ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 203–209

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. М. Кобилзода

Для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости исследован вопрос о существовании периодических решений. В условиях априорной оценки периодических решений: 1) установлена гомотопическая инвариантность свойства разрешимости периодической задачи; 2) приведено описание гомотопических классов; 3) доказана теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости периодической задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121020084

Введение. В работе изучается периодическая задача

$$z' = P(t,z) + f(t,z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad t \in (0,2\pi), \quad z(0) = z(2\pi), \tag{1}$$

где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $z = x+iy$, $P \in \mathcal{P}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$, $m > 1$. Здесь $\mathcal{P}_m$ – множество отображений $P : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $P(t,z)$ непрерывно по совокупности переменных и 2π-периодично по t;

б) $P(t,\lambda z) \equiv \lambda^m P(t,z)$ при любом $\lambda > 0$, т.е. $P(t,z)$ положительно однородно по z;

в) при любом фиксированном $t_0 \in [0,2\pi]$ автономная система

$$w' = P(t_0,w) \tag{2}$$

не имеет ненулевых ограниченных траекторий.

Множество $\mathcal{R}_m$ состоит из непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которые 2π-периодичны по t и удовлетворяют условию

$$\lim_{|z|\to\infty} \Big(|z|^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(t,z)|\Big) = 0.$$

Задача (1), как и в работах [1; 2, с. 331–335; 3], исследуется методом априорной оценки и методом вычисления вращения векторных полей. В настоящей работе получены следующие результаты:

1) установлена гомотопическая инвариантность свойства разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$;

2) приведено описание гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$;

3) для $P \in \mathcal{P}_m$ сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$.

При исследовании разрешимости задачи (1), как в работе [3], выведена формула вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля, порождённого этой задачей.

Схема исследования, приводящего к результатам 1)–3), ранее реализована в работах [4, 5] применительно к третьей двухточечной краевой задаче для скалярных и двумерных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Основные результаты. Два отображения $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$ назовём *гомотопными* и обозначим $Q_1 \sim Q_2$, если существует семейство отображений $Q(t,z,\lambda)$, принадлежащее при каждом фиксированном $\lambda \in [0,1]$ множеству $\mathcal{P}_m$, непрерывное по совокупности переменных и такое, что $Q(t,z,0) = Q_1(t,z)$, $Q(t,z,1) = Q_2(t,z)$. Гомотопность отображений является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{P}_m$, а его классы эквивалентности называются *гомотопическими классами*. Таким образом, множество $\mathcal{P}_m$ разбивается на гомотопические классы. В каждом гомотопическом классе сохраняется свойство разрешимости задачи (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$. Именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Если $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$, $Q_1 \sim Q_2$ и для $P = Q_1$ задача (1) разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$, то для $P = Q_2$ задача (1) также разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$.*

Теорему 1 можно считать теоремой типа Лере–Шаудера [6, с. 417], которая обеспечивает возможность продолжения по параметру решения задачи (1).

Для описания гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$ определим для $P \in \mathcal{P}_m$ два целых числа: $\gamma_0(P)$ – вращение двумерного векторного поля $e^{i\varphi} \mapsto P(t_0, e^{i\varphi})$ при фиксированном t_0, $\gamma_1(P)$ – вращение двумерного векторного поля $e^{it} \mapsto P(t, w_0)$ при фиксированном $w_0 \neq \neq 0$. Числа $\gamma_0(P)$ и $\gamma_1(P)$ не зависят от выбора значений t_0 и w_0, так как $P(t,w) \neq 0$ при любых t и $w \neq 0$. Кроме того, если $P \sim Q$, то $\gamma_0(P) = \gamma_0(Q)$ и $\gamma_1(P) = \gamma_1(Q)$. Для $P \in \mathcal{P}_m$, согласно формуле из монографии [7, с. 205], справедливо неравенство $\gamma_0(P) \leqslant 1$.

