ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 255–264

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.222+517.968.21

ПОЛНОТА АСИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2021 г. М. Ю. Кокурин

Устанавливается свойство полноты в пространстве $L_2(D)$, где D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, произведений всевозможных регулярных решений уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}_+ \bigcup i\mathbb{R}_-$, и фундаментальных решений этого уравнения с особенностями на прямой, не пересекающей $\overline{D}$. Результат используется при установлении единственности решения коэффициентной обратной задачи волновой томографии в непереопределённой постановке.

DOI: 10.31857/S0374064121020126

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – некоторые семейства функций из $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющих в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, уравнению $\Delta u - \kappa^2 u = 0$, где κ – постоянная, $\kappa \in \mathbb{R} \bigcup i\mathbb{R}$. В работе рассматривается вопрос о том, в каких случаях семейство всех попарных произведений

$$\pi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{u_1 u_2 : u_j \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2\}$$

образует полную систему в $L_2(D)$.

Обозначим $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$. В частном случае $\kappa = 0$ для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1.1 [1; 2, с. 138]. *Семейство $\{u_1 u_2\}$, состоящее из попарных произведений гармонических в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, функций $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$, полно в пространстве $L_2(D)$.*

Предложение 1.2 [3, теорема 7.1]. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, точка $x_0 \in \partial D$ фиксирована и $\partial D \in C^\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что семейство $\{u_1 u_2\}$, состоящее из попарных произведений гармонических в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и обращающихся в нуль на $\partial D \setminus O_\varepsilon(x_0)$ функций $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$, полно в пространстве $L_2(D \setminus O_\delta(x_0))$.*

Утверждения такого типа широко используются при установлении единственности решений коэффициентных обратных задач для различных классов уравнений в частных производных [2]. Следуя [4–6], поясним роль утверждений типа предложений 1.1, 1.2 в этом круге вопросов. В работах [4, 5] М.М. Лаврентьев предложил подход к решению нелинейных коэффициентных обратных задач, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Подход использует преобразование Лапласа исследуемого уравнения по соответствующим переменным.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, обратную задачу волновой томографии ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности. Волновое поле $u(x;t) = u_y(x;t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке y, определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - \lambda^2 u(x,t) - \delta(x-y) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0;$$

$$u(x,0)|_{t<0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь λ – заданное неотрицательное число, $c(x) > 0$ – скорость сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и предполагается, что $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ с известной постоянной c_0, а значения $c(x)$ при $x \in D$ неизвестны. Для определённости функцию $c = c(x)$ считаем кусочно-непрерывной. Гладкая функция g удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^\infty g(t)\,dt \neq 0; \quad |g(t)| \leqslant C_0 e^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Для отыскания $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u_y(x;t)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in X$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – множество детекторов, $X \bigcap \overline{D} = \varnothing$. Будем считать, что в эксперименте зондирования используется множество источников $y \in Y$, $Y \bigcap \overline{D} = \varnothing$, $X \bigcap Y = \varnothing$. Для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geqslant 0$, определим преобразование Лапласа $\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$. Будем считать, что все функции $u_y(x,t)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно равномерно относительно $x \in X$ интегрируемы по t и, кроме того, $u_y(x,t) \to 0$, $y \in Y$, при $|x| \to \infty$ равномерно по $t > 0$. Необходимые для этого условия на функцию $c(x)$ можно оценить, исходя из результатов [7, гл. X; 8]. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и запишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(x,t) - \lambda^2 u(x,t) = \xi(x) u_{tt}(x,t) + \delta(x-y) g(t). \tag{1.2}$$

Функция c однозначно определяется по функции ξ, поэтому далее ограничимся отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$. Нас будет интересовать единственность решения поставленной обратной задачи в зависимости от вида пространственного носителя данных $X \times Y$. Имея это в виду, обозначим рассматриваемую обратную задачу через $\{X, Y\}$.

