ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 196–202

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2021 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Для линейной периодической системы дифференциальных уравнений указан метод, позволяющий найти в явной форме матрицу, подобную матрице отображения Пуанкаре.

DOI: 10.31857/S0374064121020072

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой 2ω-периодической $n \times n$-матрицей $P(t)$.

Для 2ω-периодических линейных систем известна [1, с. 183; 2, с. 79] теорема Флоке, согласно которой фундаментальная матрица решений $X(t)$ периодической системы (1) представима в виде $X(t) = \Phi(t)e^{A_0 t}$, где $\Phi(t)$ – 2ω-периодическая матрица, а A_0 – постоянная матрица, которая, в частности, определяет наличие у системы (1) периодических решений и их устойчивость.

Важную роль в исследовании периодических решений дифференциальных систем играет отображение Пуанкаре, или отображение за период, [3, с. 209] (см. также [4, с. 216], где дано определение отображения Пуанкаре и для параболических уравнений в частных производных).

В 1984 г. Мироненко В.И. ввёл понятие отражающей функции [5]. Дальнейшее применение этого понятия показало его большую эффективность при изучении обыкновенных дифференциальных систем.

Основные работы авторов на русском языке, относящиеся к этой тематике, опубликованы преимущественно в журнале “Дифференциальные уравнения”. Ключевые положения теории отражающей функции последовательно и систематически изложены в монографиях [6, 7]. Англоязычные работы [8–10] содержат существенные результаты, не вошедшие в эти монографии.

Отметим появление серьёзных исследований по теории отражающей функции, опубликованных зарубежными математиками в научных журналах на английском и китайском языках. Значимая часть этих исследований обобщена в монографии [11].

Приведём сведения, необходимые для понимания статьи.

Отражающая функция $F(t,x)$ дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

связывает прошлое состояние $x(-t)$ этой системы с её будущим состоянием $x(t)$ формулой $x(-t) = F(t, x(t))$. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}X(t,x) + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

Если $F(t,x)$ является отражающей функцией 2ω-периодической системы (2) с продолжимыми на отрезок $[-\omega,\omega]$ решениями, то отображение Пуанкаре этой системы за период $[-\omega,\omega]$ задаётся соответствием $x \mapsto F(-\omega,x)$. Этим объясняется целесообразность применения отражающей функции к изучению периодических систем дифференциальных уравнений.

В частности, если система (2) 2ω-периодична и нечётна по t, т.е. $X(-t,x)+X(t,x)\equiv 0$, то, как легко проверить, $F(t,x)\equiv x$ и, значит, все продолжимые на $[-\omega,\omega]$ решения такой системы являются 2ω-периодичными. Таким образом, отображение за период $[-\omega,\omega]$ иногда удаётся найти даже для систем, неинтегрируемых в квадратурах.

Для линейных систем (1), о которых будет идти речь в этой статье, теория отражающей функции особенно прозрачна – потому, в частности, что все решения линейной системы продолжимы на $\mathbb{R}$. Приведём основные свойства отражающей функции для линейной системы (1). Доказательства этих фактов настолько просты, что могут быть получены без особых усилий; при желании эти доказательства можно найти в [6, с. 30–31; 7, с. 91].

1. Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (1), матрица коэффициентов которой не обязательно периодическая. Отражающая функция этой системы линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x = X(-t)X^{-1}(t)x$.

Матрица $F(t) = X(-t)X^{-1}(t)$ называется *отражающей матрицей* системы (1). Если $F(t)$ – отражающая матрица системы (1), то для любого решения $x(t)$ системы (1) при всех $t\in\mathbb{R}$ верно соотношение $x(-t)=F(t)x(t)$.

2. Дифференцируемая матрица $F(t)$ является отражающей матрицей системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{dF}{dt}+FP(t)+P(-t)F=0,\quad F(0)=E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

3. Если матрица $P(t)$ нечётна по t, то отражающая матрица системы (1) является единичной матрицей, т.е. $F(t)\equiv E$, и все решения этой системы чётны.

4. Если $F(t)$ – отражающая матрица 2ω-периодической системы (1), то её отображение за период $[-\omega,\omega]$ задаётся формулой $x(\omega)=F(-\omega)x(-\omega)$.

