

УДК 517.956.226+517.956.227

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ПРЫГАЮЩЕГО МЯЧИКА ОПЕРАТОРА $\nabla D(x)\nabla$ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛУЖЁСТКИМИ СТЕНКАМИ

© 2021 г. А. И. Клевин

Рассматривается задача о квазиклассическом спектре оператора $\nabla D(x)\nabla$ с вырождением бесселева типа на границе двумерной области (полужёсткие стенки). Известно, что можно построить асимптотические собственные функции, связанные с лагранжевыми многообразиями, используя модификацию метода канонического оператора Маслова. Получены асимптотические собственные функции, связанные с простейшими периодическими траекториями соответствующей гамильтоновой системы с отражениями на границе области.

DOI: 10.31857/S0374064121020114

1. Введение.

1.1. Асимптотики типа прыгающего мячика оператора Лапласа с условиями Дирихле в эллипсе. Хорошо известна задача об асимптотическом при $k \rightarrow \infty$ спектре оператора Лапласа в области M , ограниченной эллипсом ∂M , с нулевыми условиями Дирихле на границе:

$$-\Delta u = k^2 u, \quad u|_{\partial M} = 0. \quad (1)$$

Согласно [1] (см. также [2]) существуют асимптотические собственные функции, сконцентрированные в окрестности малой оси эллипса и быстро убывающие при отдалении от неё.

Рассмотрим бильiardную систему внутри эллипса с обычными отражениями от границы. Такая система имеет периодическую траекторию, лежащую на малой оси эллипса. Существуют асимптотические собственные функции, соответствующие этой траектории (моды *прыгающего мячика*). Динамическим свойством периодической траектории, лежащей на малой оси эллипса, которое обуславливает их существование, является орбитальная устойчивость периодического движения в линейном приближении. Этим свойством не обладает, например, периодическое движение на большой оси эллипса.

Приведём асимптотические собственные значения, соответствующие модам прыгающего мячика, представленные в [2, с. 100]. Пусть g – длина малой оси эллипса, ρ – радиус кривизны эллипса в точке пересечения с малой осью. Собственные значения имеют вид

$$k_{n,\nu} = \frac{\pi}{g} \left[n + 1 + \frac{2\nu + 1}{n} \arcsin \sqrt{\frac{g}{2\rho}} + O\left(\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\right) \right]$$

и нумеруются квантовыми номерами $\mathbb{N} \ni n \gg 1$, $\mathbb{Z}_+ \ni \nu \ll n$. Видно, что если менять один из квантовых номеров, то все соседние точки будут располагаться “почти” на одинаковом расстоянии друг от друга.

1.2. Системы с жёсткими, мягкими и полужёсткими стенками. Асимптотические при $h \rightarrow +0$ собственные функции, соответствующие периодическим траекториям, можно рассматривать и для оператора Шрёдингера с гладкой функцией $V(x)$, задающей потенциальную яму (система с *мягкими стенками*):

$$-h^2 \Delta \psi + V(x)\psi = E\psi.$$

В одном из частных случаев такая система рассматривалась в [3]. Типичной ситуацией здесь является наличие семейства периодических траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $p^2 + V(x)$, параметризованных значениями полной энергии, т.е. постоянными на траекториях значениями функции Гамильтона. Проквантованному множеству орбитально устойчивых в линейном приближении периодических траекторий мы можем поставить в соответствие серию асимптотических мод.

Задачу (1) с условиями Дирихле можно (по крайней мере на уровне нестрогих рассуждений) представить в виде спектральной задачи для уравнения Шрёдингера, если сделать замену $E = k^2 h^2$ и положить $V(x) = 0$, если $x \in M$, и $V(x) = +\infty$, если $x \notin M$. Такую систему называют системой с *жесткими стенками*.

Перейдём к спектральной задаче, которая рассматривается в настоящей работе. Пусть $(x_1, x_2) \in [b_1, b_2] \times \mathbb{R} = M \subset \mathbb{R}^2$ – полоса. Будем рассматривать частный случай спектральной задачи (конкретная её постановка будет приведена ниже)

$$\left[-h^2 \frac{\partial}{\partial x_1} D_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} - h^2 \frac{\partial}{\partial x_2} D_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \Psi = E \Psi, \quad \Psi = \Psi(x_1, x_2, h), \quad (2)$$

где оператор в левой части является оператором с *бесселевым вырождением* (термин введён в [4]), т.е. $D_i(x_1, x_2) > 0$ при $b_1 < x_1 < b_2$, $D_i(b_s, x_2) = 0$, $(\partial D_i / \partial x_1)(b_s, x_2) \neq 0$, $i = 1, 2$, $s = 1, 2$. Оператору в левой части (2) соответствует движение в области M по геодезическим траекториям метрики $ds^2 = (D_1(x_1, x_2))^{-1} dx_1^2 + (D_2(x_1, x_2))^{-1} dx_2^2$ с обычным отражением от границы ∂M , на которой метрика обращается в бесконечность. В терминах гамильтоновой системы это движение задаётся гамильтонианом $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = D_1(x_1, x_2) p_1^2 + D_2(x_1, x_2) p_2^2$. Из свойств функций D_1, D_2 следует обращение в бесконечность импульсной переменной за конечное время при достижении границы. Подобные системы названы в [5] бильярдами с *полужесткими стенками*.

Мы рассматриваем асимптотические при $h \rightarrow +0$ собственные функции спектральной задачи (2), которые соответствуют периодическим движениям такой системы с траекториями, лежащими на отрезке (в общем случае можно рассматривать и криволинейные траектории), ограниченном двумя точками на границе ∂M . Такие асимптотические собственные функции мы также будем называть функциями типа *прыгающего мячика*.

Отметим, что задачи, рассмотренные во введении, можно соотнести с резонаторами различных типов.

2. Постановка задачи и результат.

2.1. Постановка задачи. Пусть заданы числа $b_1 < b_2$ и вещественные гладкие в окрестности полосы $b_1 \leq x_1 \leq b_2$ функции $D_1(x_1, x_2)$, $D_2(x_1, x_2)$ такие, что

$$\begin{aligned} D_i(x_1, x_2) > 0 \quad \text{при} \quad b_1 < x_1 < b_2, \quad D_i(b_s, x_2) = 0, \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_1}(b_s, x_2) \neq 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Введём дифференциальный оператор

$$\widehat{L} \equiv -h^2 \frac{\partial}{\partial x_1} D_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} - h^2 \frac{\partial}{\partial x_2} D_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

В данной работе мы построим серию асимптотических при $h \rightarrow +0$ собственных $E(h)$ значений и соответствующих им собственных функций $\Psi(x_1, x_2)$, локализованных в окрестности множества $\{x_2 = 0\}$, которая удовлетворяет условиям квазиклассической спектральной задачи в полосе $b_1 \leq x_1 \leq b_2$:

$$\|\widehat{L}\Psi - E\Psi\|_{L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})} = O(h^{3/2}), \quad \|\Psi\|_{L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})} = \Theta(1).$$

Напомним, что отношение $f = \Theta(g)$ между функциями f и g по определению означает, что одновременно выполняются отношения $f = O(g)$ и $g = O(f)$. В нашем случае это означает равномерную ограниченность нормы сверху и снизу положительными константами.

От функции Ψ будем требовать выполнения условия конечности энергетического интеграла

$$(\Psi, (\widehat{L} - E)\Psi)_{L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})} < \infty. \tag{4}$$

Рассматривая замыкание в $L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})$ симметрического оператора \widehat{L} , заданного на функциях из $C_0^\infty([b_1, b_2] \times \mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (4), получаем самосопряжённое расширение оператора \widehat{L} методом Фридрихса. Условие (4) для оператора с вырождающимися коэффициентами является аналогом граничных условий, которые обычно возникают при рассмотрении операторов, действующих на функции, заданные в какой-нибудь области. Обсуждение этого вопроса и дальнейшие ссылки можно найти в [6].

2.2. Результат. Введём функции $t(x_1)$, $\tilde{t}(x_1)$, заданные на множестве $x_1 \in [b_1, b_2]$, и число T :

$$t(x_1) = \int_{b_1}^{x_1} \frac{dq}{2\sqrt{D_1(q, 0)}}, \quad \frac{T}{2} = t(b_2), \quad \tilde{t}(x_1) = \frac{T}{2} - t(x_1). \tag{5}$$

Обратную к $t(x_1)$ функцию, заданную на множестве $[0, T/2]$, продолжим чётным образом на множество $[-T/2, T/2]$, после чего периодически распространим её на всё множество \mathbb{R} . Полученная функция $X_1(t)$ является T -периодическим решением задачи Коши

$$\dot{x}_1^2 = 4D_1(x_1, 0), \quad x_1(0) = b_1.$$

Рассмотрим фундаментальную систему решений $(\tilde{z}_2(t), \tilde{w}_2(t))$, $(\tilde{\tilde{z}}_2(t), \tilde{\tilde{w}}_2(t))$ линейной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{z}_2 = 2D_2(X_1(t), 0)z_2, \quad \dot{w}_2 = -\frac{(\partial^2 D_1 / \partial x_2^2)(X_1(t), 0)}{D_1(X_1(t), 0)}z_2 \tag{6}$$

относительно неизвестных функций $z_2(t)$, $w_2(t)$ с начальными условиями

$$\tilde{z}_2(0) = 1, \quad \tilde{w}_2(0) = 0, \quad \tilde{\tilde{z}}_2(0) = 0, \quad \tilde{\tilde{w}}_2(0) = 1.$$

Составим из них матрицу монодромии

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{z}_2(T) & \tilde{\tilde{z}}_2(T) \\ \tilde{w}_2(T) & \tilde{\tilde{w}}_2(T) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Предположим, что выполнено условие

$$|\text{tr } R| < 2. \tag{8}$$

У периодической системы (6) при правильном выборе знака числа β существует решение Флоке $(Z_2(t), W_2(t))$ с показателем β и комплексно-сопряжённое решение Флоке $(\overline{Z}_2(t), \overline{W}_2(t))$ с показателем $-\beta$, и при таком выборе выполнено условие положительности:

$$(Z_2(t + T), W_2(t + T)) = (\exp(i\beta)Z_2(t), \exp(i\beta)W_2(t)), \quad \text{Im}(W_2 Z_2^{-1}) > 0, \tag{9}$$

где левая часть неравенства в зависимости от выбора знака β будет всегда либо положительной, либо отрицательной. Известно, что такое решение единственно с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Пусть $\text{Arg } Z_2(t)$ – непрерывная ветвь аргумента комплекснозначной функции $Z_2(t)$, не обращающейся в нуль. Произвол по модулю 2π в выборе β мы устраним, полагая $\beta = \text{Arg } Z_2(T) - \text{Arg } Z_2(0)$.