Применяя к обеим частям уравнения (1.2) преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \widetilde{u}_y(x,p) - \kappa^2(p) \widetilde{u}_y(x,p) = p^2 \xi(x) \widetilde{u}_y(x,p) + \widetilde{g}(p)\delta(x-y), \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{y\}, \tag{1.3}$$

$\kappa(p) = \sqrt{\lambda^2 + p^2/c_0^2}$. В силу сделанных предположений имеем $\widetilde{u}_y(x,p) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для $y \in Y$, $p \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ множества соответственно положительных и отрицательных действительных чисел. Нам понадобится функция Грина уравнения

$$\Delta v(x) - \kappa^2 v(x) = -\delta(x - x'), \tag{1.4}$$

$\kappa \in \mathbb{R}_+ \bigcup i\mathbb{R}_-$, имеющая вид [9, с. 98]

$$G(x, x'; \kappa) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{\kappa}{|x - x'|}\right)^{(n-2)/2} K_{(n-2)/2}(\kappa |x - x'|). \tag{1.5}$$

Здесь $K_\nu(z)$ – функция Макдональда [10, с. 196],

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz). \tag{1.6}$$

Если $\kappa > 0$, то функция (1.5) есть фундаментальное решение уравнения (1.4) с условием на бесконечности: $v(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

В случае $\kappa = -iq,\ q > 0,$ функция (1.5) есть фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Delta v(x) + q^2 v(x) = -\delta(x - x'),$ описывающее волновое поле точечного источника, зависящего от времени по закону e^{iqt}. Указанное решение выделяется условием излучения на бесконечности
$$\lim_{r\to\infty} r^{(n-1)/2}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial r} + iqv(x)\right| = 0, \quad \text{где} \quad r = |x|.$$

Из уравнения (1.3) следует равенство
$$\widetilde{u}_y(x,p) = p^2 \int\limits_D G(x,x';\kappa(p))\xi(x')\widetilde{u}_y(x',p)\,dx' + \widetilde{g}(p)G(x,y;\kappa(p)), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{y\}.$$

Отсюда получаем
$$\widetilde{u}_y(x,p) = p^4 \int\limits_D\int\limits_D G(x,x';\kappa(p))G(x',x'';\kappa(p))\widetilde{u}_y(x'',p)\xi(x')\,dx'\,dx'' +$$
$$+ p^2\widetilde{g}(p)\int\limits_D G(x,x';\kappa(p))G(x',y;\kappa(p))\xi(x')\,dx' + \widetilde{g}(p)(x,y;\kappa(p)), \quad x \in X. \tag{1.7}$$
Деление обеих частей равенства (1.7) на $p^2\widetilde{g}(p)$ и затем переход к пределу при $p \to 0+$ приводит к линейному интегральному уравнению относительно искомой функции ξ:
$$\int\limits_D G(x,x';\lambda)G(y,x';\lambda)\xi(x')\,dx' = f(x,y), \quad (x,y) \in X\times Y. \tag{1.8}$$

Здесь
$$f(x,y) = \lim_{p\to 0+}\frac{\widetilde{u}_y(x,p) - \widetilde{g}(p)G(x,y;\kappa(p))}{\widetilde{g}(0)p^2}.$$
Таким образом, правая часть уравнения (1.8) вычисляется по данным наблюдения $\{u_y(x;t):$ $t > 0,\ \ x \in X,\ \ y \in Y\}$.

К уравнению (1.8) с $\lambda \in i\mathbb{R}_-$ сводятся также обратные задачи зондирования неоднородности точечными гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [11, с. 223; 12, § 3.1]). К аналогичному уравнению с заменой (1.5) функцией Грина в ограниченной области Ω сводится обратная задача зондирования неоднородного включения $D \subset \Omega$ [13].

