ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 265–285

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929+517.977

О ТОЧНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© 2021 г. А. В. Метельский, В. Е. Хартовский

Для линейных систем нейтрального типа строится финитный наблюдатель в виде выхода системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями и конечным спектром, позволяющий за конечное время получить точную оценку решения исходной системы. Результаты иллюстрируются примером.

DOI: 10.31857/S0374064121020138

Введение. Различные постановки задач, связанные с вопросами оценки и/или наблюдения решения линейных автономных систем запаздывающего типа, неоднократно встречались в литературе [1–9]. Наиболее распространённый метод исследования таких задач основывается [1–6] на связи задачи проектирования асимптотических наблюдателей для системы наблюдения и задачи управления спектром двойственной системы управления, а также на различных вариациях этой идеи [7]. В частности, возможность обеспечить системе управления конечный асимптотически устойчивый спектр [6] позволяет обеспечить аналогичный спектр системе, определяющей динамику ошибки оценивания. К недостаткам такого подхода следует отнести возможность только асимптотически точного восстановления решения системы наблюдения.

В работах [8, 9] для систем с запаздыванием предложен новый тип наблюдателя – финитный наблюдатель – который позволяет за конечное время получить точное решение системы наблюдения. Здесь в качестве основной выступает задача выбора параметров наблюдателя таким образом, чтобы система, определяющая динамику ошибки оценивания, была точечно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам ошибки (размерность наблюдателя больше размерности исходной системы).

Системы нейтрального типа обладают более сложной динамикой по сравнению с системами запаздывающего типа, что отражается и на свойствах наблюдаемости их текущего состояния [10, 11], а поэтому вопросы проектирования наблюдателей для систем нейтрального типа изучены несколько слабее. Для таких систем в работах [12, 13] предложены методы синтеза асимптотических наблюдателей при наличии свойств модальной управляемости в различных классах регуляторов для двойственной системы управления или при наличии свойства асимптотической наблюдаемости у исходной системы, а в [14] разработан метод синтеза финитного наблюдателя. Однако полученный в [14] финитный наблюдатель содержит распределённое запаздывание, в то время как исходная система является системой с сосредоточенными запаздываниями. Кроме того, наличие интегральных слагаемых, соответствующих распределённым запаздываниям, порождает ряд трудностей при практической реализации таких объектов [15, 16].

В настоящей работе предлагается новый тип финитного наблюдателя для систем нейтрального типа, который, в отличии от [14], не содержит распределённого запаздывания и определяется системой запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и конечным спектром.

1. Постановка задачи. Предварительные сведения. Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i\dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad t>0, \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, x – вектор решения, y – вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Решение уравнения (1) однозначно задаётся начальной функцией

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0]. \tag{3}$$

Далее считаем, что функция $\varphi \in \widetilde{\boldsymbol{C}}([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ является неизвестной, здесь и ниже через $\widetilde{\boldsymbol{C}}([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначается линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, λ_h – оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t-kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f). Введём полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$$

и запишем систему (1), (2) в операторном виде

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать запись исходной системы (1), (2) в виде (4), (5).

Задача. Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с выходом $\bar{x}$ такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (5), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, является точной оценкой неизвестного решения x уравнения (4):

$$\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{6}$$

Дифференциальную систему с выходом $\bar{x}$, реализующую оценку x уравнения (4), назовём *финитным наблюдателем* для системы (1), (2).

Пусть $x(t)$, $t > 0$, – решение уравнения (4). Под состоянием уравнения (4) в момент времени $t > 0$ будем понимать [17] функцию $x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in [-mh, 0]$.

Рассмотрим множество Y_{t_1} всех выходов (5) на отрезке $[0, t_1]$:

$$Y_{t_1} = \{y : \text{существует } \varphi \in \widetilde{\boldsymbol{C}}([-mh,0],\mathbb{R}^n), \;\; x(t) = \varphi(t), \;\; t \in [-mh, 0],$$

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \;\; t \in (0, t_1], \;\; y(t) = C(\lambda_h)x(t), \;\; t \in [0, t_1]\}.$$

Множество Y_{t_1} представляет собой линейное многообразие в пространстве непрерывных функций $\boldsymbol{C}([0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Пусть $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, – решение уравнения (4) и $y(t) = C(\lambda_h)x(t)$, $t \in [0, t_1]$, – соответствующий ему выход. Введём оператор $\mathcal{L}_{t_1} y = x_{t_1}$, $y \in Y_{t_1}$, который будем называть *оператором восстановления текущего состояния* x_{t_1}.

