ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 224–234

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

 Н. В. Зайцева

Для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области исследована краевая задача с нелокальным интегральным условием первого рода в зависимости от числового параметра, входящего в уравнение. Установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи. Построено решение задачи в явном виде и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

DOI: 10.31857/S0374064121020102

Введение. Краевые задачи для уравнений смешанного типа являются одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. К исследованию таких задач приводят математические модели теплообмена в капиллярно-пористых средах, формирования температурного поля, движения вязкой жидкости и многие другие (см. монографию [1] и имеющуюся в ней библиографию).

Интерес же к вырождающимся уравнениям вызван не только необходимостью решения прикладных задач, но и внутренними потребностями, обусловленными развитием теории уравнений смешанного типа. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [2]. Особое место в теории вырождающихся уравнений занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя. Изучение этого класса уравнений начато работами Эйлера, Пуассона, Дарбу и продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала [3]. Уравнения трёх основных классов, содержащие оператор Бесселя, согласно терминологии [4], называются B-эллиптическими, B-гиперболическими и B-параболическими соответственно. Обширное исследование B-гиперболических уравнений представлено в монографии [5]. Краевые задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя подробно изучены в работе [6], достаточно полный обзор работ, посвящённых изучению краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, приведён в работе [7]. Исследование краевых задач для уравнений с сингулярными коэффициентами проводили многие математики (см. работы [8–11], а также имеющуюся в них библиографию).

В прямоугольной области $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}$, где $l,\ \alpha,\ \beta$ – заданные положительные действительные числа, рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0. \tag{1}$$

Здесь $p > -1,\ p \neq 0,$ – заданное действительное число.

Введём обозначения $D_+ = D \bigcap \{y > 0\}$ и $D_- = D \bigcap \{y < 0\}$. В данной работе для уравнения (1) в области D исследуется следующая нелокальная задача с интегральным условием первого рода при $p \geqslant 1$ и $|p| < 1,\ p \neq 0$.

1. Постановка задачи 1. Пусть $p \geqslant 1$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D_+ \bigcup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \bigcup D_-, \tag{3}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l x^p u(x,y)\,dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{5}$$

где A – заданное действительное число, а $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие, как вытекает из равенств (4) и (5), условиям

$$\int\limits_0^l x^p \varphi(x)\,dx = \int\limits_0^l x^p \psi(x)\,dx = A. \tag{6}$$

В постановке краевой задачи (2)–(6) отсутствуют локальные граничные условия на боковых сторонах*) прямоугольника D. При $p \geqslant 1$ в области эллиптичности D_+ уравнения (1), согласно результатам работы [2], в классе ограниченных решений отрезок $x=0$ освобождается от граничного условия Дирихле, при этом производная по нормали u_x на отрезке $x=0$ равна нулю. Разделив переменные, нетрудно показать, что и в области гиперболичности D_- уравнения (1) справедливо равенство

$$u_x(0,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{7}$$

2. Постановка задачи 2. Пусть $|p| < 1$, $p \neq 0$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(6) и условию

$$\lim_{x\to 0+} x^p u_x(x,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{8}$$

Интегральное условие (5) ранее возникало в работах [12–14] для уравнения теплопроводности; в работе [14], например, при изучении вопроса об устойчивости разреженной плазмы, и в этом случае нелокальное условие (5) означает постоянство внутренней энергии системы. Краевые задачи с интегральными условиями вида (5) исследовались многими авторами (см., например, работы [15, 16] и имеющуюся в них библиографию).

3. Единственность решения задачи 1. Умножим уравнение (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + (\operatorname{sgn} y) \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_{yy}(x,y)\,dx = 0, \tag{9}$$

или

$$\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_\varepsilon^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y)\frac{d^2}{dy^2} \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u(x,y)\,dx = 0. \tag{10}$$

Перейдём здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда в силу условий (2) и (5) получим локальное граничное условие

$$u_x(l,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{11}$$

В дальнейшем вместо задачи (2)–(6) будем рассматривать задачу (2)–(4), (11).

