ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 187–195

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926+531.36

О ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2021 г. В. В. Козлов

Рассматриваются неавтономные линейные системы дифференциальных уравнений, допускающие зависящий от времени первый интеграл в виде квадратичной формы. Установлена двойственность между взаимно сопряжёнными линейными системами с квадратичными интегралами. Указаны условия симметричности спектра таких линейных систем относительно нуля. Доказано, что линейная система устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определённой квадратичной формы. Исследованы инвариантные меры линейных систем с квадратичным интегралом, плотности которых – положительные функции времени. Указана в явном виде серия квадратичных интегралов, если известен один из них. Показано, что степень неустойчивости правильной линейной системы (число положительных точек спектра с учётом кратностей) не превосходит минимального из индексов инерции приводимого квадратичного интеграла.

DOI: 10.31857/S0374064121020060

1. Введение. Пусть
$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$
– автономная система линейных дифференциальных уравнений в n-мерном пространстве, допускающая первый интеграл в виде *невырожденной* квадратичной формы
$$F(x) = (Bx, x)/2, \quad B^* = B. \tag{1.2}$$
Скобка $(\,,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

В [1] отмечены следующие свойства такой линейной системы (1.1):

1° $\operatorname{div}(Ax) = \operatorname{tr} A = 0$;

2° $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ – характеристический многочлен матрицы A.

Далее, если система (1.1) невырождена (т.е. $|A| \neq 0$), то:

3° размерность n чётна;

4° система (1.1) допускает $n/2$ независимых квадратичных интеграла;

5° система устойчива тогда и только тогда, когда она имеет положительно определённый квадратичный интеграл.

В общем невырожденном случае (когда $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$) линейная система (1.1) с квадратичным интегралом (1.2) оказывается гамильтоновой: симплектическую структуру в $\mathbb{R}^n$ задаёт невырожденная кососимметрическая матрица $\Omega = BA^{-1}$, а гамильтонианом служит квадратичный интеграл (1.2) [1]. Это наблюдение распространено на линейные системы в гильбертовом пространстве в работе [2]. Полная интегрируемость таких бесконечномерных гамильтоновых систем обсуждается в [3].

С этой точки зрения свойство 1° отвечает классической теореме Лиувилля о сохранении фазового объёма потоком гамильтоновой системы, а свойство 2° соответствует хорошо известному свойству спектра линейной гамильтоновой системы (он симметричен не только относительно вещественной оси, но и относительно чисто мнимой оси комплексной плоскости). Следует подчеркнуть, что свойства 1° и 2° имеют место и в случае вырожденной матрицы A, когда линейная система (1.1), вообще говоря, не гамильтонова.

Пусть u – степень неустойчивости невырожденной линейной системы (1.1): количество собственных значений матрицы A в правой комплексной полуплоскости (с учётом кратности), а i^- и i^+ – индексы инерции квадратичной формы (1.2) (ввиду её невырожденности $i^- + i^+ = n$). Тогда имеют место следующие соотношения:

6° $u \leqslant \min\{i^-, i^+\}$;

7° $u \equiv i^- \mod 2$.

Неравенство 6° доказано в [4] с помощью теории нормальных форм Вильямсона линейных гамильтоновых систем; другое доказательство дано в [5]. Сравнение 7° представляет собой обобщение классической теоремы Кельвина о возможности гироскопической стабилизации положений равновесия натуральных механических систем [1].

В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда матрицы A и B зависят от времени. Установлены аналоги свойств 1°–6° для неавтономных линейных систем. При этом спектр линейной системы определяется обычным способом через характеристические показатели Ляпунова. Чтобы доказать (и правильно сформулировать) аналог теоремы Кельвина (свойство 7°) в неавтономном случае, надо использовать более тонкие характеристики решений (например, характеристические частоты [6, 7]). Но этот вопрос здесь не рассматривается.

Предполагается, что читатель знаком с основными определениями и свойствами характеристических показателей Ляпунова решений неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений (см. по этому поводу, например, [8]).

