \in \operatorname{Fr} M_n} f(y) > 0. \tag{9}$$

Тогда точка покоя $y \equiv 0$ системы (8) устойчива.

Доказательство следует из того, что в качестве вспомогательной функции можно взять функцию $V(y)=f(y)$. Здесь очевидно $\dot V(y)=-(\nabla f(y),\nabla f(y))\leqslant 0$, а значит, выполнены все требования теоремы 3.

Если функция f оказывается не знакопеременной, а знакоположительной, т.е. имеет в точке покоя $y=0$ нестрогий локальный минимум, то более удобным может оказаться использование утверждения 3. Применяя это утверждение, легко установить следующий признак устойчивости системы (8), не требующий построения набора окрестностей $M_n\subset B(0,r_n)$ точки $y=0$.

Теорема 5. *Пусть функция f знакоположительна и найдётся последовательность чисел r_n, $n\in\mathbb{N}$, $r_n\to 0$ при $n\to\infty$, таких, что для всякого $\|y\|=r_n$, для которого выполняются соотношения*

$$\nabla f(y)=c(y)y \quad \text{и} \quad (x,Jf(y)x)-c(y)\geqslant 0 \tag{10}$$

для всех $x\in S_1$ таких, что $(y,x)=0$, верно и неравенство $c(y)>0$.

Тогда положение равновесия $y\equiv 0$ системы (8) устойчиво.

Доказательство очевидным образом следует из утверждения 3.

Нетрудно убедиться, что условия устойчивости теорем 3, 4 дополняют соответствующие результаты работ [3, 4], поскольку включают более широкий класс знакопеременных функций f и могут применяться тогда, когда точка покоя $y\equiv 0$ является не изолированной точкой покоя.

Пример 2. Гамильтонова система. Рассмотрим гамильтонову систему с традиционными уравнениями движения

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p}(q,p),\quad \dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}(q,p), \tag{11}$$

где $q,p\in\mathbb{R}^n$, гамильтониан $H(q,p)=T(q,p)+U(q)$ – сумма кинетической и потенциальной энергий. Полная производная гамильтониана вдоль траекторий движения системы (11) тождественно равна нулю.

Здесь будем считать, что $T(q,p)=2^{-1}p^{\mathrm{T}}B(q)p$ и матрица $B(q)$ непрерывно дифференцируемая и симметрическая, а $B(0)$ положительно определена. Потенциальная энергия $U(q)$ непрерывно дифференцируема и $U(0)=0$, $\partial U(0)/\partial q=0$.

Хорошо известна теорема Лагранжа–Дирихле, согласно которой если потенциальная энергия имеет в точке $q=0$ строгий минимум, то положение равновесия $q=0$, $p=0$ устойчиво. В этом случае гамильтониан оказывается положительно определённой функцией Ляпунова. Вопрос о наличии устойчивости для случая нестрогого минимума потенциальной энергии в точке $q=0$ оказывается очень сложным и наиболее полно изучен для случая, когда функция $U(q)$ аналитична в некоторой окрестности точки $q=0$ [5, с. 82]. При этом Пенлеве, а затем и Уинтнер отмечали, что положение равновесия может быть устойчивым в некоторых ситуациях даже при не имеющей нестрогого локального минимума потенциальной энергии, а значит, при знакопеременном гамильтониане.

Приведём один из известных результатов для того, чтобы показать, что такого рода утверждения, обычно опирающиеся на собственные доказательства, непосредственно следуют из теоремы 3.

Утверждение 4. *Пусть для системы (11) найдётся последовательность чисел r_n, $n\in\mathbb{N}$, $r_n\to 0$ при $n\to\infty$, и последовательность окрестностей $M_n\subset B(0,r_n)$ точки $q=0$ такая, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\min_{q\in\operatorname{Fr}M_n}U(q)>0. \tag{12}$$

Тогда положение равновесия $q=0$, $p=0$ системы (11) устойчиво.

Нетрудно видеть, что проверка выполнения условий утверждения 4 связана с необходимостью построения специального набора окрестностей, которые фигурируют в теореме 3. В то же время использование утверждения 3 для случая знакоположительной функции $U(q)$ позволяет избежать такой процедуры и свести проверку к более простым условиям.

Утверждение 5. *Пусть в системе (11) функция U знакоположительна и найдётся последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, таких, что для тех $q \in S_{r_n}$, для которых выполняются соотношения*

$$\nabla U(q) = c(q)q \quad и \quad (x, JU(q)x) - c(q) \geqslant 0 \tag{13}$$

для всех $x \in S_1$ таких, что $(q, x) = 0$, верно и неравенство $c(q) > 0$.

Тогда положение равновесия $q = 0$, $p = 0$ системы (11) устойчиво.

Доказательство непосредственно вытекает из утверждения 3, применённого к функции $H(q,p) = T(q,p) + U(q)$ как соответствующей вспомогательной функции. Действительно, во множестве точек q, удовлетворяющих условиям (13), содержатся все точки, в которых функция $U(q)$ достигает минимума на соответствующей сфере S_{r_n}. Выполнение для этих точек неравенства $c(q) > 0$ означает, что функция $\min\limits_{q \in S_r} U(q)$ возрастает по r в некоторой окрестности r_n. Теперь, учитывая, что функция U знакоположительна, а функция $T(q,p)$ положительно определена, получаем, что в пространстве пар (q,p) существует набор окрестностей $M_n \subset B(0, r_n)$ точки $(0,0)$, для которых верны неравенства $\min\limits_{(q,p) \in \operatorname{Fr} M_n} H(q,p) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гороховик В.В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
2. *Гайшун И.В., Княжище Л.Б.* Условия устойчивости решений автономных вполне интегрируемых уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453–1456.
3. *Княжище Л.Б.* Условия экстремума и признаки устойчивости градиентных систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 348–355.
4. *Absil P.A., Kurdyka K.* On the stable equilibrium points of gradient systems // Systems & Control Letters. 2006. V. 55. № 7. P. 573–577.
5. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.10.2020 г.
После доработки 10.10.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.