*) Для определённости считаем систему координат Oxy правой.

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области $D_+ \bigcup D_-$ и удовлетворяющие условиям (2) и (11), будем искать в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставив это произведение в уравнение (1) и в условие (11), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{p}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{12}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{13}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$X(x; C_1, C_2) = C_1 x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda x) + C_2 x^{(1-p)/2} Y_{(p-1)/2}(\lambda x),$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $\nu = (p-1)/2$, а C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Поэтому одним из решений уравнения (12), удовлетворяющих первому условию из (13), является функция

$$X(x) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda x).$$

Заметим, что её производная $X'(0)$ равна нулю, что подтверждает справедливость свойства (7).

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию из (13). Для этого вычислим её производную в точке l и приравняем к нулю:

$$\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l} = (-\lambda x^{(1-p)/2} J_{(p+1)/2}(\lambda x))|_{x=l} = -\lambda l^{(1-p)/2} J_{(p+1)/2}(\lambda l) = 0,$$

откуда получим

$$\lambda_0 = 0,$$

$$J_{(p+1)/2}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{14}$$

Известно [17, с. 530], что функция $J_\nu(\xi)$ при $\nu > -1$ имеет счётное множество вещественных нулей. Тогда, обозначив n-й корень уравнения (14) через μ_n при заданном p, находим собственные значения $\lambda_n = \mu_n/l$ задачи (12) и (13). Согласно [18, с. 317] для нулей уравнения (14) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4}p + O(n^{-1}). \tag{15}$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (12) и (13) имеет собственную функцию, равную константе, которую примем за единицу. Таким образом, система собственных функций задачи (12), (13) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{16}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{(1-p)/2} J_{(p-1)/2}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$, определяются как нули уравнения (14).

Отметим, что система собственных функций (16) и (17) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p, а также образует полную систему в этом пространстве [19, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций:

$$X_n(x) = \frac{1}{\|\widetilde{X}_n(x)\|}\widetilde{X}_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{18}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^p, т.е.

$$\|\widetilde{X}_n(x)\|^2 = \int\limits_0^l x^p \widetilde{X}_n^2(x)\,dx. \tag{19}$$

Пусть, далее, $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(4), (11). Следуя [20], рассмотрим функции

$$u_n(y) = \int\limits_0^l u(x,y)x^p X_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{20}$$

$$u_{n,\varepsilon}(y) = \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p X_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Продифференцируем дважды тождество (21) по переменной y при $y \in (-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$, тогда с учётом уравнения (1) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y)x^p X_n(x)\,dx = -(\operatorname{sgn} y)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}\left(u_{xx} + \frac{p}{x}u_x\right)x^p X_n(x)\,dx =$$

$$= -(\operatorname{sgn} y)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^p u_x)X_n(x)\,dx = -(\operatorname{sgn} y)\left[x^p u_x X_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx\right]. \tag{22}$$

Из тождества (21) в силу уравнения (12) следует, что

$$u_{n,\varepsilon}(y) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p\left[X''_n(x) + \frac{p}{x}X'_n(x)\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y)\frac{d}{dx}(x^p X'_n(x))\,dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(x,y)x^p X'_n(x)\|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx\right],$$

т.е.

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) + u(x,y)x^p X'_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}.$$

Подставив полученное выражение для интеграла в равенство (22), будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = -(\operatorname{sgn} y)[x^p u_x X_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y)x^p X'_n(x)|_\varepsilon^{l-\varepsilon}].$$

Перейдя в последнем равенстве в силу включения (2) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем вследствие условий (11) и (13), что функция (20) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_n(y) - (\operatorname{sgn} y)\lambda_n^2 u_n(y) = 0, \quad y \in (-\alpha,0)\bigcup(0,\beta), \tag{23}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\lambda_n y} + b_n e^{-\lambda_n y}, & y > 0,\\ c_n\cos(\lambda_n y) + d_n\sin(\lambda_n y), & y < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n – произвольные постоянные, требующие определения.