Приведём пример из теории малых колебаний механических систем около положения равновесия с учётом так называемых гироскопических сил. Линеаризованное уравнение движения имеет следующий вид:

$$M\ddot{x} + G(t)\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1.3}$$

Здесь $M^* = M > 0$ – матрица инерции, P – симметрическая матрица, задающая потенциальную энергию системы

$$V = (Px, x)/2,$$

а G – кососимметрическая матрица (в нашем случае зависящая от времени), порождающая гироскопическую силу $-G\dot{x}$.

Уравнение (1.3) допускает интеграл энергии

$$F = \frac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Px, x). \tag{1.4}$$

Гироскопические силы не оказывают влияния на сохранность полной энергии системы.

2. Линейные неавтономные системы. Наш основной объект – линейная неавтономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

допускающая квадратичный интеграл

$$F(x, t) = (B(t)x, x)/2. \tag{2.2}$$

Элементы матрицы A (матрицы B) считаются непрерывными (непрерывно дифференцируемыми) функциями времени $t \in \mathbb{R}$. Матрицы A и B связаны следующим соотношением:

$$\dot{B} + BA + A^*B = 0. \tag{2.3}$$

В дальнейшем существенную роль играет линейная система дифференциальных уравнений, сопряжённая к системе (2.1):

$$\dot{y} = -A^*(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1. *Если матрица $B(t)$ невырождена при всех t, то квадратичная форма*

$$H(y, t) = (B^{-1}(t)y, y)/2 \tag{2.5}$$

является первым интегралом сопряжённой системы (2.4).

Действительно, умножая тождество (2.3) справа и слева на B^{-1} и используя легко проверяемое равенство
$$(B^{-1})^{\bullet} = -B^{-1}\dot{B}B^{-1},$$
получаем
$$(B^{-1})^{\bullet} + B^{-1}(-A^*) + (-A)B^{-1} = 0,$$
что доказывает инвариантность квадратичной формы (2.5) относительно потока сопряжённой системы.

Каждое из отображений
$$A \mapsto -A^* \quad \text{и} \quad B \mapsto B^{-1}$$
инволютивно: его квадрат – тождественное отображение. Предложение 2.1 устанавливает любопытную двойственность между сопряжёнными линейными системами с невырожденными квадратичными интегралами. Эту двойственность более выразительно представляет

Предложение 2.2. *Пусть* $|B(t)| \neq 0$ *при всех* t. *Тогда линейная подстановка*
$$y = B(t)x \tag{2.6}$$
переводит линейную систему (2.4) в сопряжённую ей систему (2.1).

Обратная подстановка $x = B^{-1}(t)y$ переводит систему (2.1) в (2.4).

Доказательство. Проводя замену переменных (2.6) в линейной системе дифференциальных уравнений (2.4), получаем
$$B\dot{x} + \dot{B}x = -A^*Bx,$$
или
$$\dot{x} = -(B^{-1}\dot{B} + B^{-1}A^*B)x. \tag{2.7}$$
Далее, из тождества (2.3) следует, что
$$-(B^{-1}\dot{B} + B^{-1}A^*B) = A.$$
Следовательно, линейные системы (2.7) и (2.1) совпадают между собой, что и требовалось доказать.

Напомним, что невырожденная при всех t из рассматриваемого временнóго промежутка матрица $L(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами называется *матрицей Ляпунова*, если на рассматриваемом промежутке $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены и $|L(t)| \geqslant l > 0$. Матрица $L^{-1}(t)$ также будет матрицей Ляпунова.

Следствие 2.1. *Если* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, то спектры линейных систем (2.1) и (2.4), содержащие, возможно, и несобственные значения, совпадают между собой.*

Действительно, при линейных преобразованиях, задаваемых матрицами Ляпунова, характеристические показатели решений сохраняются.

Пусть матрица $A(t)$ ограничена (в промежутке $[t_0, \infty)$). Тогда (по теореме Ляпунова) полный спектр линейной системы (2.1) (и ей сопряжённой) состоит из n вещественных чисел.