Таким образом, матрица $F(-\omega)$ является матрицей отображения Пуанкаре на периоде $[-\omega,\omega]$.

Основные результаты. Далее для всякой функции $P(t)$ через $P_{\text{ч}}$ и $P_{\text{н}}$ будем обозначать её чётную и нечётную части, т.е.

$$P_{\text{ч}}(t):=\frac{1}{2}(P(t)+P(-t)),\quad P_{\text{н}}(t):=\frac{1}{2}(P(t)-P(t)).$$

Теорема 1. *Пусть для $n\times n$-матриц $A(t)$, $S(t)$, $\Phi(t)$, из которых $A(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $S(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и нечётна, $\Phi(t)$ дифференцируема и не вырождается на $\mathbb{R}$, выполняются условия*

$$P_{\text{ч}}\Phi=\Phi A;\quad \frac{d\Phi}{dt}=P_{\text{н}}(t)\Phi+\Phi S(t).$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ – чётная, а отражающая матрица $F(t)$ системы $dx/dt=P(t)x$ задаётся формулой $F(t)=\Phi(t)B(t)\Phi^{-1}(t)$, где $B(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{dB}{dt}+BA(t)+A(t)B+S(t)B-BS(t)=0,\quad B(0)=E.$$

Доказательство. Чётность матрицы $\Phi(t)$ следует из свойства 3 отражающей матрицы, так как элементы матрицы $\Phi(t)$ удовлетворяют дифференциальной системе с нечётными коэффициентами. Проверим выполнение основного соотношения для отражающей матрицы:

$$F'+FP(t)+P(-t)F=\Phi'B\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P(t)+P(-t)\Phi B\Phi^{-1}=$$

$$=(P_{\text{н}}\Phi+\Phi S)B\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}(P_{\text{н}}\Phi+\Phi S)\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P(t)+P(-t)\Phi B\Phi^{-1}=$$

$$=P_{\text{н}}\Phi B\Phi^{-1}+\Phi SB\Phi^{-1}-\Phi B\Phi^{-1}P_{\text{н}}-\Phi BS\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}(P_{\text{ч}}+P_{\text{н}})+(P_{\text{ч}}-P_{\text{н}})\Phi B\Phi^{-1}=$$

$$=\Phi SB\Phi^{-1}-\Phi BS\Phi^{-1}+\Phi B'\Phi^{-1}+\Phi B\Phi^{-1}P_{\text{ч}}+P_{\text{ч}}\Phi B\Phi^{-1}=\Phi(B'+BA+AB+SB-BS)\Phi^{-1}=0.$$

Основное соотношение выполнено. Теорема доказана.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1, то матрица $F(-\omega)$ отображения Пуанкаре системы (1) на периоде $[-\omega,\omega]$ задаётся формулой $F(-\omega)=\Phi(\omega)B(-\omega)\Phi^{-1}(\omega)$.*

Доказательство следует из свойства 4 отражающей матрицы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $P(t)$ – непрерывно дифференцируемая 2ω-периодическая $n\times n$-матрица;

2) $A=A(t)$ – чётная $n\times n$-матрица, подобная матрице $P_ч(t)$ и коммутирующая со своим интегралом $\int_0^t A(\tau)\,d\tau$;

3) существуют нечётные непрерывные на $\mathbb{R}$ скалярные функции $\alpha_k(t)$ $(k=\overline{0,n-1})$, для которых справедливы соотношения

$$\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_ч^k,\quad \frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kA^k;$$

4) матрица $\Phi(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d\Phi}{dt}=P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt},\quad \Phi(\omega)=\Phi_\omega,$$

где матрица Φ_ω находится из условия $P_ч(\omega)\Phi_\omega=\Phi_\omega A(\omega)$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

i) матрица $\Phi(t)$ является чётной, 2ω-периодической и удовлетворяет тождеству

$$P_ч(t)\Phi(t)\equiv\Phi(t)A(t);$$

ii) отражающая матрица $F(t)$ системы (1) задаётся формулой

$$F(t)=\Phi(t)\exp\biggl(-2\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau\biggr)\Phi^{-1}(t);$$

iii) для матрицы отображения Пуанкаре за период $[-\omega,\omega]$ справедлива формула

$$F(-\omega)=\Phi(\omega)\exp\biggl(2\int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau\biggr)\Phi^{-1}(\omega).$$

Доказательство. Чётность и 2ω-периодичность матрицы $\Phi(t)$ следует из приведённых выше свойств 3 и 4.