Обозначим через $W(p,\lambda)$ характеристическую матрицу $p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ системы (4) (при $\lambda = e^{-ph}$). Если для системы (4), (5) существует финитный наблюдатель, задаваемый линейной автономной дифференциальной системой запаздывающего типа, то существует непрерывный оператор $\mathcal{L}_{t_1} : \boldsymbol{C}([0,t_1],\mathbb{R}^n) \to \boldsymbol{C}([-mh,0],\mathbb{R}^n)$, имеющий вид интеграла Римана–Стилтьеса, такой, что $\mathcal{L}_{t_1} y = x_{t_1}$, $y \in Y_{t_1}$. Последнее [10, 11] равносильно одновременному выполнению условий

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \tag{7}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Поэтому условия (7), (8) являются необходимыми для существования финитного наблюдателя.

Цель дальнейших рассуждений статьи состоит в том, чтобы показать, что выполнение условий (7), (8) достаточно для существования финитного наблюдателя. Доказательство проведём в два этапа. Вначале построим финитный наблюдатель для системы запаздывающего типа, после чего перейдём к исследованию системы нейтрального типа. Далее в работе будет предложен модифицированный финитный наблюдатель и приведён пример реализации двух типов наблюдателей.

2. Случай системы запаздывающего типа с одномерным выходом. Рассмотрим случай, когда в системе (4) матрица $D(\lambda)$ является нулевой, а выход (5) одномерным, $C(\lambda) = c(\lambda)$, $c(\lambda) = [c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)]$, где $c_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, – полиномы. Другими словами, вместо системы (4), (5) будем изучать систему

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$y(t) = c(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Заметим, что для системы (9), (10) условие (8) выполнено всегда, а условие (7) принимает вид

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - A(e^{-ph}) \\ c(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Финитный наблюдатель будем строить в следующем виде:

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}y(t), \quad t > t_0, \tag{12}$$

$$\bar{x}(t) = [I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{13}$$

где $p_{_D} = d/(dt)$ – оператор дифференцирования $((p_{_D})^k z(t) = z^{(k)}(t))$; $z = [z_1, \ldots, z_{n+3}]'$ – вектор решения уравнения (12) (штрих $(')$ обозначает операцию транспонирования), $\bar{x} = [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]'$ – выход уравнения (12), определяющий оценку решения x системы (4), e_{n+1} – $(n+1)$-й столбец единичной матрицы I_{n+3}; t_0 – момент “включения” наблюдателя. Матрица $\overline{A}(p,\lambda)$ выбирается такой, чтобы характеристическая матрица системы (12) имела вид $(\lambda = e^{-ph})$

$$pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) & -b_1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & -b_n & 0 \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p,\lambda) & -1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda f_1(p,\lambda) & p - f_2(p,\lambda) & -a_1(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda q_1(\lambda) & -q_2(\lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

а спектр системы (12) был конечным, т.е.

$$|pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda)| = d(p), \tag{15}$$

где $d(p)$ – некоторый полином. Здесь $a_{ij}(\lambda)$, $i,j = \overline{1,n}$, – элементы матрицы $A(\lambda)$, $\varphi(p,\lambda) = [\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p,\lambda)]'$ – векторный полином, $b = [b_1, \ldots, b_n, 1]'$ – столбец действительных чисел; $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p,\lambda)$ – полиномы $(i = \overline{1,2})$, причём $p - f_2(p,\lambda)$ – полином запаздывающего типа.

Замечание 1. Здесь и далее под полиномом запаздывающего типа понимаем полином $f(p,\lambda)$ вида $f(p,\lambda) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} p^i g_i(\lambda)$, где $n \in \mathbb{N}$, $g_i(\lambda)$ – произвольные полиномы. Использование термина “запаздывающий тип” обусловлено тем, что любая система запаздывающего типа вида (9) имеет характеристический квазиполином вида $f(p, e^{-ph})$.