Теорема 2.1. *Пусть* $B(t)$ *– матрица Ляпунова. Тогда линейная система (2.1) с ограниченной матрицей* $A(t)$ *правильная тогда и только тогда, когда её полный спектр симметричен относительно нуля.*

Тем же свойством обладает и сопряжённая линейная система.

Доказательство. Согласно теореме Перрона критерий правильности линейной системы заключается в условии симметричности относительно нуля полных спектров этой системы и системы, ей сопряжённой. Остаётся воспользоваться следствием 2.1. Теорема доказана.

Заключение теоремы 2.1 – это аналог свойства 2° для автономных систем, приведённого во введении. Здесь роль автономности играет условие правильности линейной неавтономной системы.

Следствие 2.2. *Пусть* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, а линейная система (2.1) с ограниченной матрицей* $A(t)$ *правильная. Если её спектр не содержит нуля, то* n *чётно.*

Следствие 2.2 представляет собой аналог для неавтономных линейных систем с зависящим от времени квадратичным интегралом свойства 3°.

Следствие 2.3. *Пусть* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, а линейная система (2.1) с ограниченной матрицей* $A(t)$ *правильная. Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{tr}A(t)\,dt=0.$$

Действительно, поскольку система (2.1) правильная, то предел слева существует и равен сумме всех характеристических показателей (с учётом кратностей) из спектра этой системы. Но (по теореме 2.1) эта сумма равна нулю.

На самом деле утверждение следствия 2.3 справедливо и без предположения о правильности системы (2.1). Это вытекает из доказанного ниже следствия 3.3: из формулы (3.8) вытекает ограниченность интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,ds,$$

если $B(t)$ – матрица Ляпунова.

Следствие 2.4. *Если* $B(t)$ *– матрица Ляпунова, то линейные системы (2.1) и (2.4) одновременно устойчивы или неустойчивы.*

Это сразу же вытекает из предложения 2.2.

Следствие 2.5. *Пусть выполнены условия следствия 2.4. Если система (2.1) устойчива, то её спектр нулевой и она приводится (по Ляпунову) к системе с нулевой матрицей.*

Действительно, если спектр содержит положительное вещественное число, то у системы (2.1) найдётся неограниченное решение.

Пусть теперь спектр содержит отрицательное число. Тогда система (2.1) имеет ненулевое решение $t\mapsto x(t)$ такое, что $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. По следствию 2.4 все решения $t\mapsto y(t)$ сопряжённой системы ограничены. Выберем $y(0)$ так, чтобы

$$(x(0),y(0))=c\neq 0. \tag{2.8}$$

По теореме Лагранжа

$$(x(t),y(t))=c$$

при всех t. Так как $y(t)$ ограничена, а $x(t)\to 0$, то $c=0$, что противоречит неравенству в (2.8). Итак, спектр линейной системы (2.1) нулевой.

Наконец, поскольку линейная система (2.1) устойчива одновременно со своей сопряжённой системой (следствие 2.4), то, как отмечено в [8, с. 228, упр. 14], она приводится к линейной системе с нулевой матрицей.

Теорема 2.2. *В предположениях следствия 2.4 линейная система (2.1) устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определённой квадратичной формы.*

Доказательство. Если линейная система допускает положительно определённый квадратичный интеграл, то его можно принять за функцию Ляпунова, что доказывает устойчивость системы (2.1).

Пусть теперь система (2.1) устойчива. Тогда (по следствию 2.5) заменой переменных $x=L(t)z$ с некоторой матрицей Ляпунова L система дифференциальных уравнений преобразуется к виду $\dot z=0$. Это уравнение допускает квадратичный интеграл $f=(z,z)/2$, который в старых переменных имеет вид

$$f(x,t)=(L^{-1}(t)x,L^{-1}(t)x)/2. \tag{2.9}$$

Так как $L(t)$ является матрицей Ляпунова, то (2.9) будет положительно определённым квадратичным интегралом исходной линейной системы (2.1). В самом деле, так как $\|x\| \leqslant \|L\|\|z\|$, то

$$2f = \|z\|^2 \geqslant \|L(t)\|^{-2}\|x\|^2.$$

Остаётся учесть, что $\|L(t)\|$ – ограниченная положительная функция времени. Поэтому выполняется неравенство $\|L(t)\|^{-2} \geqslant \mathrm{const} > 0$.