Начиная с работы [5], значительное число публикаций было посвящено установлению условий, при которых уравнение (1.8) имеет не более одного решения (см. [2, 12]). Уравнение (1.8) имеет не более одного решения, например, если $X,\ Y$ – открытые области на гиперплоскости, не пересекающей $D,$ или на замкнутой гиперповерхности, содержащей множество D внутри себя. В этих случаях соответствующее (1.8) однородное уравнение эквивалентно равенству
$$\int\limits_D u_1(x')u_2(x')\xi(x')\,dx' = 0, \quad u_j \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1,2, \tag{1.9}$$
где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ – семейство всех функций из $C^2(\overline{D}),$ удовлетворяющих уравнению $\Delta u(x) - \lambda^2 u(x) = 0,\ x \in D.$ Таким образом, полнота семейства $\pi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ в $L_2(D)$ влечёт за собой равенство $\xi = 0$ п.в. Поэтому задача $\{X, Y\}$ имеет единственное решение.

В описанном случае размерность пространственного носителя данных $X\times Y$ в уравнении (1.8) равна $2(n-1),$ в то время как искомая функция ξ зависит от n переменных. Поскольку $2(n-1) > n$ при $n \geqslant 3,$ рассматриваемая обратная задача относится к классу переопределённых, т.е. задач с завышенными требованиями к объёму входных данных. Эквивалентная трактовка указанной переопределённости заключается в том, что полнота семейства $\pi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ в $L_2(D)$ вероятно может иметь место и при замене пространств $\mathcal{H}_j$ более узкими семействами. Напомним, что в предложениях 1.1, 1.2 классы $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ совпадают с множествами всех регулярных решений соответствующих уравнений, возможно, с наложением граничного условия. В настоящей работе рассмотрим асимметричный случай, когда один из классов $\mathcal{H}_j$ является по-прежнему семейством всех регулярных решений уравнения $\Delta u-\kappa^2u=0$ в $D\subset\mathbb{R}^n$, тогда как другой класс образован фундаментальными решениями этого уравнения с особенностями в точках прямой, не пересекающей $\overline{D}$. Хотя последний класс значительно уже класса всех регулярных решений, порождаемое ими семейство $\pi(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ попарных произведений сохраняет свойство полноты в $L_2(D)$.

Перейдём к строгой формулировке результата. Для $x\in\mathbb{R}^n$ обозначим $x=(\widehat{x},x_n)$, $\widehat{x}= (x_1,\ldots,x_{n-1})$. Определим прямую

$$\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{R}^n:\widehat{x}=0,\quad x_n\in\mathbb{R}\}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область, замыкание которой не имеет общих точек с $\mathcal{L}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $\kappa\in\mathbb{R}_+\bigcup i\mathbb{R}_-$ *– фиксированное число. Тогда линейные комбинации функций семейства* $\pi(\mathcal{H}_1^*,\mathcal{H}_2^*)$, *где*

$$\mathcal{H}_1^*=\{u\in C^2(\overline{D}):\Delta u-\kappa^2u=0\ \ \textit{в}\ \ D\},\quad \mathcal{H}_2^*=\{G(x,z;\kappa):z\in\mathcal{L}\},$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

В случае $\kappa=0$ утверждение теоремы 1.1 доказано в [14].

Доказательству теоремы 1.1 посвящены пп. 2, 3. В п. 4 обсуждается приложение этой теоремы к обратной задаче $\{X,Y\}$.

2. Вспомогательные построения. Обозначим $S_R^{n-2}=\{\widehat{x}\in\mathbb{R}^{n-1}:|\widehat{x}|=R\}$. Пусть $\{Y_{k,l}(\varphi):k=0,1,\ldots,\ \ l=\overline{1,d_k}\}$, $\varphi\in S_1^{n-2}$, – семейство ортонормированных в $L_2(S_1^{n-2})$ сферических функций, где [15, с. 160]

$$d_0=1,\quad d_1=n-1;\quad d_k=C_{n-2+k}^k-C_{n-4+k}^{k-2},\quad k\geqslant 2.$$

Введём в $\mathbb{R}^{n-1}=\{\widehat{x}\}$ сферические координаты $\rho\geqslant 0$, $\varphi\in S_1^{n-2}$, где $\rho=|\widehat{x}|$, $\varphi=\widehat{x}/|\widehat{x}|$. В угловых координатах $(\phi_1,\ldots,\phi_{n-3},\phi_{n-2})\in[0,\pi]^{n-3}\times[0,2\pi]$ вектор $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ записывается в виде

$$\varphi_1=\cos\phi_1,\quad \varphi_2=\sin\phi_1\cos\phi_2,\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad \varphi_{n-2}=\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-3}\cos\phi_{n-2},\quad \varphi_{n-1}=\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{n-3}\sin\phi_{n-2}. \tag{2.1}$$