В следующей теореме даётся описание гомотопических классов множества $\mathcal{P}_m$.

Теорема 2. *Пусть $P \in \mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P) = p_0$, $\gamma_1(P) = p_1$. Тогда если $p_0 < 1$, то имеет место гомотопия $P \sim e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$, а если $p_0 = 1$, то $P \sim |z|^{m-1} z$ или $P \sim |z|^{m-1}(-z)$.*

При доказательстве теоремы 2 существенно используется свойство Гомори автономных систем вида (2), не имеющих ненулевых ограниченных траекторий (см. [2, с. 84–85; 8]).

Таким образом, согласно теореме 2, множество тех $P \in \mathcal{P}_m$, для которых $\gamma_0(P) < 1$, состоит из счётного числа гомотопических классов, параметризованных парами чисел (p_0, p_1), где $p_0 \in -\mathbb{N} \bigcup \{0\}$ и $p_1 \in \mathbb{Z}$, и содержащих отображения $e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$. Множество же тех $P \in \mathcal{P}_m$, для которых $\gamma_0(P) = 1$, состоит из двух гомотопических классов, в одном из которых содержится отображение $|z|^{m-1} z$, а в другом – отображение $|z|^{m-1}(-z)$. Следовательно, в случае $\gamma_0(P) = 1$ имеет место равенство $\gamma_1(P) = 0$.

Относительно разрешимости задачи (1) верна следующая

Теорема 3. *Для $P \in \mathcal{P}_m$ задача (1) разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0(P) \neq 0$.*

Разрешимость задачи (1) доказана с помощью вычисления вращения $\gamma_\infty(\Phi)$ вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(z) \equiv z(t) - z(2\pi) - \int_0^t (P(s, z(s)) + f(s, z(s)))\, ds \tag{3}$$

на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$. Если $\gamma_\infty(\Phi)$ определено и отлично от нуля, то, согласно принципу ненулевого вращения [2, с. 324], существует нуль векторного поля $\Phi(z)$, который будет решением задачи (1). Из результатов работ [1; 2, с. 334] следует, что если $P \in \mathcal{P}_m$ и P не зависит от t, то $\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_0(P)$. Для вычисления вращения $\gamma_\infty(\Phi)$ в доказательстве теоремы 3 выведена для любого $P \in \mathcal{P}_m$ следующая формула (аналогичная формуле работы [3]):

$$\gamma_\infty(\Phi) = \begin{cases} \gamma_0(P), & \text{если } \gamma_0(P) < 1 \text{ и } \gamma_1(P)/(1 - \gamma_0(P)) \text{ – целое,} \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

2. Доказательство теоремы 1. Пусть отображения $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_m$ гомотопны посредством семейства $Q(t, z, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, где $Q(t, z, 0) = Q_1(t, z)$, $Q(t, z, 1) = Q_2(t, z)$. Сначала докажем лемму, из которой будет следовать общая априорная оценка 2π-периодических решений, соответствующих семейству $Q(t, z, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, при любом $f \in \mathcal{R}_m$. В пространстве $C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ определим норму формулой

$$\|z\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |z(t)|.$$

Лемма. *Существуют числа $M > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что для каждой функции $z \in \in C^1([0, 2\pi]; \mathbb{C})$, $\|z\| \geqslant M$, верна оценка*

$$\|z' - Q(\,\cdot\,, z, \lambda)\| + |z(0) - z(2\pi)|^m \geqslant \sigma \|z\|^m \tag{5}$$

при любом значении $\lambda \in [0, 1]$.

Доказательство. Предположим, что оценка (5) не верна. Тогда существуют последовательности $z_n \in C^1([0,2\pi];\mathbb{C})$ и $\lambda_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\|z_n' - Q(\,\cdot\,, z_n, \lambda_n)\| + |z_n(0) - z_n(2\pi)|^m < \frac{1}{n}\|z_n\|^m, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\rho_n := \|z_n\| = |z_n(t_n)| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Можно считать, что $t_n \to t_0$ и $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$.