Теорема 2.2 обобщает свойство 5° на неавтономные линейные системы с зависящим от времени квадратичным интегралом.

3. Инвариантные меры. Нестационарная мера

$$d\mu_t = \rho(x,t)\, d^n x$$

с непрерывно дифференцируемой плотностью $\rho > 0$ будет инвариантной относительно потока линейной системы (2.1) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0, \tag{3.1}$$

где $v = A(t)x$. Уравнение (3.1) – известное уравнение Лиувилля, играющее ключевую роль в статистической механике.

Пусть плотность зависит лишь от времени. Тогда уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\dot\rho + \rho a = 0, \quad a(t) = \mathrm{tr}\, A(t). \tag{3.2}$$

Его общее решение:

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left[-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau\right], \quad \rho_0 = \rho(0).$$

Следовательно, решение существует на всей временно́й оси (если, конечно, матрица $A(t)$ определена при всех t) и плотность $\rho(t)$ положительна, если $\rho_0 > 0$.

Уравнение (3.2) полезно сравнить с уравнением (также полученным Лиувиллем) для определителя Вронского $w(t)$ фундаментальной матрицы решений линейной системы (2.1):

$$\dot w = aw. \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$\rho = cw^{-1}, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{3.4}$$

Имеет место очевидное

Предложение 3.1. *Поток линейной системы (2.1) сохраняет стандартную меру* $d^n x$ *в том и только том случае, когда* $\mathrm{tr}\, A(t) \equiv 0$.

Следствие 3.1. *Потоки линейной системы и системы, ей сопряжённой, сохраняют меру Лебега одновременно.*

Предложение 3.2. *Предположим, что линейная система (2.1) допускает не зависящий от времени интеграл в виде невырожденной квадратичной формы. Тогда её поток сохраняет обычную меру Лебега в* $\mathbb{R}^n$.

Действительно, в этом случае условие (2.3) принимает вид

$$BA + A^*B = 0 \tag{3.5}$$

и, кроме того, $|B| \neq 0$. Из (3.5) находим $A = -B^{-1}A^*B$. Следовательно,

$$\mathrm{tr}\, A = -\mathrm{tr}\,(A^*BB^{-1}) = -\mathrm{tr}\, A^* = -\mathrm{tr}\, A.$$

Откуда $\mathrm{tr}\, A = 0$, что и требовалось.

Вернёмся к общему случаю, когда симметрическая матрица B зависит от времени.

Теорема 3.1. *Пусть* $|B(t)| \neq 0$ *при всех* t. *Тогда*

$$\rho(t) = c[\,|\det B(t)|\,]^{1/2}, \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{3.6}$$

В частности, если $B = \mathrm{const}$, то получаем заключение предложения 3.2.

Следствие 3.2. *Если система (2.1) допускает квадратичный интеграл (2.2), невырожденный при некотором* $t = t_0$, *то* $|B(t)| \neq 0$ *при всех значениях* t.

Докажем теперь теорему 3.1.

Лемма 3.1. *Если* $x(t)$ *и* $z(t)$ *– любые решения линейной системы (2.1), то*

$$(B(t)x(t), z(t)) = \mathrm{const}\,. \tag{3.7}$$

Действительно, ввиду линейности уравнения (2.1) сумма $x(t)+z(t)$ также будет его решением. Следовательно,

$$(B(x+z), x+z) = \mathrm{const}\,.$$

Так как $(Bx, x) = \mathrm{const}$ и $(Bz, z) = \mathrm{const}$, то отсюда вытекает (3.7).

Следствие 3.3. *Если* $W(t)$ *– фундаментальная матрица системы (2.1), то*

$$W^*(t)B(t)W(t) = \mathrm{const}\,. \tag{3.8}$$

Это утверждение вытекает из леммы 3.1, применённой ко всем линейно независимым решениям системы (2.1), порождающим фундаментальную матрицу W.