Далее будем пользоваться следующим легко проверяемым тождеством:

$$P_ч^k\Phi-\Phi A^k=\sum_{j=1}^{k}P_ч^{k-j}(P_ч\Phi-\Phi A)A^{j-1}.$$

Пусть $\Delta:=P_ч\Phi-\Phi A$. Тогда

$$\frac{d\Delta}{dt}=\frac{dP_ч}{dt}\Phi+P_ч\frac{d\Phi}{dt}-\frac{d\Phi}{dt}A-\Phi\frac{dA}{dt}=\frac{dP_ч}{dt}\Phi+P_ч\biggl(P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt}\biggr)-\biggl(P_н\Phi+\Phi\frac{dA}{dt}\biggr)A-\Phi\frac{dA}{dt}=$$

$$=\biggl(\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч\biggr)\Phi-\Phi\biggl(\frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}\biggr)+P_н(P_ч\Phi-\Phi A)+(P_ч\Phi-\Phi A)\frac{dA}{dt}=$$

$$=\biggl(\frac{dP_ч}{dt}+P_чP_н-P_нP_ч\biggr)\Phi-\Phi\biggl(\frac{dA}{dt}+\frac{dA}{dt}A-A\frac{dA}{dt}\biggr)+P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_ч^k\Phi-\Phi\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kA^k+P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}=P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(P_ч^k\Phi-\Phi A^k)=$$

$$=P_н\Delta+\Delta\frac{dA}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\sum_{j=1}^{k}P_ч^{k-j}\Delta A^{j-1}.$$

Таким образом, элементы матрицы Δ являются решением задачи Коши

$$\frac{d\Delta}{dt} = P_{\text{н}}\Delta + \Delta\frac{dA}{dt} + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\sum_{j=1}^{k}P_{\text{ч}}^{k-j}\Delta A^{j-1}, \quad \Delta(\omega) = 0.$$

Отсюда в силу теоремы существования и единственности [2, с. 19] имеем

$$\Delta(t) = P_{\text{ч}}(t)\Phi(t) - \Phi(t)A(t) \equiv 0,$$

и утверждение i) теоремы доказано.

Так как матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом $\int_0^t A(t)\,d\tau$, то согласно теореме Лаппо-Данилевского [1, с. 117] для матрицы $B(t) := \exp(-2\int_0^t A(\tau)\,d\tau)$ верно соотношение

$$\frac{dB}{dt} = -AB - BA = -2AB.$$

Кроме того,

$$0 = \frac{d}{dt}(AB - BA) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt} - \frac{dB}{dt}A - B\frac{dA}{dt} =$$
$$= \left(\frac{dA}{dt}B - B\frac{dA}{dt}\right) + \left(A\frac{dB}{dt} - \frac{dB}{dt}A\right) = \frac{dA}{dt}B - B\frac{dA}{dt},$$

т.е. матрицы $S := dA/dt$ и B коммутируют между собой. Отсюда следует выполнимость всех условий теоремы 1, а значит, верны и её выводы о виде отражающей матрицы, а также о виде матрицы $F(-\omega)$ отображения Пуанкаре за период $[-\omega, \omega]$.

Лемма. *Если $F(t)$ – отражающая матрица 2ω-периодической системы (1), то для каждого целого k и каждого $t_0 \in [-\omega, \omega]$ верно равенство*

$$x(t_0 + 4k\omega) = F(-t_0 - 2k\omega)x(-t_0).$$

Доказательство. Согласно свойству 1 отражающей матрицы $F(t)$ для любого решения $x(t)$ системы (1) верно равенство $x(-t) = F(t)x(t)$. Хорошо известно, что если $x(t)$ – решение 2ω-периодической системы (1), то $y(t) := x(t + 2k\omega)$ также является решением этой системы. Поэтому при любом $t \in \mathbb{R}$ и любом натуральном k имеет место равенство

$$x(-t + 2k\omega) = F(t)x(t + 2k\omega).$$

Положив здесь $t = -t_0 - 2k\omega$, получим доказываемое соотношение.