Пусть на отрезке $[b_1, b_2]$ заданы некоторые гладкие функции $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)$ со связными носителями $\text{supp } f_s \subset [b_1, b_2]$, $s = 1, 2$, такие, что $b_1 \notin \text{supp } f_2$, $b_2 \notin \text{supp } f_1$, $f_1(x_1) + f_2(x_1) = 1$.

Введём числовые серии ω_n , $E_{n,\nu}(h)$ равенствами

$$\omega_n = \frac{\pi}{T} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4\pi} \right), \quad E_{n,\nu}(h) = h^2 \left(\omega_n^2 + \omega_n \frac{\beta\nu}{T} \right),$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad n = O(1/h), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \nu = O(1), \quad (10)$$

и серию функций

$$\begin{aligned} \Psi_{n,\nu}(x_1, x_2) = & \left(\frac{2\omega_n\pi}{\sqrt{D_1(x_1, 0)}} \right)^{1/2} |Z_2(t(x_1))|^{\nu-1/2} (\operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1}(t(x_1)))^{\nu/2} \times \\ & \times H_\nu \left(x_2 \sqrt{\omega_n \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1}(t(x_1))} \right) \left[f_1(x_1) \sqrt{t(x_1)} \times \right. \\ & \times \left(J_0(2\omega_n t(x_1)) \operatorname{Re} (G_{n,\nu}(x_1, x_2)) - J_1(2\omega_n t(x_1)) \operatorname{Im} (G_{n,\nu}(x_1, x_2)) \right) + \\ & + (-1)^n f_2(x_1) \sqrt{\tilde{t}(x_1)} \left(J_0(2\omega_n \tilde{t}(x_1)) \operatorname{Re} (\exp(i\beta/4) G_{n,\nu}(x_1, x_2)) + \right. \\ & \left. \left. + J_1(2\omega_n \tilde{t}(x_1)) \operatorname{Im} (\exp(i\beta/4) G_{n,\nu}(x_1, x_2)) \right) \right], \quad (11) \end{aligned}$$

где J_k – функция Бесселя первого рода порядка k , функция H_ν – ν -й полином Эрмита в физическом определении ($H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$) и

$$G_{n,\nu}(x_1, x_2) = \exp \left(-i \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Arg} Z_2(t(x_1)) + i \frac{\beta\nu t(x_1)}{T} + i\omega_n W_2 Z_2^{-1}(t(x_1)) \frac{x_2^2}{2} \right).$$

Утверждение. Пусть выполнено неравенство (8). Тогда

$$\|(\widehat{L} - E_{n,\nu}(h))\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2)\|_{L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})} = O(h^{3/2}), \quad \|\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2)\|_{L^2([b_1, b_2] \times \mathbb{R})} = \Theta(1).$$

(Символ Θ определён в п. 2.1.)

2.3. Замечание о доказательстве утверждения. В работе [4] квазиклассическая теория, связанная с дифференциальными операторами, коэффициенты которых имеют вырождение бesselева типа, сведена к стандартной ситуации без вырождения с помощью рассмотрения задачи в более сложном пространстве. К такой регуляризованной задаче можно затем применить метод канонического оператора Маслова, соответствующего или лагранжевому многообразию, или, в нашей ситуации, изотропному многообразию с комплексным ростком (определение дано в [7, с. 56]). Последний случай является предметом теории комплексного роста Маслова.

В лагранжевом случае, используя результаты работы [8], можно получить выражение для канонического оператора в виде интеграла по естественно возникающей координате лагранжева многообразия. Асимптотику полученного интеграла можно затем представить в виде функции Бесселя при помощи формул из работы [9]. Подробное изложение описанной процедуры анонсировано в [4]. В настоящей работе сформулированное выше утверждение доказывается при помощи адаптации данного подхода к изотропному случаю.

2.4. Пример. Введём функцию

$$D(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)(1 - ax_2^2),$$

где $a \neq 0$ – вещественный параметр. Рассмотрим пример, когда

$$D_1(x_1, x_2) = D_2(x_1, x_2) = D(x_1, x_2).$$

Для параметров $a = \pm 1$ графики функции $-D(x_1, x_2)$ представлены на рис. 1, а, рис. 1, б. При $a > 0$ функции D_1, D_2 удовлетворяют условиям (3) лишь вблизи множества $\{x_2 = 0\}$. Добавлением к D_1, D_2 гладкой функции, равной нулю в окрестности $\{x_2 = 0\}$, можно добиться выполнения условий (3). При такой модификации оператора его асимптотическая собственная функция, локализованная в окрестности $\{x_2 = 0\}$, не изменится. В нашем примере $b_1 = -1, b_2 = 1, t(x_1) = (\pi + 2 \arcsin x_1)/4, T = \pi, \tilde{t}(x_1) = (\arccos x_1)/2, X_1(t) = -\cos 2t$.

Уравнение (6), которое принимает вид

$$\dot{z}_2 = 2 \sin^2(2t)w_2, \quad \dot{w}_2 = 2az_2, \tag{12}$$

исключая переменную z_2 , представим в виде уравнения Матрё $\ddot{w}_2 = 4a \sin^2(2t)w_2$. Известно (см., например, [10, с. 206]), что для выполнения условия $|\text{tr } R| < 2$ необходимо, чтобы $a < 0$. На рис. 2 изображён график зависимости $\text{tr } R$ от параметра a .

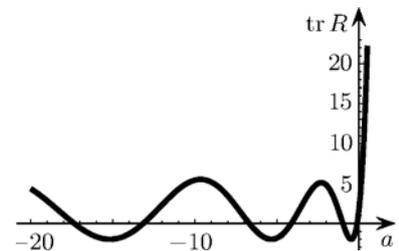
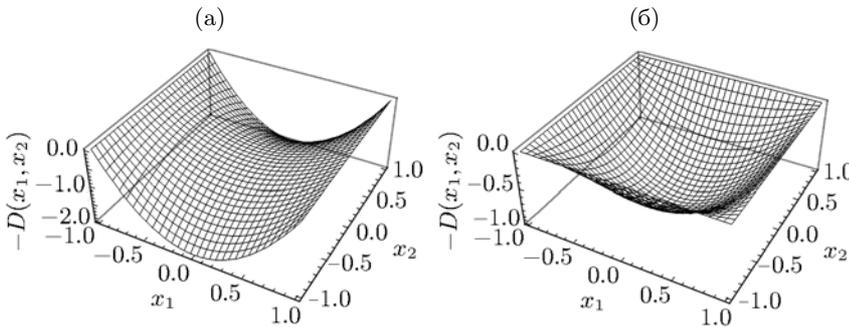


Рис. 1. Графики функции $-D(x_1, x_2)$ при $a = -1$ (а) и при $a = 1$ (б).

Рис. 2. График зависимости величины $\text{tr } R$ от параметра a .

Положим далее $a = -4$. Тогда $\text{tr } R \approx 0.416935$. Функции $Z_2(t), W_2(t)$ определены как решения системы (12) с начальными условиями $Z_2(0) \approx -0.112821, W_2(0) = 1$. Тогда $\text{Im}(W_2 Z_2^{-1}(0)) \approx 8.86362$ и условие положительности (9) выполнено. Вычисления дают $\beta = \text{Arg } Z_2(T) - \text{Arg } Z_2(0) \approx 7.64397$.

В качестве примера положим далее $h = 0.05$. Точки асимптотического спектра $E_{n,\nu}$ изображены на рис. 3, а. По вертикальной оси отложен номер n . Большие точки соответствуют значению $\nu = 0$, по горизонтали точки следуют друг за другом в порядке увеличения параметра ν . Для $n = 20, \nu = 0$ (в этом случае $E_{20,0} \approx 1.1139$) на рис. 3, б представлен график асимптотической собственной функции $\Psi_{n,\nu}$.

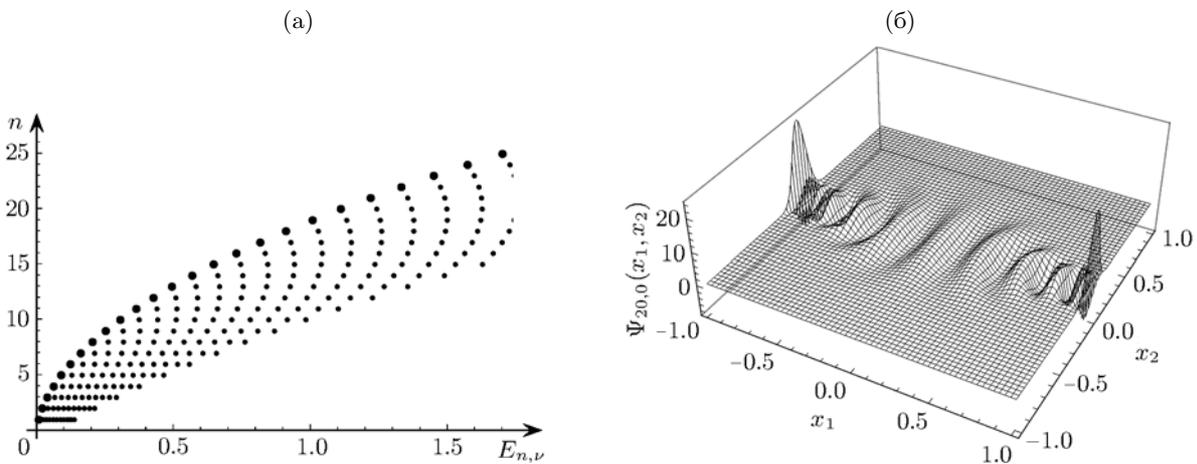


Рис. 3. Точки $E_{n,\nu}$ асимптотического спектра (а) и одна из асимптотических собственных функций (б).