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно убедиться в том, что соотношение

$$\int\limits_D h(x)u(x)G(x,z;\kappa)\,dx=0\ \ \text{для любых}\ \ z\in\mathcal{L}\ \ \text{и всех}\ \ u\in C^2(\overline{D}),\quad \Delta u-\kappa^2u=0\ \ \text{в}\ \ D, \tag{2.2}$$

с $h\in L_2(D)$ влечёт за собой равенство $h=0$ п.в. в D.

Рассмотрим вначале случай $\kappa\in\mathbb{R}_+$. Уравнению $\Delta u-\kappa^2u=0$ удовлетворяет экспоненциальная функция $u(x)=u(\widehat{x},x_n)=e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_nx_n}$, где $\lambda_n^2=\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2$. Здесь и далее $(\widehat{\lambda},\widehat{x})=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_{n-1}x_{n-1}$. Таким образом, из (1.5) и (2.2) следует, что при значении

$$\lambda_n=\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2} \tag{2.3}$$

выполняется равенство

$$\int\limits_D\frac{h(x)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_nx_n}K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dx=0 \tag{2.4}$$

для любого $z_n\in\mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Применим к левой части равенства (2.4) преобразование Фурье по переменной z_n. Согласно [16, с. 59] будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z_n} \frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dz_n = e^{-i\mu x_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu u}\frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+u^2})}{(|\widehat{x}|^2+u^2)^{(n-2)/4}}\,du =$$

$$= 2e^{-i\mu x_n}\int\limits_{0}^{\infty}\cos(\mu u)\frac{K_{(n-2)/2}(\kappa\sqrt{|\widehat{x}|^2+u^2})}{(|\widehat{x}|^2+u^2)^{(n-2)/4}}\,du =$$

$$= \sqrt{2\pi}e^{-i\mu x_n}\kappa^{-(n-2)/2}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}(\kappa^2+\mu^2)^{(n-3)/4}K_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{\kappa^2+\mu^2}).$$

Поэтому из (2.2), (2.3) следует, что

$$\int\limits_{D} h(\widehat{x},x_n)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+(\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-i\mu)x_n}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}K_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{\kappa^2+\mu^2})\,d\widehat{x}\,dx_n = 0 \qquad (2.5)$$

для всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$ и любого $\mu\in\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что функция в левой части равенства (2.5) аналитична по $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{\pm i\kappa\}$ при каждом $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда следует, что это равенство продолжается по аналитичности на все значения $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{\pm i\kappa\}$.

Полагая в (2.5) $\mu = p - i\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}$, $p\in\mathbb{R}$, получаем, что для всех $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{D} h(\widehat{x},x_n)e^{-ipx_n}e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})}|\widehat{x}|^{-(n-3)/2}K_{(n-3)/2}\biggl(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\biggr)\,d\widehat{x}\,dx_n = 0. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим преобразование Фурье в $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$(\mathcal{F}f)(\widehat{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\widehat{x},\widehat{y})}f(\widehat{x})d\widehat{x}, \quad \widehat{y}\in\mathbb{R}^{n-1},$$

на функциях вида $f(\widehat{x}) = F(\rho)Y_{k,l}(\varphi)$, $\rho = |\widehat{x}|$, $\varphi = \widehat{x}/|\widehat{x}|$. Обозначим $r = |\widehat{y}|$, $\theta = \widehat{y}/|\widehat{y}|$. Угловые координаты точки $\theta\in S_1^{n-2}$ определяются формулами (2.1) с заменой в них φ на θ. Нам понадобится известное утверждение из [17, с. 83], которое ниже формулируется в виде, адаптированном к нашим обозначениям.