Пусть $t_n\rho_n^{m-1} \to \infty$ и $(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность функций

$$w_n(t) = \rho_n^{-1} z_n(t_n + t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [-t_n\rho_n^{m-1}, (2\pi - t_n)\rho_n^{m-1}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|w_n(t)| \leqslant |w_n(0)| = 1, \quad |w_n'(t) - Q(t_n + t\rho_n^{1-m}, w_n(t), \lambda_n)| < \frac{1}{n}, \quad t \in [-t_n\rho_n^{m-1}, (2\pi - t_n)\rho_n^{m-1}].$$

Последовательность функций $\{w_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Переходя к пределу на расширяющихся отрезках, получим функцию $w_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами:

$$|w_0(t)| \leqslant |w_0(0)| = 1, \quad w_0'(t) = Q(t_0, w_0(t), \lambda_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Существование такой функции $w_0(t)$ противоречит тому, что $Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_0) \in \mathcal{P}_m$.

В случае, когда $t_n\rho_n^{m-1} \to \tau_0$ при $n \to \infty$ и $\tau_0 < \infty$, рассмотрим две последовательности функций

$$w_n^+(t) = \rho_n^{-1} z_n(t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [0, 2\pi\rho_n^{m-1}], \quad w_n^-(t) = \rho_n^{-1} z_n(2\pi + t\rho_n^{1-m}), \quad t \in [-2\pi\rho_n^{m-1}, 0].$$

Для этих функций имеем

$$|w_n^+(t)| \leqslant |w_n^+(t_n\rho_n^{m-1})| = 1, \quad |w_n^-(t)| \leqslant |w_n^-(-(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1})| = 1,$$

$$|w_n^+(0) - w_n^-(0)|^m < \frac{1}{n},$$

$$|(w_n^\pm)'(t) - Q(t\rho_n^{1-m}, w_n^\pm(t), \lambda_n)| < \frac{1}{n}, \quad \pm t \in [0, 2\pi\rho_n^{m-1}].$$

Переходя к пределу, получим две ограниченные функции $w_0^\pm(t)$, $\pm t \in [0, +\infty)$, которые обладают следующими свойствами:

$$(w_0^\pm)'(t) = Q(0, w_0^\pm(t), \lambda_0), \quad \pm t \in (0, +\infty), \quad w_0^+(0) = w_0^-(0), \quad |w_0^+(\tau_0)| = 1.$$

Но это противоречит включению $Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_0) \in \mathcal{P}_m$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $(2\pi - t_n)\rho_n^{m-1} \to \tau_1$ при $n \to \infty$ и $\tau_1 < \infty$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Следствие. *Если $f \in \mathcal{R}_m$ и $|f(t,w)| \leqslant \varepsilon|w|^m + M_\varepsilon$, где $\varepsilon \in [0,\sigma)$, то для 2π-периодических решений семейства уравнений*

$$z' = Q(t, z, \lambda) + \mu f(t, z), \quad \lambda, \mu \in [0,1], \tag{6}$$

имеет место априорная оценка

$$\|z\| \leqslant \max(M, (M_\varepsilon(\sigma - \varepsilon)^{-1})^{1/m}).$$

Действительно, если функция $z(t)$ является 2π-периодическим решением (6) при некоторых $\lambda, \mu \in [0,1]$, то либо $\|z\| \leqslant M$, либо $\|z\| > M$ и в силу леммы имеем

$$\sigma\|z\|^m \leqslant \mu\|f(\,\cdot\,,z)\| \leqslant \varepsilon\|z\|^m + M_\varepsilon, \quad \|z\| \leqslant (M_\varepsilon(\sigma-\varepsilon)^{-1})^{1/m}.$$

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 1.