3. Формулировка в виде спектральной задачи для квазиклассического ПДО.

3.1. Символ оператора и гамильтониан. Оператор \widehat{L} можно рассматривать как квазиклассический псевдодифференциальный оператор с вейлевским символом $L(x, p, h)$, который с точностью до $O(h^2)$ представляется функцией $H(x, p) = H(x_1, x_2, p_1, p_2)$:

$$\widehat{L} = L\left(x, \frac{-ih\nabla^1 - ih\nabla^3}{2}, h\right), \quad L(x, p, h) = H(x, p) + O(h^2),$$

$$H(x, p) = D_1(x_1, x_2)p_1^2 + D_2(x_1, x_2)p_2^2. \quad (13)$$

Разложим функции D_1 , D_2 по формуле Тейлора по координате x_2 , учитывая при этом условия (3) на эти функции. Введём коэффициенты разложения $D_{10}(x_1)$, $D_{20}(x_1)$, $D_{12}(x_1)$:

$$D_1(x_1, x_2) = D_{10}(x_1) + \frac{x_2^2}{2}D_{12}(x_1) + O(x_2^3), \quad D_2(x_1, x_2) = D_{20}(x_1) + O(x_2),$$

$$D_{i0}(x_1) > 0 \quad \text{при} \quad b_1 < x_1 < b_2, \quad D_{i0}(b_s) = 0, \quad D_{12}(b_s) = 0,$$

$$D'_{i0}(b_s) \neq 0, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

3.2. Быстроубывающие асимптотики. Мы рассматриваем асимптотики, локализованные в окрестности множества $\{x_2 = 0\}$. Согласно [7] такого вида асимптотики можно рассматривать, когда асимптотическая собственная функция в обычной ситуации без учёта фокальных точек является комбинацией функций вида

$$\Psi(x_1, x_2, h) = A(x_1, x_2/\sqrt{h}) \exp((i/h)(S(x_1) + P_2(x_1)x_2 + G(x_1)x_2^2)),$$

где S , P_2 – вещественнозначные, а A , G – комплекснозначные функции, причём $\text{Im} G > 0$. Последнее неравенство делает функцию Ψ убывающей как гауссова экспонента при $x_2^2/h \rightarrow \infty$.

Геометрический объект, соответствующий такого вида функциям, – периодическая траектория (одномерное изотропное многообразие) гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x, p)$ в фазовом пространстве (x, p) . Проекция траектории на конфигурационное пространство (пространство с координатами x) определяет множество, вне которого функция Ψ является быстроубывающей. В нашем случае таким множеством является отрезок $[b_1, b_2] \times \{0\}$. При этом функции S и P_2 являются соответственно действием и второй импульсной координатой на этой траектории, выраженными через координату x_1 .

Для того чтобы периодической траектории соответствовали асимптотические собственные функции необходимо, чтобы она была орбитально устойчива в линейном приближении. Обычно мы имеем семейство периодических траекторий, параметризованных полной энергией (значением функции Гамильтона). Из этого семейства выбираются траектории, устойчивые в линейном приближении. Проквантовав их, мы получаем дискретный набор орбитально устойчивых в линейном приближении траекторий, которым соответствует серия асимптотических собственных функций.

В нашей задаче гамильтониан по импульсной переменной p однороден со степенью 2. Поэтому все траектории указанного семейства получаются из одной траектории заменой времени и растяжением по переменной p . В результате все траектории одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы.

3.3. Каустики, соответствующие границе. Известно, что в фазовом пространстве траектория гамильтоновой системы над точками $(b_s, 0)$, $s = 1, 2$, уходит на бесконечность по импульсным координатам за конечное время. При этом говорят, что возникает *сильная каустика*. От неё можно избавиться с помощью рассмотрения задачи на большем фазовом пространстве (см. [4]). С точки зрения траектории гамильтоновой системы результат выражается в добавлении точки $p = \infty$. При этом траектория становится периодической.

4. Квантование устойчивых траекторий гамильтоновой системы.

4.1. Система Гамильтона. Система Гамильтона с гамильтонианом $H(p, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2p_1 D_1(x_1, x_2), & \dot{p}_1 &= -p_1^2 \frac{\partial D_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) - p_2^2 \frac{\partial D_2}{\partial x_1}(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= 2p_2 D_2(x_1, x_2), & \dot{p}_2 &= -p_1^2 \frac{\partial D_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - p_2^2 \frac{\partial D_2}{\partial x_2}(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Подпространство с координатами $x_2 = p_2 = 0$ является инвариантным по отношению к данной системе. На это подпространство система ограничивается как система Гамильтона с приведённым гамильтонианом $\mathcal{H}(x_1, p_1) = H(x_1, 0, p_1, 0)$:

$$\mathcal{H}(x_1, p_1) = D_{10}(x_1)p_1^2, \quad \dot{x}_1 = 2D_{10}(x_1)p_1, \quad \dot{p}_1 = -D'_{10}(x_1)p_1^2. \tag{15}$$

Траектории системы (15) над точками $(b_s, 0)$, $s = 1, 2$, уходят на бесконечность по переменной p_1 за конечное время. Эта система инвариантна относительно замены $(x_1, p_1, t) \mapsto (x_1, -p_1, -t)$, где t – независимая переменная (время). Мы будем склеивать над точками $(b_s, 0)$, $s = 1, 2$, две траектории, симметричные относительно отражения $(x_1, p_1) \mapsto (x_1, -p_1)$. При этом будем считать, что точка склейки имеет координаты $(x_1, p_1) = (b_s, \infty)$, $s = 1, 2$. Далее там, где точки склейки могут быть естественным образом учтены, мы будем обращаться с такими склеенными траекториями как с обычными.

Пара $(X_1(t), P_1(t))$, где функция $X_1(t)$ определена в п. 2.2, а функция $P_1(t)$ определяется равенством $P_1(t) = \dot{X}_1(t)/(2D_{10}(X_1(t)))$, является периодическим решением системы (15) с периодом T , определённым в (5). Вектор-функция $(X_1(t), 0, P_1(t), 0)$ представляет собой решение системы (14). Гамильтониан \mathcal{H} однороден по p_1 со степенью 2. Это позволяет вложить решение $(X_1(t), 0, P_1(t), 0)$ в зависящее от параметра $E > 0$ семейство $T(E)$ -периодических решений $(X(t, E), P(t, E))$ такое, что

$$H(X(t, E), P(t, E)) = \mathcal{H}(X_1(t, E), P_1(t, E)) = E, \quad X_2(t, E) = P_2(t, E) = 0,$$

$$X(t, E) = X(\sqrt{E}t, 1), \quad P(t, E) = \sqrt{E}P(\sqrt{E}t, 1), \quad T(1) = \sqrt{E}T(E).$$

Решение $(X_1(t), 0, P_1(t), 0)$ соответствует значению $E = 1$. При каждом E имеем

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{X(t, E)\} = [b_1, b_2] \times \{0\}.$$

Введём обозначение для замкнутой кривой $\mathbb{R}_{xp}^4 \supset \Lambda(E) = \{(X(t, E), P(t, E))\} \cong \mathbb{S}^1$ и для её накрывающей $\Lambda_C(E) \cong \mathbb{R}$. Параметр $t \in \mathbb{R}$ является координатой на $\Lambda_C(E)$ с координатными функциями $X(t, E)$, $P(t, E)$. На $\Lambda(E)$ лежат две точки, для которых $p_1 = \infty$. На $\Lambda_C(E)$ такие точки образуют счётное множество.

4.2. Система в вариациях. Рассмотрим систему в вариациях для пары неизвестных вектор-функций $w(t)$ и $z(t)$, каждая из которых принимает значения из \mathbb{C}^2 :

$$\dot{z} = H_{px}z + H_{pp}w, \quad \dot{w} = -H_{xx}z - H_{xp}w. \tag{16}$$

Здесь матричные функции $H_{px}(x, p)$, $H_{pp}(x, p)$, $H_{xx}(x, p)$, $H_{xp}(x, p)$ состоят из вторых производных:

$$\begin{aligned} H_{xx} &= \begin{pmatrix} H_{x_1x_1} & H_{x_1x_2} \\ H_{x_2x_1} & H_{x_2x_2} \end{pmatrix}, & H_{pp} &= \begin{pmatrix} H_{p_1p_1} & H_{p_1p_2} \\ H_{p_2p_1} & H_{p_2p_2} \end{pmatrix}, \\ H_{xp} &= \begin{pmatrix} H_{x_1p_1} & H_{x_1p_2} \\ H_{x_2p_1} & H_{x_2p_2} \end{pmatrix}, & H_{px} &= H_{xp}^T = \begin{pmatrix} H_{p_1x_1} & H_{p_1x_2} \\ H_{p_2x_1} & H_{p_2x_2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и в их аргументы производится подстановка $X(t, E)$, $P(t, E)$. Таким образом, система (16) задаёт семейство систем, зависящее от параметра E . Запишем эту систему в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 2D'_{10}(X_1(t, E))P_1(t, E) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2D_{10}(X_1(t, E)) & 0 \\ 0 & 2D_{20}(X_1(t, E)) \end{pmatrix} w, \\ \dot{w} &= - \begin{pmatrix} D''_{10}(X_1(t, E)) & 0 \\ 0 & D_{12}(X_1(t, E))P_1^2(t, E) \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} 2D'_{10}(X_1(t, E))P_1(t, E) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w. \end{aligned}$$

Пусть векторная функция $(z(t), w(t))$ – некоторое её решение при $E = 1$. Тогда вектор $(z(\sqrt{E}t), \sqrt{E}w(\sqrt{E}t))$ является решением этой системы при произвольном $E > 0$.