С учётом включения (2) подберём постоянные a_n, b_n, c_n и d_n таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения $u_n(0+) = u_n(0-)$, $u_n'(0+) = u_n'(0-)$, которые справедливы при $a_n = (c_n+d_n)/2$, $b_n = (c_n-d_n)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Подставив найденные значения в представление (24), будем иметь

$$u_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch}(\lambda_n y) + d_n \operatorname{sh}(\lambda_n y), & y > 0, \\ c_n \cos(\lambda_n y) + d_n \sin(\lambda_n y), & y < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Для функции (20) в силу граничных условий (4) получаем равенства

$$u_n(\beta) = \int_0^l \varphi(x) x^p X_n(x)\, dx =: \varphi_n, \quad u_n(-\alpha) = \int_0^l \psi(x) x^p X_n(x)\, dx =: \psi_n. \tag{26}$$

В результате для нахождения постоянных c_n и d_n приходим к линейной алгебраической системе

$$\begin{cases} c_n \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + d_n \operatorname{sh}(\lambda_n \beta) = \varphi_n, \\ c_n \cos(\lambda_n \alpha) - d_n \sin(\lambda_n \alpha) = \psi_n, \end{cases} \tag{27}$$

которая имеет единственное решение

$$c_n = \frac{\varphi_n \sin(\lambda_n \alpha) + \psi_n \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}{\sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}, \quad d_n = \frac{\varphi_n \cos(\lambda_n \alpha) - \psi_n \operatorname{ch}(\lambda_n \beta)}{\sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta)}, \tag{28}$$

если при всех $n \in \mathbb{N}$ её определитель $\Delta_n(\alpha, \beta)$ отличен от нуля, т.е.

$$\Delta_n(\alpha, \beta) := \sin(\lambda_n \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_n \beta) + \cos(\lambda_n \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_n \beta) \neq 0. \tag{29}$$

Подставив найденные значения (28) в представление (25), найдём окончательный вид функций (20):

$$u_n(y) = \begin{cases} \Delta_n^{-1}(\alpha, \beta)(\varphi_n \Delta_n(\alpha, y) + \psi_n \operatorname{sh}(\lambda_n(\beta - y))), & y > 0, \\ \Delta_n^{-1}(\alpha, \beta)(\varphi_n \sin(\lambda_n(\alpha + y)) + \psi_n \Delta_n(-y, \beta)), & y < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Аналогично находим

$$u_0(y) = \frac{\alpha \varphi_0 + \beta \psi_0}{\alpha + \beta} + \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha + \beta} y, \quad y \in (-\alpha, 0) \bigcup (0, \beta), \tag{31}$$

$$u_0(\beta) = l^{-(p+1)/2} \sqrt{p+1} \int_0^l \varphi(x) x^p\, dx =: \varphi_0, \quad u_0(-\alpha) = l^{-(p+1)/2} \sqrt{p+1} \int_0^l \psi(x) x^p\, dx =: \psi_0. \tag{32}$$

При выполнении условия (29) задача (2)–(4), (11) имеет единственное решение. Действительно, пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\Delta_n(\alpha, \beta) \neq 0$. Тогда из (26) и (32) следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а из (30) и (31) – что $u_n(y) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В силу (20) имеем $\int_0^l u(x, y) x^p X_n(x)\, dx = 0$. Отсюда вследствие полноты системы (18) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на промежутке $x \in [0, l]$ и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку, согласно (2), функция $u(x, y) \in C(\overline{D})$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь при некоторых значениях p, l, α, β и некотором $n = m$ условие (29) нарушено. При $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\Delta_m(\alpha, \beta) = 0$ система (27) равносильна любому из её уравнений, например, первому

$$c_m \operatorname{ch}(\lambda_m \beta) + d_m \operatorname{sh}(\lambda_m \beta) = 0,$$

которое имеет континуальное множество решений: $d_m \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная и $c_m = -d_m \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)/\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)$. Подставив найденные значения в представление (25), будем иметь

$$u_m(y) = \begin{cases} \widetilde{d_m}(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\operatorname{ch}(\lambda_m\beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y)), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}(\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)\sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\cos(\lambda_m y)), & y < 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{d_m} = d_m/\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)$ – произвольная постоянная, не равная нулю.