Разобьём отрезок $[0,1]$ изменения параметра λ на k равных частей точками $\lambda_j = j/k$, $j = \overline{0,k}$, так, чтобы при любых $j = \overline{1,k}$ и $z \in \mathbb{C}$ выполнялось неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |Q(t,z,\lambda_j) - Q(t,z,\lambda_{j-1})| < \frac{\sigma}{4}|z|^m,$$

где σ – число, определяемое леммой.

Покажем индукцией по $j = 1,\ldots,k$, что если для $P = Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_{j-1})$ задача (1) разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$, то для $P = Q(\,\cdot\,,\cdot\,,\lambda_j)$ задача (1) также разрешима при любом $f \in \mathcal{R}_m$. Этим самым теорема 1 будет доказана.

Пусть $f \in \mathcal{R}_m$ и $|f(t,z)| < (\sigma/4)|z|^m + M_1$. Выберем $R > M$, $R^m > 2M_1/\sigma$, где M – число из леммы, и положим

$$f_R(t,z) = \eta_R(|z(t)|)[Q(t,z,\lambda_j) - Q(t,z,\lambda_{j-1})] + f(t,z),$$

где $\eta_R(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – непрерывная неотрицательная возрастающая функция, равная нулю при $s \geqslant R{+}1$ и равная единице при $s \leqslant R$. Очевидно, $f_R \in \mathcal{R}_m$. По предположению индукции существует 2π-периодическое решение $z_R(t)$ системы уравнений

$$z' = Q(t,z,\lambda_{j-1}) + f_R(t,z).$$

Проверим, что $\|z_R\| < R$. Тогда функция $z_R(t)$ будет 2π-периодическим решением системы уравнений

$$z' = Q(t,z,\lambda_j) + f(t,z).$$

Действительно, для $z_R(t)$ имеем

$$\|z_R' - Q(\,\cdot\,,z_R,\lambda_{j-1})\| = \|f_R(\,\cdot\,,z)\| \leqslant \frac{\sigma}{2}\|z_R\|^m + M_1 < \frac{\sigma}{2}\|z_R\|^m + \frac{\sigma}{2}R^m.$$

Отсюда следует, что если $\|z_R\| \geqslant R$, то $\|z_R\| > M$ и выполнено неравенство

$$\|z_R' - Q(\,\cdot\,,z_R,\lambda_{j-1})\| < \sigma\|z_R\|^m,$$

что противоречит лемме. Следовательно, $\|z_R\| < R$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $P \in \mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P) = p_0$, $\gamma_1(P) = p_1$. Так как $P(t,z) \neq 0$ при любых t и $z \neq 0$, то верно представление $P(t,e^{i\varphi}) = |P(t,e^{i\varphi})|e^{i\theta(t,\varphi)}$, где $0 \leqslant \theta(0,0) < 2\pi$. Для угловой функции $\theta(t,\varphi)$ по определению вращения двумерного векторного поля имеем $\theta(t,2\pi) - \theta(t,0) = 2\pi p_0$, $\theta(2\pi,\varphi) - \theta(0,\varphi) = 2\pi p_1$.

Рассмотрим случай $p_0 < 1$. В этом случае, как показано в работах [2, с. 84–85; 3; 8], условие в) – одно из условий принадлежности отображения P множеству $\mathcal{P}_m$ – равносильно следующему условию:

в$'$) если при некоторых $t_0, \varphi_0 \in [0,2\pi)$ и целом k_0 справедливо равенство $\theta(t_0,\varphi_0) - \varphi_0 = \pi k_0$, то при $\varphi > \varphi_0$ выполняется неравенство $\theta(t_0,\varphi) - \varphi < \pi(k_0+1)$ (свойство Гомори).