4.3. Редуцированная система в вариациях. Система в вариациях распадается на две системы для (z_1, w_1) и для (z_2, w_2) . Для координат (z_2, w_2) система имеет вид

$$\dot{z}_2 = 2D_{20}(X_1(t, E))w_2, \quad \dot{w}_2 = -D_{12}(X_1(t, E))P_1^2(t, E)z_2 \quad (17)$$

и при $E = 1$ совпадает с системой (6).

Рассмотрим решения $(\tilde{z}_2(t, E), \tilde{w}_2(t, E))$, $(\tilde{\tilde{z}}_2(t, E), \tilde{\tilde{w}}_2(t, E))$ системы (17) такие, что

$$\tilde{z}_2(0, E) = 1, \quad \tilde{w}_2(0, E) = 0, \quad \tilde{\tilde{z}}_2(0, E) = 0, \quad \tilde{\tilde{w}}_2(0, E) = 1.$$

Эти семейства решений, зависящие от параметра E , выражаются через решения, соответствующие значению $E = 1$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2(t, E) &= \tilde{z}_2(\sqrt{E}t, 1), \quad \tilde{w}_2(t, E) = \sqrt{E}\tilde{w}_2(\sqrt{E}t, 1), \\ \tilde{\tilde{z}}_2(t, E) &= \frac{1}{\sqrt{E}}\tilde{\tilde{z}}_2(\sqrt{E}t, 1), \quad \tilde{\tilde{w}}_2(t, E) = \tilde{\tilde{w}}_2(\sqrt{E}t, 1). \end{aligned}$$

При $E = 1$ эти решения введены выше: $\tilde{z}_2(t) = \tilde{z}_2(t, 1)$, $\tilde{w}_2(t) = \tilde{w}_2(t, 1)$, $\tilde{\tilde{z}}_2(t) = \tilde{\tilde{z}}_2(t, 1)$, $\tilde{\tilde{w}}_2(t) = \tilde{\tilde{w}}_2(t, 1)$.

4.4. Устойчивость траектории. Согласно [7] для существования асимптотических собственных функций, соответствующих периодической траектории, необходима орбитальная устойчивость периодической траектории в линейном приближении, т.е. линеаризация соответствующего ей отображения Пуанкаре, ограниченного на поверхность уровня $\{H = E\}$, должна иметь норму, не превышающую единицу. Как сказано выше, все замкнутые кривые $\Lambda(E)$ устойчивы или неустойчивы одновременно. Таким образом, существование асимптотических функций обусловлено конкретным видом функций D_{10} , D_{20} , D_{12} , входящих в условие задачи.

Поставим более сильное условие устойчивости. Будем требовать *сильную устойчивость* траекторий. По определению это означает, что линеаризованные отображения Пуанкаре, ограниченные на поверхность уровня $\{H = E\}$, которые всегда являются симплектическими отображениями, не имеют близких симплектических отображений с нормой, большей единицы. Невыполнение этого условия приводит к таким осложнениям, как вырожденность асимптотического спектра в главном приближении, что требует рассмотрения поправок к нему. Случай сильной устойчивости является более простым и с точки зрения топологии в пространстве линейных симплектических отображений: для него отображения, соответствующие по описанному выше правилу сильно устойчивым замкнутым кривым, образуют в этом пространстве открытое множество. В общем случае структура этого множества исследована в работе [11].

Введём симплектическую матрицу монодромии, зависящую от параметра E :

$$R(E) = \begin{pmatrix} \tilde{z}_2(T(E), E) & \tilde{\tilde{z}}_2(T(E), E) \\ \tilde{w}_2(T(E), E) & \tilde{\tilde{w}}_2(T(E), E) \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения λ_1 , λ_2 не зависят от E , поскольку её характеристический многочлен от E не зависит. Из симплектичности матрицы $R(E)$ следует равенство $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Матрица $R = R(1)$ определена равенством (7).

Условие сильной устойчивости равносильно следующему свойству: собственные значения λ_1, λ_2 лежат на единичной окружности в комплексной плоскости и отличны от ± 1 . Эквивалентно, $|\operatorname{tr} R(E)| < 2$. Очевидно, что это свойство также не зависит от E . Поэтому можно положить $E = 1$ и получить неравенство (8).

Если последнее неравенство выполнено, то возможно представление $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. При $E = 1$ выше были определены решения Флоке $Z_2(t), W_2(t)$ с показателем β . При остальных E введём следующие решения Флоке с показателем β :

$$Z_2(t, E) = Z_2(\sqrt{E}t), \quad W_2(t, E) = \sqrt{E}W_2(\sqrt{E}t). \tag{18}$$

Известно, что (при фиксированном E) величина $-2i(W_2\bar{Z}_2 - Z_2\bar{W}_2)$ принимает вещественное ненулевое значение, не зависящее от t . Очевидно, что знак этой величины не зависит от E . В теории комплексного ростка требуется выполнение условия $-2i(W_2\bar{Z}_2 - Z_2\bar{W}_2) > 0$, которое вследствие равенства $4|Z_2|^2 \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1} = -2i(W_2\bar{Z}_2 - Z_2\bar{W}_2)$ эквивалентно условию положительности из (9). Таким образом, имеем

$$(Z_2(t + T(E), E), W_2(t + T(E), E)) = (\exp(i\beta)Z_2(t, E) \exp(i\beta)W_2(t, E)), \\ 4|Z_2|^2 \operatorname{Im} W_2 Z_2^{-1} \equiv -2i(W_2\bar{Z}_2 - Z_2\bar{W}_2) > 0.$$

Функция $\operatorname{Arg} Z_2(t, E) = \operatorname{Arg} Z_2(\sqrt{E}t)$ — непрерывная ветвь аргумента не обращающейся в нуль комплекснозначной функции $Z_2(t, E)$. Число β в п. 2.2 было выбрано так, что

$$\beta = \operatorname{Arg} Z_2(T(E), E) - \operatorname{Arg} Z_2(0, E) = \operatorname{Arg} Z_2(T) - \operatorname{Arg} Z_2(0).$$

4.5. Условие квантования. Согласно общей теории при каждом значении параметра h из семейства устойчивых периодических траекторий выделяется дискретное множество тех траекторий, которые удовлетворяют условию квантования. В общем виде это условие записывается следующим образом (см. [7, с. 215]):

$$\frac{1}{2\pi h} \oint_{\Lambda(E)} p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = \frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

В приведённой формуле слагаемое $1/2$ равно разделённому на 4 индексу Маслова кривой $\Lambda(E)$, рассматриваемой в плоскости (x_1, p_1) (согласно [12] этот индекс равен 2). Интеграл по $\Lambda(E)$ от формы $p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ равен

$$\oint_{\Lambda(E)} p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = \int_0^{T(E)} P_1(t, E) \dot{X}_1(t, E) dt = 2ET(E) = 2\sqrt{E}T(1).$$

Поэтому условие квантования принимает вид

$$\frac{ET(E)}{\pi h} = \frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right). \tag{19}$$

Из семейства траекторий выбираются те, которые удовлетворяют этому условию, а именно те, которые соответствуют следующим значениям параметра E :

$$E(n, h) = \left(\frac{\pi h}{T(1)} \left(\frac{\beta}{4\pi} + \frac{1}{2} + n \right) \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right).$$

Серия асимптотических собственных значений, соответствующая проквантованному семейству периодических сильно устойчивых траекторий, принимает вид (см. [7, с. 218])

$$E_{n,\nu}(h) = E(n, h) + \frac{h\beta\nu}{T(E(n, h))}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n = O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \nu = O(1).$$

Последнее выражение эквивалентно выражению (10) для серии асимптотических собственных значений.

Далее мы будем заниматься построением асимптотических собственных функций.

5. Вспомогательные конструкции.

5.1. Карты и разбиение единицы, симметричные относительно отражения. Пусть выбраны значения h и n . Положим $E = E(n, h)$. Кривая $\Lambda(E)$ симметрична относительно отображения плоскости $\text{Ref}(x_1, p_1) = (x_1, -p_1)$. Введём функцию $g = \text{Ref}|_{\Lambda(E)}$.

Пусть $t_1^*, t_2^* \in \Lambda(E)$ – две точки такие, что $X(t_s^*) = (b_s, 0)$, $s = 1, 2$. Покроем кривую $\Lambda(E)$ двумя областями U_1, U_2 такими, что $t_s^* \in U_s, g(U_s) = U_s, s = 1, 2$. Введём разбиение единицы, подчинённое данному покрытию, которое реализуется функциями $e_1(t), e_2(t)$ с носителями в U_1 и U_2 такими, что $e_s = e_s \circ g, s = 1, 2$.

5.2. Индексы, обращение координатной функции. На кривой $\Lambda(E)$ определена ориентация, совпадающая с направлением гамильтоновой системы. Поэтому локально можно говорить об одной точке из $\Lambda(E)$, стоящей перед (или после) другой точкой из $\Lambda(E)$.