Таким образом, однородная задача (2)–(4), (11) имеет ненулевое решение

$$u_m(x,y) = \begin{cases} \widetilde{d_m}(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\operatorname{ch}(\lambda_m\beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y))X_m(x), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}(\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)\sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m\beta)\cos(\lambda_m y))X_m(x), & y < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где функции $X_m(x)$ определяются формулой (18). Нетрудно проверить, что построенная функция (33) удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(4), (11) при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$.

Тем самым, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(4), (11), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (29) при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

4. Существование решения задачи 1. Выясним, при каких значениях параметров p, l, α и β нарушается условие (29). Представим определитель $\Delta_n(\alpha,\beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sin(\lambda_n\alpha)\operatorname{ch}(\lambda_n\beta) + \cos(\lambda_n\alpha)\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) = \sin(\lambda_n\alpha)\operatorname{ch}\xi + \cos(\lambda_n\alpha)\operatorname{sh}\xi,$$

где $\xi = \alpha_n\beta$. Поскольку $\sqrt{\operatorname{ch}^2(\lambda_n\beta) + \operatorname{sh}^2(\lambda_n\beta)} = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}$, то

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\left(\sin(\lambda_n\alpha)\cos\arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}} + \cos(\lambda_n\alpha)\sin\arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}}\right) =$$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\left(\lambda_n\alpha + \arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}}\right) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n), \tag{34}$$

здесь

$$\mu_n = \lambda_n l, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l}, \quad \gamma_n = \arcsin\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}} \to \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Из равенства (34) следует, что $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$, если и только если $\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n) = \sin(\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. при $\widetilde{\alpha} = (\pi k - \gamma_n)/\mu_n$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, уравнение $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$ имеет счётное множество нулей. Найдём оценки величины $\Delta_n(\alpha,\beta)$, входящей в знаменатели формулы (30), при достаточно больших n.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha} = a/b$ – рациональное число, где a, b – взаимно простые натуральные числа, и $p \neq (4bd - b - 4r)/a$, где $r = \overline{0, b-1}$, $d \in \mathbb{Z}$, то существуют постоянные $C_0 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при любом $n > n_0$ выполняется оценка*

$$|\Delta_n(\alpha,\beta)| \geqslant C_0 e^{\lambda_n\beta}. \tag{35}$$

Доказательство. Заменим в выражении (34) величину μ_n согласно формуле (15):

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\left(\pi n\widetilde{\alpha} + \frac{\pi}{4}p\widetilde{\alpha} + O(n^{-1}) + \gamma_n\right).$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Разделив na на b с остатком, будем иметь $na = bq + r$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant r \leqslant b-1$. Тогда

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,(-1)^q\sin\left(\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}p + \gamma_n + O(n^{-1})\right) =$$

$$= \frac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+e^{-4\lambda_n\beta}}\,(-1)^q \sin\biggl(\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4}-\varepsilon_n+O(n^{-1})\biggr),$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Из последнего равенства следует, что найдётся номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$|\Delta_n(\alpha,\beta)| \geqslant \frac{e^{\lambda_n\beta}}{2\sqrt{2}}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4}\right)\right| = C_0 e^{\lambda_n\beta}.$$

Для того чтобы постоянная C_0 была отлична от нуля, необходимо, чтобы

$$\frac{\pi r}{b}+\frac{\pi a}{4b}p+\frac{\pi}{4} \neq \pi d, \quad d \in \mathbb{Z},$$

откуда имеем

$$p \neq \frac{1}{a}(4bd-b-4r), \quad d \in \mathbb{Z}. \tag{36}$$

Условие (36) выполняется при любом иррациональном значении $p \geqslant 1$.