Соотношение (3.8) также легко выводится из тождества (2.3). Умножая (2.3) справа на W, а слева на W^* и учитывая равенства $\dot W = AW$, $\dot W^* = W^*A^*$, получаем

$$W^*\dot BW + W^*B\dot W + \dot W^*BW = 0.$$

Но это соотношение эквивалентно (3.8).

Из тождества (3.8) вытекает, что

$$|B(t)|w^2(t) = \alpha = \mathrm{const}\,. \tag{3.9}$$

При этом знаки определителя матрицы B и постоянной α совпадают. После этих замечаний формула (3.6) сразу же следует из (3.4) и (3.9). Теорема 3.1 доказана.

В случае, когда матрицы $A(t)$ и $B(t)$ периодичны с одним и тем же периодом $\tau > 0$, можно воспользоваться результатами эргодической теории. Пусть $x(t, x_0)$ – решение линейной системы (2.1) с начальным условием x_0 при $t = 0$. Ввиду периодичности отображения

$$z \mapsto x(n\tau, z), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

образуют группу.

Предложение 3.3. *Предположим, что матрица* $B(t)$, $t \mod \tau$, *положительно определена при всех значениях* t *и пусть* $D \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная измеримая подобласть, имеющая положительную меру Лебега. Тогда для почти всех начальных данных* $x_0 \in D$ *точка* $x(n\tau, x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, *бесконечно много раз попадёт в область* D.

В частности, для почти всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение с начальным данным x_0 бесконечно много раз (при $t \to \infty$) будет сколь угодно мало отличаться от x_0.

Докажем предложение 3.3. Согласно теореме 3.1 система (2.1) имеет инвариантную меру с τ-периодической по t плотностью. Следовательно, отображение (3.10) сохраняет обычную меру в $\mathbb{R}^n$. Далее, ввиду положительной определённости τ-периодической матрицы $B(t)$ ограниченная измеримая область D расположена в области

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (B(0)x, x) \leqslant C\}, \tag{3.11}$$

где C – достаточно большая положительная константа. Все области вида (3.11), очевидно, инвариантны при отображении (3.10), и их мера конечна. Значит, можно воспользоваться классической теоремой Пуанкаре о возвращении траекторий.

Замечание. Если периодическая матрица $B(t)$ не является положительно определённой, но невырождена, то справедлива теорема Хопфа: для почти всех начальных условий решение линейной системы либо бесконечно много раз (при $t \to \infty$) подходит сколь угодно близко к начальному условию, либо уходит в бесконечность.

4. Квадратичные интегралы. Всегда ли линейная система дифференциальных уравнений (2.1) имеет невырожденный квадратичный интеграл? Ответ оказывается положительным.

Предложение 4.1. *Если матрица $A(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то линейная система (2.1) допускает квадратичный первый интеграл (2.2), причём симметрическая матрица $B(t)$ непрерывно дифференцируема и $B(t) > 0$ при всех t.*

Действительно, пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ – линейно независимые решения сопряжённой системы (2.4). Тогда, согласно Лагранжу, линейные функции

$$f_1 = (x, y_1(t)), \quad \ldots, \quad f_n = (x, y_n(t))$$

будут первыми интегралами линейной системы (2.1). Далее,

$$f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x, y_k(t))^2 \tag{4.1}$$

– квадратичный первый интеграл системы (2.1).

Покажем, что эта квадратичная форма положительно определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Другими словами, если форму (4.1) представить в виде (2.2), то $B(t) > 0$. Предположим противное, т.е. $f = 0$ при некотором $x \neq 0$. Но тогда все векторы $y_1, \ldots, y_n$ в некоторый момент времени будут ортогональны x. Следовательно, они лежат в $(n-1)$-мерном пространстве, проходящем через начало координат и ортогональном вектору x. Но это противоречит их линейной независимости. Что и требовалось.

Замечания.