Выберем начальную точку $t^0 \in \Lambda(E)$ такую, что $t^0 \neq t_1^*, t^0 \neq t_2^*$. Пусть $\gamma_s, s = 1, 2$, – произвольный путь, соединяющий точки t^0 и t_s^* . Введём полуцелые числа m_1, m_2 равенством $2m_s = \text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* - 0\}) + \text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* + 0\})$, где $\text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* - 0\})$ (соответственно $\text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* + 0\})$) – индекс Маслова пути, получающегося объединением пути γ_s и кратчайшего пути, соединяющего точку t_s^* и близкую к ней точку перед (соответственно после) t_s^* . Таким образом, m_s – среднее значение индексов Маслова двух областей, разделённых особой точкой t_s^* . Известно (см. [13]), что

$$\text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* - 0\}) + 1/2 = m_s = \text{Ind}(\gamma_s \cup \{t_s^* \rightarrow t_s^* + 0\}) - 1/2.$$

Для каждого $s = 1, 2$ выберем произвольным образом ветвь обратной к $X_1(t)$ функции $t_s(x_1)$, принимающую значения в U_s . Введём также число σ_s , равное -1 , если $t_s(x_1)$ принимает значения, лежащие перед t_s^* , и равное 1 , если $t_s(x_1)$ принимает значения, лежащие после t_s^* . Таким образом, $\sigma_s = \text{sign}(t_s(x_1) - t_s^*)$ при $b_1 < x_1 < b_2$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$X_1(0) = b_1, \quad t_1^* = 0, \quad t_2^* = \frac{T(E)}{2}, \quad t^0 = +0, \tag{20}$$

γ_1 – путь нулевой длины, γ_2 – кратчайший путь по направлению гамильтоновой системы. Пусть функции $t_1(x_1), t_2(x_1)$ принимают значения в точках $t_1^* \leq t \leq t_2^*$. Тогда

$$t_1(x_1) = t_2(x_1) = \frac{t(x_1)}{\sqrt{E}}, \quad m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -1. \tag{21}$$

5.3. Вспомогательные функции. Далее для удобства будем пользоваться накрытием $\Lambda_C(E)$. Поднимем на него точку t^0 произвольным образом. Кривые γ_1, γ_2 и точки t_1^*, t_2^* будем рассматривать как кривые и точки на $\Lambda_C(E)$, которые по поднятию точки t^0 определяются однозначным образом. Также однозначно определены поднятия областей U_1, U_2 и функций e_1, e_2 .

Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Введём вспомогательные числа и функции

$$\begin{aligned} A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) &= \frac{\exp(-\frac{i}{2} \text{Arg} Z_2(t, E))}{\sqrt{|Z_2(t, E)|}} \exp\left(i \frac{t\beta\nu}{T(E)} + \frac{i}{2} W_2 Z_2^{-1}(t, E) \frac{x_2^2}{h}\right) (\bar{Z}_2(t, E))^\nu \times \\ &\quad \times (\text{Im} W_2 Z_2^{-1}(t, E))^{\nu/2} H_\nu\left((\text{Im} W_2 Z_2^{-1}(t, E))^{1/2} \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right), \\ A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) &= e_s(t) A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right), \quad \tau(t) = \int_{t^0}^t P(t, E) \dot{X}(t, E) dt = 2E(t - t^0), \\ \tau_s^* &= \tau(t_s^*), \quad \tilde{\tau}_s(x_1) = |\tau(t_s(x_1)) - \tau(t_s^*)|, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \tag{22}$$

Функция A зависит от вещественного параметра E и от целого неотрицательного параметра ν .

Лемма 1. *Выполняются равенства*

$$\begin{pmatrix} X_1(t_s^* + t, E) \\ P_1(t_s^* + t, E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t_s^* - t, E) \\ -P_1(t_s^* - t, E) \end{pmatrix}, \quad e_s(t_s^* + t) = e_s(t_s^* - t).$$

Доказательство. Подстановкой в уравнение (15) непосредственно проверяется, что векторные функции, стоящие в обеих частях первого равенства, являются решениями уравнения (15). Первое равенство следует из определения введённой склейки траекторий в точках $(x_1, p_1) = (b_s, \infty)$, соответствующих значению параметра $t = 0$.

Последнее равенство следует из определения функций e_1, e_2 . Лемма доказана.

Лемма 2. *Выполняются равенства*

$$\begin{aligned} |Z_2(t_s^* - t, E)| &= |Z_2(t_s^* + t, E)|, \\ \text{Arg } Z_2(t_s^* + t, E) - \text{Arg } Z_2(t_s^*, E) &= \text{Arg } Z_2(t_s^*, E) - \text{Arg } Z_2(t_s^* - t, E), \\ iW_2Z_2^{-1}(t_s^* - t, E) &= \overline{iW_2Z_2^{-1}(t_s^* + t, E)}, \quad \text{Im } W_2Z_2^{-1}(t_s^* - t, E) = \text{Im } W_2Z_2^{-1}(t_s^* + t, E). \end{aligned}$$

Доказательство. Прямой подстановкой проверяется, что пара функций

$$(Z_2(2t_s^* - t, E), -W_2(2t_s^* - t, E))$$

является решением системы (17). Это решение является решением Флоке с показателем $-\beta$. Пара комплексно-сопряжённых функций $(\bar{Z}_2(t, E), \bar{W}_2(t, E))$ также является решением Флоке системы (17) с вещественными коэффициентами, соответствующим показателю $-\beta$. Из единственности решения Флоке с показателем $-\beta \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, с точностью до умножения на постоянную и неравенства нулю $Z_2(t, E)$ следует (в определённых выше векторных функциях сделаем замену $t \mapsto t + t_s^*$), что

$$\bar{Z}_2(t_s^*, E) \begin{pmatrix} Z_2(t_s^* - t, E) \\ -W_2(t_s^* - t, E) \end{pmatrix} = Z_2(t_s^*, E) \begin{pmatrix} \bar{Z}_2(t_s^* + t, E) \\ \bar{W}_2(t_s^* + t, E) \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Выполняются равенства*

$$\begin{aligned} &A_s\left(t_s^* + |t - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) + A_s\left(t_s^* - |t - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) = A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) + A_s\left(2t_s^* - t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) = \\ &= e_s(t)|Z_2(t, E)|^{\nu-1/2}(\text{Im } W_2Z_2^{-1}(t, E))^{\nu/2}H_\nu\left((\text{Im } W_2Z_2^{-1}(t, E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\text{Arg } Z_2(t_s^*, E) + \frac{it_s^*\beta\nu}{T(E)}\right) \times \\ &\times 2\text{Re}\left[\exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\text{Arg } Z_2(t, E) - \text{Arg } Z_2(t_s^*, E)) + \frac{i(t - t_s^*)\beta\nu}{T(E)} + \frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t, E)\frac{x_2^2}{h}\right)\right], \\ &A_s\left(t_s^* + |t - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) - A_s\left(t_s^* - |t - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) = \sigma_s\left(A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) - A_s\left(2t_s^* - t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right)\right) = \\ &= e_s(t)|Z_2(t, E)|^{\nu-1/2}(\text{Im } W_2Z_2^{-1}(t, E))^{\nu/2}H_\nu\left((\text{Im } W_2Z_2^{-1}(t, E))^{1/2}\frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\text{Arg } Z_2(t_s^*, E) + \frac{it_s^*\beta\nu}{T(E)}\right) \times \\ &\times 2i\sigma_s\text{Im}\left[\exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\text{Arg } Z_2(t, E) - \text{Arg } Z_2(t_s^*, E)) + \frac{i(t - t_s^*)\beta\nu}{T(E)} + \frac{i}{2}W_2Z_2^{-1}(t, E)\frac{x_2^2}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала следует записать действие операторов Re , Im на их аргументы в виде комбинации аргументов с их комплексными сопряжениями, затем воспользоваться леммой 1 и леммой 2, в которых нужно сделать замену $t \mapsto t - t_s^*$. Лемма доказана.

Для рассмотренного выше примера, т.е. при выполнении соотношений (20), (21), можно взять

$$\begin{aligned} \text{Arg } Z_2(t_1^*, E) = 0, \quad \text{Arg } Z_2(t_2^*, E) = \beta/2, \quad e_s(t_s(x_1)) = f_s(x_1), \quad s = 1, 2, \\ \tau_1^* = 0, \quad \tau_2^* = ET(E), \quad \tilde{\tau}_1 = 2\sqrt{E}t(x_1), \quad \tilde{\tau}_2 = 2\sqrt{E}\tilde{t}(x_1). \end{aligned} \tag{23}$$

6. Асимптотика спектральной задачи.

6.1. Канонический оператор в случае лагранжевой кривой. Рассмотрим кривую $\Lambda(E)$ как лагранжеву кривую, вложенную в двумерное пространство (x_1, p_1) . Для каждой функции $a(t)$ на этой кривой введём локализованные функции $a_s(t) = a(t)e_s(t)$, $s = 1, 2$. Пусть $y_s(t, E) = 2\sqrt{|X_1(t, E) - b_s|}$, $s = 1, 2$. Канонический оператор, соответствующий кривой $\Lambda(E)$, на которой функция действия представлена линейной функцией $\tau(t)$, определяется следующим выражением (см. [13]):

$$\begin{aligned} [K_{\Lambda(E)}a](x_1) = \sum_{s=1,2} \exp\left(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\right) \left(\frac{\pi\tilde{\tau}_s(x_1)}{hy_s(t_s(x_1), E)}\right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{q=\pm 1} \left[J_0\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) + (-1)^{(q-1)/2} iJ_1\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \right] \frac{a_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|)}{|\dot{y}_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|, E)|^{1/2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

6.2. Асимптотические собственные функции. Имеем

$$y_s(t, E)|\dot{y}_s(t, E)| = \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} y_s^2(t, E) \right| = 2|\dot{X}_1(t, E)| = 4\sqrt{ED_{10}(X_1(t, E))}.$$

Воспользовавшись симметрией $X(t^* + t, E) = X(t^* - t, E)$, получим

$$y_s(t_s(x_1), E)|\dot{y}_s(t_s^* + q|t_s(x_1) - t_s^*|, E)| = 4\sqrt{ED_{10}(x_1)}.$$

Подставив в выражение для канонического оператора (24) в качестве функции $a(t)$ функцию $A_s(t, x_2/\sqrt{h})$, зависящую также от x_2/\sqrt{h} , будем иметь

$$\begin{aligned} \left[K_{\Lambda(E)}A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right](x_1) = \sum_{s=1,2} \exp\left(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\right) \left(\frac{\pi\tilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\right)^{1/2} \times \\ \times \left[\left(J_0\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) + iJ_1\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \right) A_s\left(t_s^* + |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) + \right. \\ \left. + \left(J_0\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) - iJ_1\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \right) A_s\left(t_s^* - |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Данное выражение определяет асимптотическую собственную функцию. Такое её определение путём подстановки функции $A_s(t, x_2/\sqrt{h})$ в аргумент канонического оператора (24) не является строго обоснованным. Обоснование приводится ниже.