Учитывая условие в$'$) и пользуясь представлениями $z = |z|e^{i\varphi}$, $P(t,z) = |z|^m P(t,e^{i\varphi})$, несложно проверить, что имеют место следующие гомотопии:

1) $P(t,z)$ гомотопно $P_1(t,z) \equiv |z|^m e^{i\theta_1^{(1)}(t,\varphi)}$ посредством семейства отображений

$$[(1-\lambda)|P(t,e^{i\varphi})| + \lambda]|z|^m e^{i\theta_\lambda^{(1)}(t,\varphi)}, \quad \lambda \in [0,1],$$

где

$$\theta_\lambda^{(1)}(t,\varphi) = \varphi + (1-\lambda)(\theta(t,\varphi)-\varphi) + \lambda \min_{0\leqslant s\leqslant\varphi}(\theta(t,s)-s);$$

2) $P_1(t,z)$ гомотопно $P_2(t,z) \equiv |z|^m e^{i[\theta(t,0)+p_0\varphi]}$ посредством семейства отображений $|z|^m \times$ $\times\, e^{i\theta_\lambda^{(2)}(t,\varphi)}$, $\lambda\in[0,1]$, где

$$\theta_\lambda^{(2)}(t,\varphi) = (1-\lambda)[\varphi + \min_{0\leqslant s\leqslant\varphi}(\theta(t,s)-s)] + \lambda[\theta(t,0)+p_0\varphi];$$

3) $P_2(t,z)$ гомотопно $P_3(t,z) \equiv |z|^{m-p_0} z^{p_0} e^{i[\theta(0,0)+p_1 t]}$ посредством семейства отображений $|z|^{m-p_0} z^{p_0} e^{i\theta_\lambda^{(3)}(t,\varphi)}$, $\lambda\in[0,1]$, где

$$\theta_\lambda^{(3)}(t,\varphi) = (1-\lambda)\theta(t,0) + \lambda[\theta(0,0)+p_1 t];$$

4) $P_3(t,z)$ гомотопно $P_4(t,z)\equiv|z|^{m-p_0}z^{p_0}e^{ip_1t}$ посредством семейства отображений $|z|^{m-p_0}\times$ $\times\, z^{p_0} e^{ip_1 t} e^{i(1-\lambda)\theta(0,0)}$, $\lambda\in[0,1]$.

Из утверждений 1)–4) и транзитивности отношения гомотопичности следует, что

$$P(t,z) \sim e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}.$$

Если $p_0 = 1$, то, согласно формуле из монографии [7, с. 205], возможен только один из двух случаев: 1) при любом фиксированном $t_0\in[0,2\pi]$ все ненулевые траектории автономной системы (2) ограничены при убывании t и не ограничены при возрастании t; 2) при любом фиксированном $t_0\in[0,2\pi]$ все ненулевые траектории автономной системы (2) ограничены при возрастании t и не ограничены при убывании t. В случае 1) отображение $P(t,z)$ гомотопно $|z|^{m-1}z$ посредством семейства отображений $(1-\lambda)P(t,z)+\lambda|z|^{m-1}z$, $\lambda\in[0,1]$. В случае 2) отображение $P(t,z)$ гомотопно $|z|^{m-1}(-z)$ посредством семейства отображений $(1-\lambda)P(t,z)+\lambda|z|^{m-1}(-z)$, $\lambda\in[0,1]$.

Действительно, пусть имеет место случай 1). Предположим, что при некотором $\lambda_0\in(0,1)$ отображение $(1-\lambda_0)P(t,z)+\lambda_0|z|^{m-1}z$ не принадлежит множеству $\mathcal{P}_m$. Тогда при некотором $t_0\in[0,2\pi)$ автономная система