Лемма. *Пусть F – непрерывная финитная функция с компактным носителем в $(0,\infty)$. Тогда для $f(\widehat{x}) = F(\rho)Y_{k,l}(\varphi)$ справедливо равенство*

$$(\mathcal{F}f)(r,\theta) = (-i)^k(2\pi)^{(n-1)/2}r^{(3-n)/2}Y_{k,l}(\theta)\int\limits_{0}^{\infty} J_{(n-3+2k)/2}(sr)F(s)s^{(n-1)/2}\,ds. \qquad (2.7)$$

Зафиксируем финитную на $\mathbb{R}_+$ функцию $\eta = \eta(s)$, $s\geqslant 0$, и сферическую функцию $Y_{k,l}$ для некоторых $k\geqslant 0$ и $1\leqslant l\leqslant d_k$. Умножим обе части равенства (2.6) на $\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)$, где $\zeta = \widehat{\lambda}/|\widehat{\lambda}|$, и проинтегрируем результат по $\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}^{n-1}$. Функцию h считаем продолженной нулём вне D. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{h(\widehat{x},x_n)}{|\widehat{x}|^{(n-3)/2}}e^{-ipx_n}\times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})} K_{(n-3)/2}\left(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\right)\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)\,d\widehat{\lambda}\right) d\widehat{x}\,dx_n = 0. \qquad (2.8)$$

Согласно (2.7) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})} K_{(n-3)/2}\left(|\widehat{x}|\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+|\widehat{\lambda}|^2}-|\widehat{\lambda}|^2}\right)\eta(|\widehat{\lambda}|)Y_{k,l}(\zeta)\,d\widehat{\lambda} =$$

$$= (-i)^k(2\pi)^{(n-1)/2}\rho^{(3-n)/2}Y_{k,l}(\varphi)\times$$

$$\times \int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(sr)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+s^2}-s^2}\right)\eta(s)s^{(n-1)/2}\,ds, \qquad (2.9)$$

где $\varphi = \widehat{x}/|\widehat{x}|$, $\rho = |\widehat{x}|$. Выбирая в (2.9) в качестве η элемент последовательности финитных функций $\{\eta_n(s)\}$, сходящейся к $\delta(s-t)$, $t>0$, и переходя к пределу при $n\to\infty$, вследствие равенства (2.8) получаем

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\int\limits_{S_1^{n-2}} \rho h(\widehat{x}(\rho,\varphi),x_n)Y_{k,l}(\varphi)\,d\varphi\right)e^{-ipx_n}\,dx_n\right)\times$$

$$\times J_{(n-3+2k)/2}(t\rho)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+t^2}-t^2}\right)d\rho = 0 \qquad (2.10)$$

для любых $t>0$ и $p\in\mathbb{R}$. Здесь $\widehat{x}(\rho,\varphi)=\rho\varphi$ и при выводе использовалась формула [18, с. 774]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\widehat{x})\,d\widehat{x} = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{S_\rho^{n-2}} f(\widehat{x})\,d\varphi\right)d\rho = \int\limits_0^\infty \rho^{n-2}\left(\int\limits_{S_1^{n-2}} f(\widehat{x})\,d\varphi\right)d\rho,$$

в которой f – интегрируемая на $\mathbb{R}^{n-1}$ функция. Перейдём к анализу тождества (2.10).

3. Завершение доказательства основной теоремы. Введём обозначения

$$G_{k,l}(\rho,x_n) = \int\limits_{S_1^{n-2}} \rho h(\widehat{x}(\rho,\varphi),x_n)Y_{k,l}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$f_{p,k,l}(\rho) = \int\limits_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho,x_n)e^{-ipx_n}\,dx_n.$$

Из тождества (2.10) следует, что

$$\int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho)K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2-2pi\sqrt{\kappa^2+t^2}-t^2}\right)f_{p,k,l}(\rho)\,d\rho = 0 \qquad (3.1)$$

для любых $t>0$ и $p\in\mathbb{R}$.