Раскроем в представлении (25) скобки, содержащие линейные комбинации функций Бесселя J_0 , J_1 , и приведём затем подобные члены относительно этих функций:

$$\left[K_{\Lambda(E)}A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right](x_1) = \sum_{s=1,2} \exp\left(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\right) \left(\frac{\pi\tilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\right)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[J_0\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \left(A_s\left(t_s^* + |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) + A_s\left(t_s^* - |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right) + \right. \\ & \left. + iJ_1\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \left(A_s\left(t_s^* + |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) - A_s\left(t_s^* - |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 3, придём к представлению

$$\begin{aligned} & \left[K_{\Lambda(E)} A_s\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right](x_1) = \sum_{s=1,2} \exp\left(-\frac{i\pi m_s}{2} + \frac{i\tau_s^*}{h}\right) \left(\frac{\pi\tilde{\tau}_s(x_1)}{4h\sqrt{ED_{10}(x_1)}}\right)^{1/2} \times \\ & \quad \times |Z_2(t_s(x_1), E)|^{\nu-1/2} (\text{Im } W_2 Z_2^{-1}(t_s(x_1), E))^{\nu/2} e_s(t_s(x_1)) \times \\ & \quad \times H_\nu\left((\text{Im } W_2 Z_2^{-1}(t_s(x_1), E))^{1/2} \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \text{Arg } Z_2(t_s^*, E) + \frac{it_s^* \beta \nu}{T(E)}\right) \times \\ & \quad \times \left[2J_0\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \text{Re}\left(\exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (\text{Arg } Z_2(t_s(x_1), E) - \text{Arg } Z_2(t_s^*, E)) + \frac{i(t_s(x_1) - t_s^*)\beta\nu}{T(E)} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{i}{2} W_2 Z_2^{-1}(t_s(x_1), E) \frac{x_2^2}{h}\right)\right) - 2\sigma_s J_1\left(\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) \text{Im}\left(\exp\left(-i\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (\text{Arg } Z_2(t_s(x_1), E) - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \text{Arg } Z_2(t_s^*, E)) + \frac{i(t_s(x_1) - t_s^*)\beta\nu}{T(E)} + \frac{i}{2} W_2 Z_2^{-1}(t_s(x_1), E) \frac{x_2^2}{h}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Выражение (11) получается после подстановок (18)–(21), (23) и умножения на число $\exp(-i\pi/4)E^{(1-\nu)/4}$.

6.3. Асимптотические собственные функции в форме ВКБ вдали от границы.

Рассмотрим собственные функции на подмножествах, в которых значения координаты x_2 отделены от граничных значений b_1, b_2 . Такие подмножества не содержат каустики, соответствующие границе, и на них асимптотические собственные функции допускают представление в форме ВКБ (см. [7, с. 223])

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1,2} \frac{\exp(-i\pi m_s/2 + i\tau_s^*/h)}{\sqrt{2}(ED_{10}(x_1))^{1/4}} \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) A_s\left(t_s^* + |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \exp\left(i\frac{\pi}{4} - i\frac{\tilde{\tau}_s(x_1)}{h}\right) A_s\left(t_s^* - |t_s(x_1) - t_s^*|, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Множители $m_s \pm 1/2, s = 1, 2$, в показателях экспонент соответствуют индексам Маслова четырёх областей на $\Lambda_C(E)$, каждая из которых расположена по одну из сторон точек $t_s^*, s = 1, 2$.

Если в представлении (25) воспользоваться для функций Бесселя асимптотическими формулами

$$J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})\right), \quad J_1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})\right)$$

при $z \rightarrow +\infty$, то получим с точностью до $O(h)$ выражение (26). Обратно, начав с представления (26), получим выражение (25), справедливое вдали от граничных точек b_1, b_2 . Это выражение распространим затем на весь отрезок $[b_1, b_2]$. Тем самым, если не стремиться к строгости рассуждений, можно получить справедливое на всём отрезке $[b_1, b_2]$ выражение для асимптотической собственной функции.

7. Технические подробности доказательства.

7.1. Устранение каустики, связанной с вырождением на границе. Пусть $M = [b_1, b_2] \times \mathbb{R}$. Следуя [4], рассмотрим многообразие $\widetilde{M} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ вместе с проекцией $\lambda: \widetilde{M} \rightarrow M$.

Для некоторых положительных чисел $\varepsilon_s < |b_2 - b_1|$, $s = 1, 2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > |b_2 - b_1|$, введём множества $V_1 = [b_1, b_1 + \varepsilon_1] \times \mathbb{R}$, $V_2 = [b_2 - \varepsilon_2, b_2] \times \mathbb{R}$, покрывающие множество $[b_1, b_2] \times \mathbb{R}$. Определим линейные функции $z_1(x_1) = x_1 - b_1$, $z_2(x_1) = b_2 - x_1$ и обратные к ним $z_1^{-1}(\zeta) = b_1 + \zeta$, $z_2^{-1}(\zeta) = b_2 - \zeta$.

Рассмотрим три карты, покрывающие $\widetilde{M} = \lambda^{-1}(M)$. Карта $\lambda^{-1}((b_1, b_2) \times \mathbb{R})$ имеет координаты (ϕ, x_1, x_2) , $\phi \in \mathbb{S}^1$. При каждом $s = 1, 2$ карта $\lambda^{-1}(V_s)$ имеет координаты (y_1, y_2, x_2) , $|y|^2 < 4\varepsilon_s$. Проекция в этих картах записывается в виде

$$\lambda(\phi, x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad \lambda(y_1, y_2, x_2) = \left(z_s^{-1} \left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4} \right), x_2 \right).$$

На пересечении $\lambda^{-1}((b_1, b_2) \times \mathbb{R}) \cap \lambda^{-1}(V_s)$ отображения склейки принимают вид

$$g(\phi, x_1, x_2) = (2\sqrt{z_s(x_1)} \cos \phi, 2\sqrt{z_s(x_1)} \sin \phi, x_2),$$

$$g^{-1}(y_1, y_2, x_2) = (\text{Arg}(y_1 + iy_2), z_s^{-1} \left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4} \right), x_2).$$

Рассматриваются функции на многообразии \widetilde{M} , постоянные на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, которые можно интерпретировать как функции на M , и дифференциальные операторы, для которых множество таких функций является инвариантным. Согласно [4] для оператора \widehat{L} , заданного формулой (13), существует дифференциальный оператор \widetilde{L} , который сохраняет множество функций, постоянных на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, и действует на такие функции как оператор \widehat{L} , если их рассматривать как функции на M .

Введём фазовое пространство в виде кокасательного расслоения $T^*\widetilde{M}$ с двумя типами координат: $(\phi, x_1, x_2; p_\phi, p_1, p_2)$ и $(y_1, y_2, x_2; \xi_1, \xi_2, p_2)$, где p_ϕ , p_1 , p_2 , ξ_1 , ξ_2 – импульсные координаты. Теперь при рассмотрении оператора \widetilde{L} не возникает каустик, связанных с обращением в бесконечность импульсных переменных, и можно обычным методом построить его асимптотические собственные функции, требуя при этом, чтобы они были постоянными на множествах вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$.

На многообразии \widetilde{M} можно ввести действие группы $U(1)$ сдвигами по углу ϕ (в других координатах – вращениями в плоскости (y_1, y_2) на соответствующий угол). Тогда множества вида $\lambda^{-1}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in M$, являются орбитами этого действия. Это действие переносится и на многообразии $T^*\widetilde{M}$.

Для построения асимптотических собственных функций, быстроубывающих при удалении от одномерной кривой в M , мы используем изложенный в [7] метод комплексного роста Маслова. Основным объектом здесь является изотропное многообразие с комплексным ростком, инвариантное относительно гамильтонова потока. Инвариантное относительно гамильтонова потока изотропное многообразие в $T^*\widetilde{M}$ с комплексным ростком должно принадлежать множеству $\{p_\phi = 0\} \subset T^*\widetilde{M}$ (в координатах $(y_1, y_2, x_2; \xi_1, \xi_2, p_2)$ это множество задаётся уравнением $y_1\xi_2 - y_2\xi_1 = 0$) и быть инвариантным (вместе с комплексным ростком) относительно введённого выше $U(1)$ -действия.

В нашем случае изотропное многообразие лежит в подпространстве $\{x_2 = p_2 = 0\}$ и имеет размерность 2, а комплексный росток представляет собой прямую сумму комплексифицированной касательной плоскости к изотропному многообразию и прямой в комплексифицированной плоскости (x_2, p_2) .