$$w' = (1-\lambda_0)P(t_0,w) + \lambda_0|w|^{m-1}w$$

имеет ненулевую ограниченную траекторию. Такая траектория при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$ приближается к инвариантному лучу μz_0, $\mu\in(0,+\infty)$, где $z_0\neq 0$ и $(1-\lambda_0)P(t_0,z_0)+$ $+\lambda_0|z_0|^{m-1}z_0 = -z_0$. Отсюда следует, что $P(t_0,z_0) = -(1-\lambda_0)^{-1}(1+\lambda_0|z_0|^{m-1})z_0$ и траектория автономной системы $w' = P(t_0,w)$, проходящая через точку $w(0)=z_0$, ограничена при возрастании t. Пришли к противоречию. Аналогичным образом рассматривается случай 2). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть $P\in\mathcal{P}_m$ и $\gamma_0(P)=0$, $\gamma_1(P)=$ $=p_1$. Покажем, что задача (1) не разрешима при некотором $f\in\mathcal{R}_m$. Учитывая теоремы 1 и 2, без нарушения общности рассуждений будем считать, что $P(t,z)=e^{ip_1t}|z|^m$. Возьмём $f(t,z)=e^{ip_1t}+ip_1z$. Тогда получим систему уравнений

$$z' = e^{ip_1t}|z|^m + e^{ip_1t} + ip_1 z, \tag{7}$$

которую можно представить в следующем виде:

$$(ze^{-ip_1t})' = |ze^{-ip_1t}|^m + 1.$$

Отсюда вытекает, что любое решение $z(t)$ этой системы неограничено, а сама система уравнений (7) не имеет 2π-периодических решений.

Достаточность. Пусть $P \in \mathcal{P}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$ и $\gamma_0(P) \neq 0$. Покажем, что задача (1) разрешима. Разрешимость задачи (1) равносильна существованию нуля вполне непрерывного векторного поля $\Phi(z)$, определённого формулой (3).

В силу следствия векторное поле $\Phi(z)$ не обращается в нуль на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0,2\pi];\mathbb{C})$. Поэтому определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля $\Phi(z)$ на бесконечности (на сферах больших радиусов). Покажем, что для $\gamma_\infty(\Phi)$ верна формула (4). Тогда $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$ и, согласно принципу ненулевого вращения [2, с. 324], существует нуль векторного поля $\Phi(z)$, который будет решением задачи (1).

Заметим, что в силу теоремы 2 и следствия имеет место равенство $\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0)$, где

$$\Phi_0(z) \equiv z(t) - z(2\pi) - \int\limits_0^t P_0(s, z(s))\, ds.$$

Здесь $P_0(t,z) = e^{ip_1 t}|z|^{m-p_0} z^{p_0}$, если $\gamma_0(P) = p_0 < 1$, $\gamma_1(P) = p_1$, и $P_0(t,z) = |z|^{m-1}z$ или $P_0(t,z) = |z|^{m-1}(-z)$, если $p_0 = 1$. В случае $P_0(t,z) = \pm|z|^{m-1}z$ из результатов работ [1; 2, с. 334] следует равенство $\gamma_\infty(\Phi_0) = 1$.

Для завершения доказательства теоремы 3 остаётся установить, что

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \begin{cases} p_0, & \text{если } p_0 < 1 \text{ и } p_1/(1-p_0) \text{ – целое,} \\ 1, & \text{если } p_0 < 1 \text{ и } p_1/(1-p_0) \text{ – нецелое.} \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что векторное поле $\Phi_0(z)$ на сферах $\|z\| = r$ достаточно больших радиусов r пространства $C([0,2\pi];\mathbb{C})$ гомотопно векторному полю

$$\Psi_0(z) \equiv z(t) - z(2\pi)e^{i2\pi\delta} - \int\limits_0^t |z(s)|^{m-p_0} z(s)^{p_0}\, ds,$$

где $\delta = p_1/(1-p_0)$. Для этого рассмотрим два семейства векторных полей:

$$\Phi_\lambda(z) = e^{-i\lambda\delta t}\Phi_0(ze^{i\lambda\delta t}), \quad \lambda \in [0,1],$$

и

$$\Psi_\lambda(z) \equiv z(t) - e^{-i\lambda\delta t} z(2\pi)e^{i2\pi\delta} - \int\limits_0^t e^{-i\lambda\delta(t-s)}|z(s)|^{m-p_0} z(s)^{p_0}\, ds, \quad \lambda \in [0,1].$$

Очевидно, что первое семейство векторных полей не обращается в нуль на сферах достаточно больших радиусов. Проверим, что второе семейство также невырождено на бесконечности.