Заметим, что компонента z_{n+1} решения системы (12) зависит от выхода y. Значит, для существования слагаемого $\lambda_h f_1(p_{_D}, \lambda_h)z_{n+1}$ в системе (12) функция $z_{n+1}(t)$ должна быть дифференцируема достаточное количество раз. Поэтому при выборе момента времени t_0 руководствуемся тем, что решение системы запаздывающего типа с течением времени сглаживается.

В частности, при увеличении времени на величину mh максимальный порядок непрерывной производной решения системы (9) увеличивается на единицу. Вследствие этого полагаем $t_0 = (\rho_0 - 1)mh$, где $\rho_0 = \max\{\deg_p f_1(p,\lambda) - \deg_p(\varphi_{n+1}(p,\lambda) - p),\ 0\}$.

Считаем, что компоненты $z_i(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$, $i = \overline{1, n+3}$ (h_0 – длина отрезка последействия системы (12)), начальной функции $z(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$, являются достаточно гладкими с кусочно-непрерывной старшей производной (порядок старшей производной для каждой компоненты определяется максимальной степенью переменной p соответствующих полиномов в матрице (14)). В частности, можно положить $z(t) \equiv 0$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$.

Сравнивая элементы матриц в уравнениях (9), (10) с элементами первых $n+1$ строк матрицы (14), видим, что погрешность $\zeta_i(t) = \bar{x}_i(t) - x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, оценки решения уравнения (9) наблюдателем (12), (13) являются первыми n компонентами решения однородной ($y = 0$) системы (12), т.е. системы

$$\dot{\zeta}(t) = \overline{A}(p_D, \lambda_h)\zeta(t), \quad t > t_0, \tag{16}$$

где $\zeta = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}]'$.

Пусть $W_\varphi(p,\lambda)$ – блок матрицы (14), состоящий из её первых $n+1$ строк и $n+1$ столбцов:

$$W_\varphi(p,\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} pI_n - A(\lambda) & \begin{array}{c} -\varphi_1(\lambda) \\ \ldots \\ -\varphi_n(\lambda) \end{array} \\ \hline -c(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(\lambda) \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n-1}(\lambda) & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -a_{n-11}(\lambda) & \ldots & p - a_{n-1n-1}(\lambda) & -a_{n-1n}(\lambda) & -\varphi_{n-1}(\lambda) \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & -a_{nn-1}(\lambda) & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_{n-1}(\lambda) & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\widetilde{M}(p,\lambda) = [\widetilde{M}_1(p,\lambda), \ldots, \widetilde{M}_{n+1}(p,\lambda)]'$ алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последнего столбца матрицы $W_\varphi(p,\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (11). Тогда существуют полиномы* $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, $\varphi_{n+1}(p,\lambda)$ *и приведённый полином* $d_0(p)$ *степени* $\mu = \deg d_0(p) \geqslant n+1$ *такие, что*

$$|W_\varphi(p,\lambda)| = [-\varphi_1(\lambda), \ldots, -\varphi_n(\lambda), p - \varphi_{n+1}(p,\lambda)]\widetilde{M}(p,\lambda) = d_0(p), \tag{17}$$

и полином $p - \varphi_{n+1}(p,\lambda)$ *имеет запаздывающий тип.*

В статье [9] описан способ построения полиномов из леммы 1, для реализации которого достаточно выполнения условия (11). Поэтому доказательство леммы 1 не приводится.

Далее считаем, что полиномы, указанные в лемме 1, построены. Введём ряд обозначений. Предположим, что полином $d_0(p)$ из равенства (17) имеет $\tilde{\mu}$ различных корней p_i, кратности которых обозначим через $\tilde{l}_i$, т.е.

$$d_0(p) = \prod_{i=1}^{\tilde{\mu}} (p - p_i)^{\tilde{l}_i}.$$

Определим множество P_0, состоящее из корней полинома $d_0(p)$: $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1,\tilde{\mu}}\}$.