7.2. Изотропное многообразие с комплексным ростком. Далее мы рассмотрим канонический оператор на изотропном многообразии с комплексным ростком следующего вида. Пусть изотропное многообразие с координатами $\psi \in \mathbb{S}^1$, t в шестимерном пространстве с координатами $(y_1, y_2, x_2, \xi_1, \xi_2, p_2)$ задано функциями $Y(t, \psi) = (Y_1(t, \psi), Y_2(t, \psi))$, $X_2(t, \psi)$, $\Xi(t, \psi) = (\Xi_1(t, \psi), \Xi_2(t, \psi))$, $P_2(t, \psi)$ вида

$$Y(t, \psi) = \eta(t)\mathbf{n}(\psi), \quad \Xi(t, \psi) = \rho(t)\mathbf{n}(\psi), \quad X_2(t, \psi) = 0, \quad P_2(t, \psi) = 0,$$

где $\mathbf{n}(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)$, а η, ρ – некоторые функции со свойствами $\eta(-t) = -\eta(t)$, $\rho(t) > 0$, $\dot{\eta}(t) > 0$. Пусть на изотропном многообразии задан комплексный росток, натянутый на векторы

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Y_1(t, \psi), Y_2(t, \psi), 0, \Xi_1(t, \psi), \Xi_2(t, \psi), 0), \\ & \frac{\partial}{\partial \psi}(Y_1(t, \psi), Y_2(t, \psi), 0, \Xi_1(t, \psi), \Xi_2(t, \psi), 0), \quad (0, 0, Z_2(t), 0, 0, W_2(t)), \end{aligned}$$

где $Z_2(t)$, $W_2(t)$ – некоторые комплекснозначные функции.

Если выбрать подходящим образом функции η, ρ (а именно так, чтобы при всех t выполнялось тождество $D_{10}((\eta(t))^2/4)(2\rho(t)/\eta(t))^2 = E$), а в качестве $Z_2(t)$, $W_2(t)$ взять функции, определённые равенством (18), то под действием проекции λ на множестве $\lambda^{-1}(M)$ данное изотропное многообразие с комплексным ростком перейдёт в кривую, определённую траекторией системы (14), с инвариантным относительно этой системы комплексным ростком над ней.

Якобиан $\det[\partial(Y_1, Y_2)/\partial(t, \psi)] = \eta(t)\dot{\eta}(t)$ равен нулю в точке $t = 0$, поэтому канонический оператор, согласно общей теории, должен быть записан в виде интеграла по крайней мере по одной из импульсных переменных ξ_1 или ξ_2 .

7.3. Канонический оператор в виде интеграла по импульсным переменным. Рассмотрим функции вида

$$A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) = a\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(\frac{i}{2}W_2(t)Z_2^{-1}(t)\frac{x_2^2}{h}\right), \quad \text{Im } W_2(t)Z_2^{-1}(t) > 0, \quad Z_2(t) \neq 0, \quad (27)$$

где a – некоторая гладкая комплекснозначная функция. Функция A , определённая в (22), является функцией такого вида. Введём также функцию действия $\tau(t)$ такую, что

$$d\tau(t) = \Xi_1(t, \psi) dY_1(t, \psi) + \Xi_2(t, \psi) dY_2(t, \psi) = \rho(t) d\eta(t).$$

Для построения канонического оператора в виде интеграла по импульсным переменным обобщим формулы, полученные в работе [14]. На изотропном многообразии введём карты $\Omega_1 = \{\psi \in (-3\pi/8, 3\pi/8)\}$, $\Omega_3 = \{\psi \in (5\pi/8, 11\pi/8)\}$ с координатами (y_1, ξ_2) и карты $\Omega_2 = \{\psi \in (\pi/8, 7\pi/8)\}$, $\Omega_4 = \{\psi \in (9\pi/8, 15\pi/8)\}$ с координатами (ξ_1, y_2) . Введём также подчинённое покрытие многообразия этими картами разбиение единицы

$$e_1(\psi) + e_2(\psi) + e_3(\psi) + e_4(\psi) = 1.$$

Асимптотическая собственная функция $u(y, x_2, h)$ оператора \widetilde{L} в окрестности точки $y_1 = y_2 = x_2 = 0$ строится методом комплексного роста Маслова и имеет следующий вид (см. [7, с. 223]):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)} u(y, x_2, h) = \sum_{j=1,3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \det \frac{\partial(y_1, \xi_2)}{\partial(t, \psi)} \right|^{-1/2} A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \times \\ & \times e_j(\psi) \exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) - Y_2(t, \psi)\Xi_2(t, \psi) + y_2\xi_2)\right) \Bigg|_{\substack{t=t(y_1, \xi_2) \\ \psi=\psi(y_1, \xi_2)}} d\xi_2 + \sum_{j=2,4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \det \frac{\partial(\xi_1, y_2)}{\partial(t, \psi)} \right|^{-1/2} A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \times \end{aligned}$$

$$\times e_j(\psi) \exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) - Y_1(t, \psi)\Xi_1(t, \psi) + y_1\xi_1)\right) \Big|_{\substack{t=t(\xi_1, y_2) \\ \psi=\psi(\xi_1, y_2)}} d\xi_1, \quad (28)$$

где пары функций $t(y_1, \xi_2)$, $\psi(y_1, \xi_2)$ и $t(\xi_1, y_2)$, $\psi(\xi_1, y_2)$ являются обращениями функций $Y(t, \psi)$, $\Xi(t, \psi)$ в областях Ω_j , $j = 1, 2, 3, 4$.

7.4. Канонический оператор в виде интеграла по окружности. Сделаем замену переменной $\xi_2 \mapsto \psi$ в первом интеграле в (28), которая задаётся функцией $\xi_2 = \Xi_2(t(y_1, \xi_2), \psi)$, и замену переменной $\xi_1 \mapsto \psi$ во втором интеграле, которая задаётся функцией

$$\xi_1 = \Xi_1(t(\xi_1, y_2), \psi).$$

Вычислим матрицы Якоби обратных отображений и нужные нам частные производные:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial y_1} & \frac{\partial t}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(y_1, \xi_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} = \left(\det \frac{\partial(y_1, \xi_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \rho \cos \psi & \eta \sin \psi \\ -\dot{\rho} \sin \psi & \dot{\eta} \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial \xi_1} & \frac{\partial t}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(\xi_1, y_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} = \left(\det \frac{\partial(\xi_1, y_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \cos \psi & \rho \sin \psi \\ -\dot{\eta} \sin \psi & \dot{\rho} \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} = \dot{\eta} \cos \psi \left(\det \frac{\partial(y_1, \xi_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} = \frac{\dot{\eta} \cos \psi}{\dot{\eta} \rho \cos^2 \psi + \eta \dot{\rho} \sin^2 \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} = -\dot{\eta} \sin \psi \left(\det \frac{\partial(\xi_1, y_2)}{\partial(t, \psi)}\right)^{-1} = \frac{\dot{\eta} \sin \psi}{\eta \dot{\rho} \cos^2 \psi + \dot{\eta} \rho \sin^2 \psi}.$$

Пусть η^{-1} – обратная к η функция. После замены переменных получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)} u(y, x_2, h) &= \sum_{j=1,3} \int_0^{2\pi} A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) e_j(\psi) \frac{|\dot{\eta}(t)\rho(t) \cos^2 \psi + \eta(t)\dot{\rho}(t) \sin^2 \psi|^{1/2}}{|\dot{\eta}(t) \cos \psi|} \times \\ &\times \exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) + \rho(t)(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \eta(t)))\right) \Big|_{t=\eta^{-1}(y_1/\cos \psi)} d\psi + \sum_{j=2,4} \int_0^{2\pi} A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) e_j(\psi) \times \\ &\times \frac{|\eta(t)\dot{\rho}(t) \cos^2 \psi + \dot{\eta}(t)\rho(t) \sin^2 \psi|^{1/2}}{|\dot{\eta}(t) \sin \psi|} \exp\left(\frac{i}{h}(\tau(t) + \rho(t)(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \eta(t)))\right) \Big|_{t=\eta^{-1}(y_2/\sin \psi)} d\psi. \quad (29) \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл в (29). Запишем фазовую функцию, стоящую в аргументе экспоненты в следующем виде:

$$\tilde{\Phi}(y_1, y_2, \psi) = \tau\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos \psi}\right)\right) + \rho\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos \psi}\right)\right) \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi}\right).$$

Введём функцию

$$\Phi(y_1, y_2, \psi) = \tau(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)).$$

Множества нулей у функций $\partial\tilde{\Phi}/\partial\psi$ и $\partial\Phi/\partial\psi$ в пространстве (y_1, y_2, ψ) одинаковы и совпадают с множеством

$$C_\Phi = \{(y_1, y_2, \psi) : y = \alpha \mathbf{n}(\psi), \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Более того, разность функций $\tilde{\Phi}$ и Φ на множестве C_Φ имеет нуль второго порядка. Чтобы это увидеть, достаточно воспользоваться формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} \tau(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) &= \tau\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos \psi}\right)\right) + \rho\left(\eta^{-1}\left(\frac{y_1}{\cos \psi}\right)\right) \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))} \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi}\right)^2 + O\left(\left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Из теории осциллирующих интегралов следует, что существует замена переменной в интеграле, приводящая его к осциллирующему интегралу с фазовой функцией $\tilde{\Phi}$. Пусть отношение для двух функций $f_1 \stackrel{C_\Phi}{=} f_2$ означает их равенство на множестве C_Φ , т.е. $f_1|_{C_\Phi} = f_2|_{C_\Phi}$ (если функции зависят также от параметра x_2/\sqrt{h} , то равенство понимается в смысле равенства при всех фиксированных его значениях). Введём для амплитудной функции в первом интеграле в (29) обозначение

$$\tilde{a}\left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) = A\left(t, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) e_j(\psi) \frac{|\dot{\eta}(t)\rho(t) \cos^2 \psi + \eta(t)\dot{\rho}(t) \sin^2 \psi|^{1/2}}{|\dot{\eta}(t) \cos \psi|} \Big|_{t=\eta^{-1}(y_1/\cos \psi)}.$$