Лемма 2. *Если при $n > n_0$ выполнена оценка (35), то справедливы оценки*

$$|u_n(y)| \leqslant C_1(|\varphi_n|+|\psi_n|) \quad \text{и} \quad |u_n'(y)| \leqslant C_2 n(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \in [-\alpha,\beta], \tag{37}$$

$$|u_n''(y)| \leqslant C_3 n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \in [-\alpha,0), \quad \text{и} \quad |u_n''(y)| \leqslant C_4 n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \in (0,\beta], \tag{38}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Из формулы (30) с учётом оценки (35) найдём

$$|u_n(y)| \leqslant \frac{1}{|\Delta_n(\alpha,\beta)|}(|\varphi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))+|\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)) \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}(|\varphi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))+|\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)) \leqslant \widetilde{C}_1(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \geqslant 0,$$

$$|u_n(y)| \leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}(|\varphi_n|+|\psi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))) \leqslant \widetilde{C}_2(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \leqslant 0,$$

где $\widetilde{C}_i$ – здесь и далее положительные постоянные. Обозначив через $C_1 = \max\{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2\}$, получим первую оценку в (37) при всех $n > n_0$ и $y \in [-\alpha,\beta]$.

Вычислим теперь, используя представление (30), производную $u_n'(y)$, тогда с учётом оценки (35) и асимптотической формулы (15) будем иметь

$$|u_n'(y)| \leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}n(|\varphi_n|(\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)+\operatorname{sh}(\lambda_n\beta))-|\psi_n|\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)) \leqslant \widetilde{C}_3 n(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \geqslant 0,$$

$$|u_n'(y)| \leqslant C_0^{-1}e^{-\lambda_n\beta}n(|\varphi_n|-|\psi_n|(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)+\operatorname{ch}(\lambda_n\beta))) \leqslant \widetilde{C}_4 n(|\varphi_n|+|\psi_n|), \quad y \leqslant 0.$$

Из полученных неравенств следует справедливость второй оценки в (37) при всех $n > n_0$ и $y \in [-\alpha,\beta]$, где $C_2 = \max\{\widetilde{C}_3,\widetilde{C}_4\}$.

Справедливость оценок (38) вытекает из равенств (15), (23) и оценки (37).

Лемма 3. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0,l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_5, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_6 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_7 n^2.$$

Доказательство приведено в работе [20].

Лемма 4. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $C^2[0,l]$, существуют производные $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$, имеющие конечное изменение на $[0,l]$, и справедливы равенства*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant C_8 n^{-4}, \quad |\psi_n| \leqslant C_9 n^{-4}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в работе [20].

На основании найденных частных решений (18), (30) и (31) при выполнении условий (29) и (35) решение задачи (2)–(4), (11) определяется в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,y)=u_0(y)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)X_n(x). \tag{39}$$

Вместе с рядом (39) рассмотрим следующие ряды:

$$u_y(x,y)=u_0'(y)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(y)X_n(x), \quad u_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n'(x); \tag{40}$$

$$u_{yy}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(y)X_n(x), \quad u_{xx}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)X_n''(x). \tag{41}$$

Согласно леммам 2 и 3 при любом $(x,y)\in\overline{D}$ ряды (39) и (40) мажорируются соответственно рядами $C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n|+|\psi_n|)$, $C_{11}\sum_{n=1}^{\infty}n(|\varphi_n|+|\psi_n|)$, а ряды (41) при любом $(x,y)\in\in\overline{D}_+\bigcup\overline{D}_-$ мажорируются рядом $C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|)$. Все эти мажорирующие ряды в свою очередь, согласно лемме 4, оцениваются сверху числовым рядом $C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды (39), (40) в замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (41) в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ сходятся равномерно. Таким образом, построена функция $u(x,y)$, определяемая рядом (39), которая удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(4), (11).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ в лемме 1 при некоторых натуральных $n=m=m_1,\ldots,m_k$, где $1\leqslant\leqslant m_1<\ldots<m_k\leqslant n_0$, $k\in\mathbb{N}$, выполняется равенство $\Delta_m(\alpha,\beta)=0$, то для разрешимости задачи (2)–(4), (11) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\psi_m\operatorname{ch}(\lambda_m\beta)-\varphi_m\cos(\lambda_m\alpha)=0, \quad m=m_1,\ldots,m_k. \tag{42}$$