Имеет место равенство

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-ip)^j}{j!}\int\limits_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho,x_n)x_n^j\,dx_n.$$

Обозначим через $\widehat{D}$ ортогональную проекцию области D на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} = \{\widehat{x}\}$. Поскольку $\overline{D}\bigcap\mathcal{L} = \varnothing$, то $0 \notin \overline{\widehat{D}}$. Поэтому $G_{k,l} \equiv 0$ вне прямоугольника $\{(\rho, x_n)\} = [a_1, a_2] \times \times [H_1, H_2]$ для некоторых $0 < a_1 < a_2$, $H_1 < H_2$ и соответственно $f_{p,k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$.

Зафиксируем какие-либо номера $k = k_0$, $l = l_0$. Возможны два случая.

Случай 1. При всех $j = 0, 1, \ldots$ справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^j\,dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$. Таким образом, в этом случае $f_{p,k,l} = 0$ п.в. для всех $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Случай 2. Найдётся такое $m \geqslant 0$, что $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^j\,dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$ и при всех $0 \leqslant j < m$, но функция $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^m\,dx_n$ отлична от нуля на множестве положительной меры в $[a_1, a_2]$.

В случае 1 по теореме Мюнца [19, с. 54; 20, с. 171] для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ имеем $G_{k,l}(\rho, x_n) = 0$, т.е.

$$\int\limits_{S_1^{n-2}} \rho h(\widehat{x}(\rho,\varphi), x_n)Y_{k,l}(\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{3.2}$$

Рассмотрим случай 2. В этом случае при $p \to 0+$ справедливо равенство

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^m\,dx_n + O(p^{m+1}), \tag{3.3}$$

а значит, при малых $p > 0$ будем иметь

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!}\bigg\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n)x_n^m\,dx_n\bigg\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$ при $0 < p \leqslant \varepsilon$.

Положим

$$\widetilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \frac{f_{p,k,l}(\rho)}{\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 < p \leqslant \varepsilon.$$

Используя (3.3) и (3.4), заключаем, что

$$\widetilde{f}_{p,k,l}(\rho) = \bigg(\bigg\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n)x_n^m\,dx_n\bigg\|_{L_2(0,\infty)} + O(p)\bigg)^{-1}\bigg((-i)^m\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^m\,dx_n + O(p)\bigg).$$

Отсюда следует соотношение

$$\lim_{p\to 0}\|\widetilde{f}_{p,k,l} - \widetilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \tag{3.5}$$

в котором обозначено

$$\widetilde{g}_{k,l}(\rho) = (-i)^m\bigg\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\,\cdot\,, x_n)x_n^m\,dx_n\bigg\|_{L_2(0,\infty)}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n)x_n^m\,dx_n.$$

Очевидно, что

$$\|\widetilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1 \tag{3.6}$$

и $\widetilde{g}_{k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_2]$. Согласно (3.1) для выбранных номеров $k = k_0$, $l = l_0$ выполняется тождество

$$\int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}\left(\rho\sqrt{p^2 - 2pi\sqrt{\kappa^2 + t^2} - t^2}\right) \widetilde{f}_{p,k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \tag{3.7}$$

для всех $t > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Здесь интегрирование фактически ведётся по отрезку $[a_1, a_2]$. Переходя в (3.7) к пределу при $p \to 0$, с учётом соотношения (3.5) получаем

$$\int\limits_0^\infty J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}(it\rho) \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \ \text{ для всех } \ t > 0. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Действительно, умножая обе части тождества (3.8) на t^{-s}, $s \in (0, 1)$, и интегрируя, находим

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{g}_{k,l}(\rho) \left(\int\limits_0^\infty t^{-s} J_{(n-3+2k)/2}(t\rho) K_{(n-3)/2}(it\rho)\, dt\right) d\rho = \Psi(s) \int\limits_0^\infty \rho^{s-1} \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0, \tag{3.9}$$

$$\Psi(s) = \int\limits_0^\infty \tau^{-s} J_{(n-3+2k)/2}(\tau) K_{(n-3)/2}(i\tau)\, d\tau. \tag{3.10}$$