Для некоторой функции $a(y_1, y_2, \psi, x_2/\sqrt{h})$ такой, что

$$a\left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \stackrel{C_\Phi}{=} \left| \det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} \right|^{1/2} \left| \det \frac{\partial(t, \psi, \tilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} \right|^{-1/2} \tilde{a}\left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right), \quad (30)$$

где $t(y_1, y_2, \psi) = \eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)$, $\psi(y_1, y_2, \psi) = \psi$, верно равенство (см. [15, раздел 3.2])

$$\int_0^{2\pi} \tilde{a}\left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(\frac{i}{h} \tilde{\Phi}(y_1, y_2, \psi)\right) d\psi = \int_0^{2\pi} a\left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(\frac{i}{h} \Phi(y_1, y_2, \psi)\right) d\psi.$$

Вычислим в равенстве (30) отношение определителей, ограниченное на множество C_Φ . Преобразуем это отношение следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(\det \frac{\partial(t, \psi, \tilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\right)^{-1} \det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} = \\ &= \left(\det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} - \det \frac{\partial(t, \psi, (\Phi - \tilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\right)^{-1} \det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} = \\ &= \left(1 - \left(\det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\right)^{-1} \det \frac{\partial(t, \psi, (\Phi - \tilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)}\right)^{-1}. \quad (31) \end{aligned}$$

Для частной производной Φ'_ψ верно равенство $\Phi'_\psi = \rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \langle y, \mathbf{n}'(\psi) \rangle$. Один из определителей равен

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial y_1} & \frac{\partial t}{\partial y_2} & * \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_2} & * \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial y_1} & \frac{\partial t}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi'_\psi}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) & \dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \\ \rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))(-\sin \psi) & \rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \cos \psi \end{pmatrix} = -\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}. \end{aligned}$$

Для разности функций

$$\Phi - \tilde{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))} \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi} \right)^2 + O \left(\left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi} \right)^3 \right)$$

рассмотрим частную производную второго порядка на множестве C_Φ :

$$\begin{aligned} (\Phi - \tilde{\Phi})''_{\psi y} &\stackrel{C_\Phi}{=} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(y_1/\cos \psi))} \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi} \right)'_{\psi} \left(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle - \frac{y_1}{\cos \psi} \right)'_y \stackrel{C_\Phi}{=} \\ &\stackrel{C_\Phi}{=} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))} \begin{pmatrix} -y_1 \sin \psi \\ \cos^2 \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}^T + \mathbf{n}(\psi)(\dots) \stackrel{C_\Phi}{=} \\ &\stackrel{C_\Phi}{=} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))} \langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \mathbf{n}(\psi)(\dots). \end{aligned}$$

На множестве C_Φ вычислим определитель

$$\det \frac{\partial(t, \psi, (\Phi - \tilde{\Phi})'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} \stackrel{C_\Phi}{=} - \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial y_1} & \frac{\partial t}{\partial y_2} \\ \frac{\partial(\Phi - \tilde{\Phi})'_\psi}{\partial y_1} & \frac{\partial(\Phi - \tilde{\Phi})'_\psi}{\partial y_2} \end{pmatrix} \stackrel{C_\Phi}{=} \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{\dot{\eta}^2(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))} \langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi}.$$

Подставив результаты вычислений в равенство (31), получим отношение определителей в (30) на множестве C_Φ :

$$\left(\det \frac{\partial(t, \psi, \tilde{\Phi}'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} \right)^{-1} \det \frac{\partial(t, \psi, \Phi'_\psi)}{\partial(y_1, y_2, \psi)} \stackrel{C_\Phi}{=} \left(1 + \frac{\dot{\rho}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle \sin^2 \psi}{\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle)) \cos^2 \psi} \right)^{-1}.$$

Запишем соотношение (30) следующим образом:

$$a \left(y_1, y_2, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) \stackrel{C_\Phi}{=} A \left(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle), \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) e_j(\psi) \sqrt{\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{|\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))|}}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \tilde{a} \left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) \exp \left(\frac{i}{h} \tilde{\Phi}(y, \psi) \right) d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a_0 \left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) e_j(\psi) + a_1 \left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) \right) \exp \left(\frac{i}{h} \Phi(y, \psi) \right) d\psi, \end{aligned}$$

где a_1 – некоторая функция, удовлетворяющая отношению $a_1 \stackrel{C_\Phi}{=} 0$, и

$$a_0 \left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) = A \left(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle), \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) \sqrt{\frac{\rho(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))}{|\dot{\eta}(\eta^{-1}(\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle))|}}.$$

При этом имеем стандартную оценку для интеграла

$$\int_0^{2\pi} a_1 \left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}} \right) \exp \left(\frac{i}{h} \Phi(y, \psi) \right) d\psi = O(h), \quad (32)$$

которая может быть доказана интегрированием по частям (см., например, рассуждения в [16, раздел 4.2]). Из вида функции A следует, что функции a_0 и $a_0 + a_1$, а следовательно, и a_1 , являются ограниченными по y и x_2/\sqrt{h} вместе со всеми производными по переменным x_2/\sqrt{h} , y , ψ . Поскольку оценка (32) может быть доказана интегрированием по частям, из ограниченности функции a_1 вместе с производными следует, что оценка (32) является равномерной по переменным y , x_2/\sqrt{h} .

Такие же, как и проведённые выше, рассуждения справедливы и для второго интеграла в (29). В результате получаем

$$\frac{\sqrt{2\pi h}}{\exp(i\pi/4)} u(y, x_2, h) = \int_0^{2\pi} a_0\left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(\frac{i}{h}\Phi(y, \psi)\right) d\psi + O(h). \tag{33}$$

7.5. Асимптотика интеграла в виде функций Бесселя. Для интеграла из равенства (33) воспользуемся асимптотикой, предложенной в работе [9] (чтобы привести интеграл из (33) к рассматриваемому в [9] типу нужно сделать замену $\psi = \text{Arg}(y_1 + iy_2) + \phi$, переводящую функцию $\langle y, \mathbf{n}(\psi) \rangle$ в $|y| \cos \phi$). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} u(y, x_2, h) &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^{2\pi} a_0\left(y, \psi, \frac{x_2}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(\frac{i}{h}\Phi(y, \psi)\right) d\psi = \sqrt{\frac{\pi F_{\text{odd}}(|y|)}{2h|y|}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i}{h}F_{\text{ev}}(|y|)\right) \left\{ \left[J_0\left(\frac{F_{\text{odd}}(|y|)}{h}\right) + iJ_1\left(\frac{F_{\text{odd}}(|y|)}{h}\right) \right] \left(\frac{A(\eta^{-1}(|y|), x_2/\sqrt{h})}{\sqrt{|\dot{\eta}(\eta^{-1}(|y|))|}} + O(h) \right) + \right. \\ &\left. + \left[J_0\left(\frac{F_{\text{odd}}(|y|)}{h}\right) - iJ_1\left(\frac{F_{\text{odd}}(|y|)}{h}\right) \right] \left(\frac{A(\eta^{-1}(-|y|), x_2/\sqrt{h})}{\sqrt{|\dot{\eta}(\eta^{-1}(-|y|))|}} + O(h) \right) \right\}, \tag{34} \end{aligned}$$

где $2F_{\text{ev}}(r) = \tau(\eta^{-1}(r)) + \tau(\eta^{-1}(-r))$, $2F_{\text{odd}}(r) = \tau(\eta^{-1}(r)) - \tau(\eta^{-1}(-r))$. Полученная асимптотика инвариантна относительно вращения в плоскости (y_1, y_2) . Если теперь положить

$$|y| = 2\sqrt{z_s(x_1)}, \quad \eta(t) = \text{sign}(t) \cdot 2\sqrt{z_s(X_1(t, E))}, \quad \tau(t) = 2Et,$$

то функция (34) в окрестности точки $x_1 = b_s$ с точностью до умножения на не зависящую от h постоянную совпадёт с формулой (24) для канонического оператора, соответствующего одномерной кривой в двумерном пространстве. Таким образом, асимптотика спектральной задачи может быть выражена через канонический оператор (24) на одномерной кривой в двумерном пространстве с аргументом, включающим зависимость от x_2/\sqrt{h} вида (27).

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову за постановку задачи и помощь в работе. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10282).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keller J.B., Rubinow S.I. Asymptotic solution of eigenvalue problems // Annals of Physics. 1960. V. 9. P. 24–75.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972.
3. Клевин А.И. Асимптотические собственные функции типа “прыгающего мячика” двумерного оператора Шрёдингера с симметричным потенциалом // ТМФ. 2019. Т. 199. № 3. С. 429–444.
4. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 5. С. 780–786.
5. Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Цветкова А.В. Асимптотики собственных функций двумерного оператора $\nabla D(x)\nabla$, связанные с бильярдами с полужёсткими стенками, и захваченные береговые волны // Мат. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 792–797.

6. Назайкинский В.Е. Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Мат. заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 261–276.
7. Maslov V.P. The Complex WKB Method for Nonlinear Equations I. Birkhäuser, Basel, 1994.
8. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 2. С. 53–96.
9. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Об асимптотике интеграла типа Бесселя, имеющего приложения в теории набега волн на берег // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 6. С. 828–835.
10. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. СПб, 2008.
11. Гельфанд И.М., Лидский В.Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. № 1(63). С. 3–40.
12. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2019. Т. 306. С. 83–99.
13. Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Простые асимптотики обобщённого волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 483–504.
14. Доброхотов С.Ю., Макракис Г.Н., Назайкинский В.Е., Тудоровский Т.Я. Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // ТМФ. 2013. Т. 177. № 3. С. 355–386.
15. Hörmander L. Fourier integral operators. I // Acta Mathematica. 1971. V. 127. P. 79–183.
16. Dobrokhotov S.Y., Makrakis G., Nazaikinskii V.E. Fourier integrals and a new representation of Maslov's canonical operator near caustics // Amer. Math. Soc. Transl. 2014. V. 233. P. 95–115.

Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 26.06.2020 г.
После доработки 24.09.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.