В этом случае решение задачи (2)–(4), (11) определяется рядом

$$u(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{m_1-1}+\ldots+\sum_{n=m_{k-1}+1}^{m_k-1}+\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\right)u_n(y)X_n(x)+\sum_{n=1}u_m(x,y), \tag{43}$$

где m принимает значения $m_1, \ \ldots, \ m_k$, а функция $u_m(x,y)$ определяется по формуле (33). В случае, если в некоторых суммах нижний предел окажется больше верхнего, то эти суммы следует считать равными нулю.

Тем самым, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнено условие (35) при $n>n_0$. Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(4), (11), определяемое рядом (39), если $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ при всех $n=\overline{1,n_0}$; если же $\Delta_m(\alpha,\beta)=0$ при некоторых $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, условиям (6) и выполнено неравенство (35) при $n>n_0$. Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(6), определяемое рядом (39), если $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ при всех $n=\overline{1,n_0}$; если же $\Delta_m(\alpha,\beta)=0$ при некоторых $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(4), (11) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда равенство (1) выполняется всюду в области D. Умножим равенство (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y\in(-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. В результате получим тождество (9). Перейдём в нём к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда с учётом условий (2) и (11) будем иметь

$$\int_0^l u_{yy}(x,t)x^p\,dx = 0.$$

Проинтегрировав это равенство по переменной y дважды, получим, что

$$\int_0^l u(x,y)x^p\,dx = K_1 y + K_2, \quad K_1,\, K_2 = \mathrm{const}. \tag{44}$$

Положим в равенстве (44) $y=\beta$, а затем $y=-\alpha$, тогда с учётом условий (4), (6) будем иметь соответственно

$$\int_0^l u(x,\beta)x^p\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^p\,dx = K_1\beta + K_2 = A,$$

$$\int_0^l u(x,-\alpha)x^p\,dx = \int_0^l \psi(x)x^p\,dx = -\alpha K_1 + K_2 = A,$$

откуда находим значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = A$. Тогда из равенства (44) следует, что

$$\int_0^l u(x,y)x^p\,dx = A,$$

т.е. справедливо условие (5).

Пусть теперь $u(x,y)$ – решение задачи (2)–(6). Тогда справедливо тождество (10). Переходя в нём к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу условий (2) и (5) получим локальное граничное условие второго рода $u_x(l,y)=0$, т.е. условие (11).

Тем самым нами показано, что при выполнении условий согласования (6) условия (5) и (11) эквивалентны, а значит, эквивалентны и задачи (2)–(6) и (2)–(4), (11).

5. Устойчивость решения задачи 1.

Теорема 4. *Для решения задачи (2)–(6) при каждом* $y \in [-\alpha,\beta]$ *справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\| \leqslant C_{14}(\|\varphi(x)\| + \|\psi(x)\|),$$

где $\|\cdot\|$ *– норма в пространстве* $L_2[0,l]$ *с весом* x^p, *а постоянная* C_{14} *не зависит от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством (39) с учётом первой оценки в (37), получаем

$$\|u(x,y)\|^2 = \int_0^l x^p u^2(x,y)\,dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_n(y)u_m(y)\int_0^l x^p X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y)\int_0^l x^p X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y) \leqslant C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n| + |\psi_n|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^2\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2) \leqslant 2C_1^2\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2\biggr) = 2C_1^2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Теорема доказана.

6. Решение задачи 2. Умножим уравнение (1) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha,0)\bigcup(0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. В результате получим тождество (10).