В силу известных асимптотических оценок поведения функций $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ при $z \to 0, \infty$, $z \in \mathbb{C}$ [10, гл. 9], функция Ψ аналитична по $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \in (0, 1)$. Если $\Psi(s) = 0$ для всех $s \in (0, 1)$, то по теореме Мюнца [20, с. 172] из (3.10) вытекает противоречивое равенство $J_{(n-3+2k)/2}(\tau) K_{(n-3)/2}(i\tau) \equiv 0$. Поэтому найдётся отрезок $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$, для которого $\Psi(s) \neq\ \neq 0$, $s \in [\alpha, \beta]$. Но тогда из (3.9) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \rho^{s-1} \widetilde{g}_{k,l}(\rho)\, d\rho = 0 \tag{3.11}$$

для любого $s \in [\alpha, \beta]$. Напомним, что функция $\widetilde{g}_{k,l}$ имеет носитель, содержащийся в отрезке $[a_1, a_2] \subset (0, \infty)$. Следовательно, функция в левой части равенства (3.11) аналитична по s. Поэтому это равенство распространяется на все значения $s > 0$. Из теоремы об обращении преобразования Меллина [21, с. 73] теперь следует, что $\widetilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Полученное равенство противоречит (3.6). Тем самым показано, что случай 2 невозможен ни при каких k и l.

Таким образом, реализуется случай 1, поэтому в силу равенства (3.2) имеем

$$\int\limits_{S_1^{n-2}} h(\widehat{x}(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi)\, d\varphi = 0$$

для всех $k = 0, 1, \ldots$, $l = \overline{1, d_k}$ и для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$. Поскольку система сферических функций $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S_1^{n-2})$, отсюда следует, что

$$h(\widehat{x}(\rho, \varphi), x_n) = 0$$

для п.в. $\rho \geqslant 0$, $x_n \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S_1^{n-2}$. Следовательно, $h(x) = 0$ для п.в. $x \in D$. Рассмотрение случая $\kappa \in \mathbb{R}_+$ завершено.

В случае $\kappa \in i\mathbb{R}_-$ имеем $\kappa = -qi$, $q > 0$. В данном случае

$$\lambda_n = \sqrt{|\widehat{\lambda}|^2 - q^2}. \tag{3.12}$$

Из вида функций (1.5), (1.6) следует, что вместо (2.4) имеем равенство

$$\int\limits_D \frac{h(x)e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+\lambda_n x_n} H^{(1)}_{(n-2)/2}(q\sqrt{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)})}{(|\widehat{x}|^2+(z_n-x_n)^2)^{(n-2)/4}}\,dx = 0 \tag{3.13}$$

для любого $z_n \in \mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Применяя к равенству (3.13) преобразование Фурье по z_n с учётом значения (3.12), представления $H^{(1)}_\nu(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ и формул [21, с. 210, 214], получаем

$$\int\limits_D h(\widehat{x}, x_n) e^{-i(\widehat{\lambda},\widehat{x})+(\sqrt{|\widehat{\lambda}|^2-q^2}-i\mu)x_n} |\widehat{x}|^{-(n-3)/2} H^{(1)}_{(n-3)/2}(|\widehat{x}|\sqrt{q^2-\mu^2})\,d\widehat{x}\,dx_n = 0$$

для любого $\mu \in \mathbb{R}$ и всех $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Дальнейшие рассуждения точно такие же, как и в случае $\kappa > 0$. Теорема доказана.

4. Приложение теоремы. Прокомментируем утверждение теоремы 1.1 в применении к поставленной выше обратной задаче для уравнения (1.1). Обозначим $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Без ограничения общности можем считать, что $\Pi \bigcap \overline{D} = \varnothing$ и $\mathcal{L} \bigcap \overline{D} = \varnothing$. Выберем в качестве X и Y открытую область в Π и открытый интервал в $\mathcal{L}$ соответственно такие, что $\overline{X} \bigcap \overline{Y} = \varnothing$. Рассмотрим соответствующее (1.8) однородное уравнение

$$\int\limits_D G(x,x';\lambda)G(y,x';\lambda)\xi(x')\,dx' = 0, \quad (x,y) \in X \times Y. \tag{4.1}$$