Теорема 3. *Пусть отражающая матрица $F(t)$ 2ω-периодической системы (1) ограничена на $(-\infty, 0]$. Тогда любое решение $x(t)$ этой системы ограничено на $\mathbb{R}$, а система (1) устойчива.*

Если при $t \to -\infty$ отражающая матрица $F(t)$ стремится к нулевой матрице, то любое решение $x(t)$ системы (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$ и система (1) асимптотически устойчива при $t \to +\infty$.

Доказательство теоремы следует непосредственно из леммы и теорем 1, 2 из [1, с. 82–83].

Полученные выше результаты применим к изучению двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} x, \tag{4}$$

где $P_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ – чётная и $P_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – нечётная дифференцируемые 2ω-периодические матрицы.

Для собственных значений $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ матрицы $P_ч(t)$ получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (p_n + p_{22})\lambda + (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) = 0.$$

Отсюда находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{p_{11}+p_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21}}}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21} = -b^2 < 0$. В этом случае в качестве матрицы $A(t)$ возьмём матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a := \frac{p_{11}+p_{22}}{2}, \quad b(t) := \frac{\sqrt{-(p_{11}-p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2}.$$

Для выбранной матрицы A существует матрица Φ_ω такая, что $P_ч(\omega)\Phi_\omega = \Phi_\omega A(\omega)$. Определим матрицу $\Phi(t)$ как решение задачи Коши

$$\frac{d\Phi}{dt} = P_н\Phi + \Phi\frac{dA}{dt}, \quad \Phi(\omega) = \Phi_\omega.$$

Тогда, если выполнено условие 3) теоремы 2, то выполнены и все условия этой теоремы. Чтобы установить выполнимость условия 3), нужно доказать, что существуют нечётные скалярные функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$, при которых выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Эти функции определяются формулами

$$\alpha_1 = \frac{1}{b}\frac{db}{dt}, \quad \alpha_0 = \frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}.$$

Подставляя их в использованное нами соотношение, придадим третьему условию форму

$$\frac{dP_ч}{dt} + P_чP_н - P_нP_ч = \left(\frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_ч.$$

Так мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть для системы (4) с дифференцируемой 2ω-периодической матрицей $P(t)$ выполнено условие*

$$\frac{dP_ч}{dt} + P_чP_н - P_нP_ч = \left(\frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_ч,$$

где

$$a = \frac{p_{11}+p_{22}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{-(p_{11}-p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2} > 0.$$

Тогда отражающая матрица $F(t)$ системы (4) задаётся формулой

$$F(t) = \exp(-2\tilde{a}(t))\Phi(t)\begin{pmatrix} \cos(2\tilde{b}(t)) & -\sin(2\tilde{b}(t)) \\ \sin(2\tilde{b}(t)) & \cos(2\tilde{b}(t)) \end{pmatrix}\Phi^{-1}(t),$$

где функции $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ определены равенствами

$$\tilde{a}(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau \quad и \quad \tilde{b}(t) = \int\limits_0^t b(\tau)\,d\tau,$$

а $\Phi(t)$ – чётная матрица, являющаяся решением задачи Коши

$$\frac{d\Phi}{dt} = P_н\Phi - \Phi\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega) = \Phi_\omega,$$

и матрица Φ_ω находится из условия $P_ч(\omega)\Phi_\omega = \Phi_\omega A(\omega)$.