В этом тождестве в силу условий (2), (5) и (8) можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon\to 0$. В результате получим локальное граничное условие (11). В дальнейшем вместо задачи (2)–(6), (8) будем рассматривать задачу (2)–(4), (8), (11).

Подставив произведение $u(x,y)=X(x)Y(y)$ в уравнение (1) и в условия (8) и (11), получим для уравнения (12) следующую задачу:

$$\lim_{x\to 0+} x^p X'(x)=0, \quad X'(l)=0.$$

Система собственных функций спектральной задачи при $|p|<1$ и $p\neq 0$ имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x)=1, \quad \lambda_0=0,$$

$$\widetilde{X}_n(x)=x^{(1-p)/2}J_{(p-1)/2}(\lambda_n x), \quad n\in\mathbb{N},$$

где собственные значения $\lambda_n=\mu_n/l$, $n\in\mathbb{N}$, определяются как нули μ_n уравнения (14); для μ_n при больших n справедлива асимптотическая формула (15). Введём норму по формуле (19) и далее будем рассматривать функции (18).

Решение задачи (2)–(4), (8), (11), как и при рассмотрении задачи 1, строим в виде суммы ряда Фурье–Бесселя (39), в котором функции $X_n(x)$ определяются по формуле (18), функции $u_0(y)$ – по формуле (31), функции $u_n(y)$ имеют вид

$$u_n(y)=\begin{cases}\Delta_n^{-1}(\alpha,\beta)(\varphi_n\Delta_n(\alpha,y)+\psi_n\,\mathrm{sh}\,(\lambda_n(\beta-y))), & y>0,\\ \Delta_n^{-1}(\alpha,\beta)(\varphi_n\sin(\lambda_n(\alpha+y))+\psi_n\Delta_n(-y,\beta)), & y<0,\end{cases}$$

где величина $\Delta_n(\alpha,\beta)$ определена равенством (29), а числа φ_n и ψ_n – равенствами (26).

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 5. *Если существует решение задачи (2)–(4), (8), (11), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n\in\mathbb{Z}_+$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задачи 1, устанавливаются оценки лемм 1–4, согласно которым ряд (39) и его производные первого порядка сходятся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$, а производные второго порядка сходятся равномерно в областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$, а функция (39) удовлетворяет условиям (2) и (3).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнено условие (35) при* $n>n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи (2)–(4), (8), (11), определяемое рядом (39), если* $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n=\overline{1,n_0}$; *если же* $\Delta_m(\alpha,\beta)=0$ *при некоторых* $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, *то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 7. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4, условиям (6) и выполнено неравенство (35) при* $n>n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи (2)–(6), (8), определяемое рядом (39), если* $\Delta_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n=\overline{1,n_0}$; *если же* $\Delta_m(\alpha,\beta)=0$ *при некоторых* $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, *то задача имеет решение, определяемое рядом (43), тогда и только тогда, когда выполнены условия (42).*

Теорема 8. *Для решения задачи (2)–(6), (8) справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|\leqslant C_{15}(\|\varphi(x)\|+\|\psi(x)\|),$$

где постоянная C_{15} *не зависит от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
2. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
3. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized theory of potential // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. № 2. P. 342–354.
4. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
5. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems. New York, 1976.
6. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
7. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.
8. *Ломов И.С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1550–1563.
9. *Белянцев О.В., Ломов И.С.* О свойстве базисности собственных функций одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1187–1189.
10. *Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E.L., Sitnik S.M.* Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations // Electr. J. Differ. Equat. 2018. T. 130. P. 1–27.
11. *Sabitov K.B., Zaitseva N.V.* Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind // Lobachevskii J. of Math. 2018. T. 39. № 9. P. 1419–1427.
12. *Cannon I.R.* The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. T. 21. № 2. P. 155–160.
13. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.
14. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием// Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 276–304.
15. *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.
16. *Ломов И.С.* Равномерная сходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 486–497.
17. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1945.
18. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1986.
19. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
20. *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 123–135.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.