Поскольку функция в левой части уравнения (4.1) аналитична по $x \in \Pi$, $y \in \mathcal{L}$, равенство (4.1) выполняется также для всех $(x,y) \in \Pi \times \mathcal{L}$. Заметим, что семейство $\{G(x,\cdot\,;\kappa)\}_{x\in\Pi}$ полно в пространстве $\{u \in C^2(\overline{D}) : \Delta u - \kappa^2 u = 0 \text{ в } D\}$ [12, с. 41]. Поэтому из (4.1) следует равенство (1.9) для семейств $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}^*_j$, $j = 1,2$, указанных в формулировке теоремы 1.1. Применение теоремы 1.1 даёт равенство $\xi = 0$ п.в. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть X и Y – открытая область в Π и открытый интервал в $\mathcal{L}$ соответственно, $\overline{X} \bigcap \overline{Y} = \varnothing$. Тогда уравнение (1.8) имеет не более одного решения.*

Пусть для определённости $D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$. Обозначим

$$D_R^+ = \{x \in O_R(0) : x_n \geqslant 0\}, \quad S_R^+ = \{x \in \partial O_R(0) : x_n \geqslant 0\}.$$

Функция $v(x)$, определённая левой частью равенства (4.1), при любом $y \in \mathcal{L}$ удовлетворяет в D_R^+ уравнению $\Delta v - \lambda^2 v = 0$. Используя принцип максимума [22, с. 40], получаем

$$\max_{x\in D_R^+} |v(x)| = \mu_R \triangleq \max_{x\in S_R^+} |v(x)|.$$

Из (1.5) следует, что $\lim\limits_{R\to\infty} \mu_R = 0$. Поэтому $v(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}^n$ с $x_n \geqslant 0$. В силу аналитичности v справедливо равенство $v(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash D$. Поэтому утверждение теоремы 4.1 имеет место и в том случае, когда гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, не имеющая общих точек с $\overline{D}$, произвольным образом ориентирована относительно прямой $\mathcal{L}$. Тем самым доказана следующая

Теорема 4.2. *Пусть Π_0 и $\mathcal{L}_0$ – произвольные гиперплоскость и прямая в $\mathbb{R}^n$ соответственно такие, что $\mathcal{L}_0$ не лежит в Π_0 и выполняются соотношения $\Pi_0 \bigcap \overline{D} = \varnothing$ и $\mathcal{L}_0 \bigcap \overline{D} = \varnothing$, а X и Y – открытая область в Π_0 и открытый интервал в $\mathcal{L}_0$ соответственно, $\overline{X} \bigcap \overline{Y} = \varnothing$. Тогда обратные задачи $\{\Pi_0, \mathcal{L}_0\}$, $\{\mathcal{L}_0, \Pi_0\}$ имеют единственное решение.*

Замечание. В условиях теоремы 4.2 размерность пространственного носителя данных $X \times Y = \Pi_0 \times \mathcal{L}_0$ равна n и совпадает с размерностью носителя искомой функции ξ. Таким образом, пространственную переопределённость исходной обратной задачи удаётся снять.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calderon A.-P.* On an inverse boundary value problem // Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics. Sociedade Brasileira de Matematica. Rio de Janeiro, 1980. P. 65–73.
2. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
3. *Kenig C., Salo M.* Recent progress in the Calderon problem with partial data // Contemporary Mathematics. V. 615. Inverse problems and applications. Providence, 2014. P. 193–222.
4. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.
5. *Лаврентьев М.М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
6. *Бакушинский А.Б, Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трёхмерного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 8. С. 1201–1209.
7. *Вайнберг М.М.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982.
8. *Романов В.Г.* О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 883–889.
9. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate Approximations. Providence, 2007.
10. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
11. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
12. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М., 1994.
13. *Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.* Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 115–126.
14. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.
17. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
18. *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М., 1972.
19. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
20. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and Polynomial Inequalities. New York, 1995.
21. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961.
22. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.

Марийский государственный университет,
г. Йошкар-Ола

Поступила в редакцию 05.07.2020 г.
После доработки 18.11.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.