Используя матрицу $W_\varphi(p,\lambda)$, построим матрицу $W_c(p,\lambda)$ следующим образом:

$$W_c(p,\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} W_\varphi(p,\lambda) & \begin{array}{c} -b_1 \\ \ldots \\ -b_n \\ -1 \end{array} \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & p \end{array}\right] = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n}(\lambda) & -\varphi_1(\lambda) & -b_1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & p - a_{nn}(\lambda) & -\varphi_n(\lambda) & -b_n \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_n(\lambda) & p - \varphi_{n+1}(p,\lambda) & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Также определим матрицу $W_b(p,\lambda)$, которая получается из матрицы $W_c(p,\lambda)$ удалением в ней столбца с номером $(n+1)$ и последней строки, $w_b(p,\lambda)=|W_b(p,\lambda)|$. Рассмотрим алгебраические дополнения

$$\widehat{M}(p,\lambda)=[M_{n+1}(p,\lambda),M_{n+2}(p)]',\quad M_{n+1}(p,\lambda)=-w_b(p,\lambda),\quad M_{n+2}(p)=d_0(p)$$

к двум последним элементам последней строки матрицы $W_c(p,\lambda)$. Обозначим

$$q'(\lambda)=[\lambda q_1(\lambda),q_2(\lambda)],\quad f'(p,\lambda)=[\lambda f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda)],$$

$$k(p,\lambda)=(a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)+d(p))/(a_2(\lambda)-p),\quad K(p,\lambda)=k(p,\lambda)+pM_{n+2}(p),\tag{18}$$

где $d(p)$ – полином, определённый в (15).

Пусть выполнено условие (11). Приведём процедуру (шаги 1)–5)) построения финитного наблюдателя (12), (13) (реализация и обоснование процедуры приводятся ниже).

1) Выбираем полином $d(p)$ таким, чтобы выполнялось условие: если функция $k(p,\lambda)$ является полиномом, то система (16) имеет запаздывающий тип.

2) Выбираем столбец действительных чисел $b=[b_1,\ldots,b_n,1]'$ так, чтобы система уравнений

$$\lambda w_b(p,\lambda)=0,\quad d_0(p)=0\tag{19}$$

имела конечное множество решений $(p,\lambda)\in\mathbb{C}^2$.

3) Выбираем полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ такими, чтобы функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ были целыми, а полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda),\lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно простыми.

4) Выбираем векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p,\lambda)$ являлась полиномом.

5) Выбираем полиномы $f_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, такими, чтобы выполнялось равенство

$$f'(p,\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)=K(p,\lambda).\tag{20}$$

Опишем реализацию приведённой процедуры.

1) Выбор полинома $d(p)$. Пусть $\mu_d=\deg d(p)$.

Лемма 2. *Пусть $\mu_d\geqslant\mu+3$ и функция $k(p,\lambda)$ является полиномом. Тогда полином $p-f_2(p,\lambda)$ в матрице (14) имеет запаздывающий тип.*

Доказательство. Если $k(p,\lambda)$ – полином, то $K(p,\lambda)$ также является полиномом. Поскольку $\deg_p(pM_{n+2}(p))=\mu+1$, то $\deg_p K(p,\lambda)=\mu_d-1$, а старший член полинома $K(p,\lambda)$ (относительно переменной p) имеет вид $(-p^{\mu_d-1})$, $\mu_d-1\geqslant\mu+2$. Согласно (20) получаем $K(p,\lambda)=\lambda f_1(p,\lambda)M_{n+1}(p,\lambda)+f_2(p,\lambda)M_{n+2}(p)$. Так как у старшего члена $(-p^{\mu_d-1})$ полинома $K(p,\lambda)$ нет множителя λ, то он является также старшим членом полинома (относительно переменной p) $f_2(p,\lambda)M_{n+2}(p)$. Значит, старший член полинома (относительно переменной p) $f_2(p,\lambda)$ имеет вид $(-p^{\mu_d-\mu-1})$. Соответственно компонента z_{n+2} в системе (16) определяется уравнением запаздывающего типа. Лемма доказана.