Доказательство. Справедливость теоремы 4 вытекает из теоремы 2 с учётом того, что в рассматриваемом случае

$$\exp\left(-2\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau\right) = \exp(-2\tilde{a}(t))\begin{pmatrix}\cos(2\tilde{b}(t)) & -\sin(2\tilde{b}(t))\\ \sin(2\tilde{b}(t)) & \cos(2\tilde{b}(t))\end{pmatrix}.$$

В качестве следствия из этой теоремы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть для системы (4) выполнены все условия теоремы 4. Тогда:*

1) матрица отображения за период $[-\omega,\omega]$ *этой системы задаётся формулой*

$$F(-\omega) = \exp(2\tilde{a}(\omega))\Phi(\omega)\begin{pmatrix}\cos(2\tilde{b}(\omega)) & \sin(2\tilde{b}(\omega))\\ -\sin(2\tilde{b}(\omega)) & \cos(2\tilde{b}(\omega))\end{pmatrix}\Phi^{-1}(\omega);$$

2) если $\tilde{a}(\omega) < 0,$ *то все решения системы 4 стремятся к нулю при* $t\to+\infty,$ *а система является асимптотически устойчивой;*

3) если $\tilde{a}(\omega) = 0,$ *то все решения системы (4) ограничены на* $\mathbb{R},$ *а система (4) устойчива;*

4) если $\tilde{a}(\omega) = 0,$ *а число* $\omega^{-1}\tilde{b}(\omega) = k/m$ *является рациональным, то все решения системы (4) периодические с периодом* $m\omega.$

В том случае когда $(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21} > 0$ при всех $t\in\mathbb{R},$ мы аналогичным образом приходим к теореме 6.

Теорема 6. *Пусть для* 2ω*-периодической системы (4) выполнено условие*

$$\frac{dP_{ч}}{dt} + P_{ч}P_{н} - P_{н}P_{ч} = \left(\frac{da}{dt} - \frac{a}{b}\frac{db}{dt}\right)E + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}P_{ч},$$

где

$$a = \frac{p_{11}+p_{22}}{2},\quad b = \frac{\sqrt{(p_{11}-p_{22})^2 + 4p_{12}p_{21}}}{2} > 0.$$

Тогда матрица отображения за период $[-\omega,\omega]$ *системы (4) задаётся формулой*

$$F(-\omega) = \exp(2\tilde{a}(\omega))\Phi(\omega)\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,(2\tilde{b}(\omega)) & \mathrm{sh}\,(2\tilde{b}(\omega))\\ \mathrm{sh}\,(2\tilde{b}(\omega)) & \mathrm{ch}\,(2\tilde{b}(\omega))\end{pmatrix}\Phi^{-1}(\omega),$$

где

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix}b(\omega) & p_{11}(\omega) - a(\omega) + p_{12}(\alpha\omega)\\ b(\omega) & p_{21}(\omega) + p_{22}(\omega) - a(\omega)\end{pmatrix}.$$

Зная матрицу $F(-\omega)$ за период $[-\omega,\omega],$ мы можем найти начальные данные 2ω-периодических решений и исследовать характер их устойчивости. Так, система (4) является асимптотически устойчивой, если выполнены неравенства

$$\tilde{a}(\omega) < 0,\quad |\tilde{b}(\omega)| < |\tilde{a}(\omega)|.$$

В заключение сделаем одно полезное замечание. Пусть отражающая матрица F системы (1) полностью определяется чётной частью $P_{ч}$ матрицы коэффициентов, т.е.

$$\frac{dF}{dt} + FP_{ч} + P_{ч}F = 0.$$

Тогда, вычитая это тождество из тождества (3), т.е. из тождества

$$\frac{dF}{dt} + F(P_{ч}+P_{н}) + (P_{ч}-P_{н})F = 0,$$

придём к тождеству $P_{н}F = FP_{н},$ используя которое вместе с его производной получаем возможность полностью определить матрицу $F,$ а значит, и отображение Пуанкаре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1990.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
5. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
6. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
7. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
8. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* How to construct equivalent differential systems // Appl. Math. Let. 2009. V. 22. P. 1356–1359.
9. *Mironenko V.I., Mironenko V.V.* Time symmetries and in-period transformations // Appl. Math. Let. 2011. V. 24. P. 1721–1723.
10. *Мироненко В.И., Мироненко В.В.* The new method for the searching periodic solutions of periodic differential systems // J. of Appl. Anal. and Comp. 2016. V. 6. № 3. P. 876–883.
11. *Zhou Zhengxin.* The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 20.03.2020 г.
После доработки 20.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.