1. Пусть Y – фундаментальная матрица сопряжённой системы, состоящая из вектор-столбцов линейно независимых решений $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$. Если вектор-столбцы сопряжённой матрицы Y^* (тоже невырожденной) обозначить через $a_1(t),\ \ldots,\ a_n(t)$, то матрица B будет матрицей Грама набора векторов $a_1,\ \ldots,\ a_n$.

2. Не следует думать, что квадратичная форма (4.1) будет функцией Ляпунова для линейной системы (2.1). Для этого необходимо ещё условие её положительной определённости:

$$f(x,t) \geqslant c\|x\|^2, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Например, если A – единичная матрица, то это условие заведомо не выполняется.

3. Кроме невырожденного интеграла (4.1) линейная система (2.1) имеет целое семейство невырожденных квадратичных интегралов

$$f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k f_k^2,$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_n$ – ненулевые вещественные числа. Среди таких интегралов ровно n функционально независимых.

4. Пусть $A = \mathrm{const}$. Тогда линейная система (2.1) в общем случае не допускает ненулевых квадратичных интегралов, не зависящих от времени. Самый простой пример: A – единичная $n \times n$-матрица. Однако (по предложению 4.1) для системы (2.1) зависящие от времени невырожденные квадратичные интегралы всегда существуют.

Предложение 4.1 неконструктивно: чтобы указать квадратичный интеграл, надо прежде решить сопряжённую систему. В ряде случаев можно указать целую серию квадратичных интегралов, если известен один из них.

Предложение 4.2. *Если* $A = \mathrm{const}$, *то линейная система (2.1) допускает квадратичные интегралы*

$$f_k = \frac{1}{2}(A^{*k}B(t)A^k x, x), \quad k \geqslant 0. \tag{4.2}$$

При $k = 0$ имеем исходный интеграл (2.2). Если матрица A обратима, то в формуле (4.2) число k может быть произвольным целым. Конечно, среди бесконечного набора квадратичных интегралов (4.2) функционально независимых не более n. Вопрос о точном количестве функционально независимых интегралов среди (4.2) не очевидный.

Доказательство предложения 4.2 совсем простое: все матрицы $B_k(t) = A^{*k}B(t)A^k$ удовлетворяют соотношению (2.3).

5. Степени асимптотической устойчивости и неустойчивости. Если матрица $A(t)$ ограничена, то все решения линейной системы имеют конечные характеристические показатели. Назовём *степенью асимптотической устойчивости* системы (2.1) и обозначим через a количество отрицательных элементов (с учётом кратности) её спектра. Если весь спектр лежит слева от нуля $(a = n)$, то линейная система (2.1) асимптотически устойчива. Будем называть *степенью неустойчивости* и обозначать через u количество положительных элементов (с учётом кратности) в спектре линейной системы (2.1). Если $B(t)$ – матрица Ляпунова и линейная система (2.1) правильная, то (по теореме 2.1) $a = u$.

Пусть i^- и i^+ – индексы инерции квадратичной формы (2.2) – первого интеграла линейной системы (2.1). Согласно следствию 3.3 эти целые числа не зависят от времени.

Квадратичную форму $(B(t)x, x)$ назовём *приводимой*, если существует матрица Ляпунова $L(t)$ такая, что

$$L^*(t)B(t)L(t) = C$$

– постоянная матрица. Эту квадратичную форму можно разными способами приводить к форме с постоянными коэффициентами. Например, согласно следствию 3.3, квадратичный интеграл линейной системы приводится с помощью её фундаментальной матрицы W. Однако $W(t)$ будет матрицей Ляпунова только для устойчивой линейной системы. Квадратичная форма приводима в том и только том случае, когда $B(t) = L_1^*(t)C_1L_1(t)$, где C_1 – постоянная матрица, а $L_1(t)$ – некоторая матрица Ляпунова.