Предположим, что существуют последовательности $\lambda_n \in [0,1]$ и $z_n \in C([0,2\pi];\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Psi_{\lambda_n}(z_n) = 0$ и $\|z_n\| > n$ при $n \in \mathbb{N}$. При каждом n для функции $z_n(t)$ имеем равенства

$$z_n'(t) = |z_n(t)|^{m-p_0} z_n^{p_0}(t) - i\lambda\delta z_n(t), \quad t \in (0,2\pi), \quad z_n(0) = z_n(2\pi)e^{i2\pi\delta}.$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1, приходим к следующему выводу: либо существует ненулевая ограниченная траектория автономной системы

$$w' = |w|^{m-p_0} w^{p_0}, \tag{9}$$

либо существует пара ненулевых ограниченных решений $w^\pm(t)$, $\pm t \in [0,+\infty)$, автономной системы (9), для которой имеет место равенство $w^+(0) = w^-(0)e^{i2\pi\delta}$. Первый случай невозможен из-за того, что $|z|^{m-p_0} z^{p_0} \in \mathcal{P}_m$. Во втором случае, согласно фазовому портрету автономной системы (9), должно выполняться равенство $2\pi\delta = (2k+1)\pi/(1-p_0)$ при некотором целом k. Отсюда следует, что число $p_1 = k + 1/2$ нецелое. Получили противоречие. Таким образом, доказано равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_0). \tag{10}$$

Из результатов работ [1; 2, с. 334] следует, что

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = p_0, \quad \text{если} \quad \delta \text{ – целое}. \tag{11}$$

Если δ нецелое, то имеем: а) $\Psi_0(z) \neq 0$ при $z \neq 0$; б) $\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma_0(\Psi_0)$, где $\gamma_0(\Psi_0)$ – вращение векторного поля $\Psi_0(z)$ на сферах $\|z\| = \varepsilon$ малых радиусов ε; в) $\gamma_0(\Psi_0) = 1$. Действительно, если а) не верно и $\Psi_0(z) = 0$ при некоторой ненулевой функции $z(t) \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$, то $z(t)$ будет решением автономной системы (9) и $z(0) = z(2\pi)e^{i2\pi\delta}$. Тогда, согласно фазовому портрету автономной системы (9), должно выполняться неравенство $2\pi|\delta| < \pi/(1-p_0)$, отсюда следует, что $0 < |p_1| < 1/2$. Пришли к противоречию. Справедливость равенства б) вытекает из а) вследствие свойства вращения векторных полей. Равенство $\gamma_0(\Psi_0) = 1$ выводится из легко проверяемых равенств $\gamma_0(\Psi_0) = \gamma_0(F)$ и $\gamma_0(F) = 1$, где $F(z) \equiv z(t) - z(2\pi)e^{i2\pi\delta}$, с использованием общих свойств вращения векторных полей. Таким образом,

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = 1, \quad \text{если} \quad \delta \text{ – нецелое}. \tag{12}$$

Из соотношений (10)–(12) непосредственно вытекает равенство (8). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 3. С. 510–513.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
3. *Мухамадиев Э.* Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей // Докл. АН Тадж. ССР. 1977. Т. 20. № 5. С. 11–14.
4. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* К теории двухточечных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 10. С. 1372–1381.
5. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Критерий разрешимости одного класса нелинейных двухточечных краевых задач на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 334–341.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
8. *Бобылев Н.А.* О построении правильных направляющих функций // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 265–266.

Вологодский государственный университет,
Таджикский национальный университет,
г. Душанбе, Таджикистан

Поступила в редакцию 27.10.2019 г.
После доработки 27.10.2019 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.