Теорема 5.1. *Если матрица* $A(t)$ *ограничена, а (2.2) – приводимая квадратичная форма, то*

$$a \leqslant \min\{i^-, i^+\}. \tag{5.1}$$

Следствие 5.1. *Если, кроме того, система (2.1) правильная, то*

$$u \leqslant \min\{i^-, i^+\}.$$

В качестве иллюстрации обратимся к примеру из введения: это уравнение второго порядка (1.3) в предположении, что элементы кососимметрической матрицы $G(t)$ ограничены. Напомним, что *степенью неустойчивости Пуанкаре* p механической системы называется отрицательный индекс инерции квадратичной формы V – потенциальной энергии системы. Очевидно, что в невырожденном случае (когда $|P| \neq 0$) индексы инерции квадратичной формы (1.4) (первого интеграла уравнения (1.3)) равны $i^- = p$, $i^+ = 2n - p \geqslant p$. В частности, $\min\{i^-, i^+\} = p$. Таким образом, из теоремы 5.1 вытекает неравенство для степени асимптотической устойчивости линейной системы (1.3): $a \leqslant p$. В автономном случае (когда матрица гироскопических сил не зависит от времени) $a = u$ и поэтому $u \leqslant p$. Это неравенство установлено в работе [9] (см. также [10]).

Доказательство теоремы 5.1. Приведём квадратичную форму (2.2) к виду, не зависящему от времени (теперь $B = \mathrm{const}$). При таком преобразовании её индексы инерции не изменятся. Точно также у преобразованной линейной системы (2.1) набор показателей Ляпунова (следовательно, и её спектр) останется неизменным.

Пусть $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < 0$ – часть спектра линейной системы, лежащая слева от нуля, и пусть n_1, n_2, $\ldots$, n_s – соответственно кратности этих точек спектра. Пусть N_s –

максимальное число линейно независимых решений системы (2.1), обладающих характеристическим показателем α_s.

Введём множество Γ_s всех решений $x(t)$, включая нулевое, характеристические показатели которых не превосходят числа α_s. Из известных свойств характеристических показателей следует, что если $x_1(t), x_2(t) \in \Gamma_s$, то

1) $cx_j(t) \in \Gamma_s$, $c = \mathrm{const}$;

2) $x_1(t) + x_2(t) \in \Gamma_s$.

Следовательно, Γ_s – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Известно, что [8, гл. III, § 4]

$$N_s = \dim \Gamma_s \tag{5.2}$$

и

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = N_s. \tag{5.3}$$

Так как все α_j отрицательны, то $(Bx(t), x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t)$ из пространства Γ_s. Поскольку квадратичная форма (2.2) – первый интеграл, то все эти решения (точнее, их траектории) лежат в конусе

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : (Bx, x) = 0\}. \tag{5.4}$$

В каждый момент времени t совокупность векторов $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ – решения из Γ_s, будет плоскостью $\Sigma(t)$, проходящей через начало координат и размерность которой равна $\dim \Gamma_s$. В геометрии такие плоскости называются *сингулярными*: они целиком лежат в изотропном конусе (5.4). Хорошо известно, что размерность каждой сингулярной плоскости не превосходит

$$\min\{i^-, i^+\} \tag{5.5}$$

(см., например, [11, гл. 13.2]). С учётом равенств (5.2) и (5.3) получаем, что число точек отрицательной части спектра линейной системы (2.1) (с учётом кратности) не превосходит величины (5.5). Откуда вытекает искомое неравенство (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. № 6. С. 900–906.
2. *Трещёв Д.В., Шкаликов А.А.* О гамильтоновости линейных динамических систем в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 911–918.
3. *Козлов В.В.* Квадратичные законы сохранения уравнений математической физики // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75. № 3. С. 253–304.
4. *Козлов В.В., Карапетян А.А.* О степени устойчивости // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
5. *Kozlov V.V.* Linear Hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // Regul. Chaotic. Dyn. 2018. V. 23. № 1. P. 26–46.
6. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. № 25. С. 249–294.
7. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
9. *Wimmer H.K.* Inertia theorems for matricies, controllability and linear vibratios // Linear Algebra Appl. 1974. № 8. P 337–343.
10. *Shkalikov A.A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Oper. Theory Adv. Appl. V. 87. Basel, 1996. P. 358–385.
11. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М., 1984.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
После доработки 25.12.2020 г.
Принята к публикации 28.12.2020 г.