Равенство (15) справедливо при любом $\lambda\in\mathbb{C}$. Из представления (14) при $\lambda=0$ следует, что корни полинома $d_0(p)$ принадлежат спектру системы (16). Поэтому полином $d(p)$ берём в виде $d(p)=d_2(p)d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами, старший член которого равен $p^{\mu_d-\mu}$. Поскольку полиномы $p-\varphi_{n+1}(p,\lambda)$ и $p-f_2(p,\lambda)$ в силу лемм 1, 2 имеют запаздывающий тип, то и система (16) имеет запаздывающий тип.

2) Выбор столбца действительных чисел $b=[b_1,\ldots,b_n,1]'$.

Лемма 3. *Существуют действительные числа b_1, ..., b_n такие, что*

$$w_b(p,e^{-ph})\neq 0,\quad p\in P_0.\tag{21}$$

Доказательство. Запишем соотношение (21) в виде

$$\widetilde{M}_1(p_i,e^{-p_ih})b_1+\ldots+\widetilde{M}_n(p_i,e^{-p_ih})b_n+\widetilde{M}_{n+1}(p_i,e^{-p_ih})\neq 0,\quad p_i\in P_0,\quad i=\overline{1,\tilde{\mu}}.\tag{22}$$

Пусть

$$\bar{M}(p) = [\widetilde{M}_1(p, e^{-ph}), \ldots, \widetilde{M}_{n+1}(p, e^{-ph})], \quad \operatorname{Re}\bar{M}(p) = [\operatorname{Re}\widetilde{M}_1(p, e^{-ph}), \ldots, \operatorname{Re}\widetilde{M}_{n+1}(p, e^{-ph})].$$

Аналогично определяется $\operatorname{Im}\bar{M}(p)$. В силу условия (11) вектор $\bar{M}(p)$ не равен нулю при любом $p \in \mathbb{C}$. Поэтому либо $\operatorname{Re}\bar{M}(p_i) \neq 0$, либо $\operatorname{Im}\bar{M}(p_i) \neq 0$, $i = \overline{1, \tilde{\mu}}$. Для каждого $i = \overline{1, \tilde{\mu}}$ положим $[\widetilde{M}_{i1}, \ldots, \widetilde{M}_{in}, \widetilde{M}_{in+1}] = \operatorname{Re}\bar{M}(p_i)$, если этот вектор ненулевой, или $[\widetilde{M}_{i1}, \ldots, \widetilde{M}_{in}, \widetilde{M}_{in+1}] = \operatorname{Im}\bar{M}(p_i)$ в противном случае.

Рассмотрим объединение гиперплоскостей

$$\widetilde{M} = \bigcup_{i=0}^{\tilde{\mu}} \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_n)' \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \widetilde{M}_{ij}\xi_j + \widetilde{M}_{in+1} = 0 \right\}.$$

Очевидно, что множество $\widetilde{M}$ не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ (те равенства в (22), для которых $\widetilde{M}_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n}$, $\widetilde{M}_{in+1} \neq 0$ не рассматриваем, поскольку на выбор чисел b_i они не влияют). Поэтому в $\mathbb{R}^n$ существует точка $(b_1, \ldots, b_n)'$, не принадлежащая множеству $\widetilde{M}$. Очевидно, что для этой точки выполняется соотношение (22). Лемма доказана.

Выберем действительные числа $b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющие соотношению (21). Это можно сделать следующим образом. Вначале найдём числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, \tilde{\mu}}$, при которых совместна система линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{M}_{i1}b_1 + \ldots + \widetilde{M}_{in}b_n = -\alpha_i - \widetilde{M}_{in+1}, \quad p_i \in P_0, \quad i = \overline{1, \tilde{\mu}}, \tag{23}$$

относительно неизвестных $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Существование таких чисел гарантирует лемма 3, а выбрать их можно из условия разрешимости алгебраических систем: вектор

$$[\widetilde{M}_{1n+1} + \alpha_1, \ldots, \widetilde{M}_{\tilde{\mu}n+1} + \alpha_{\tilde{\mu}}]$$

должен быть ортогонален всем векторам фундаментальной системы решений однородной системы, сопряжённой к системе (23). Затем в качестве набора чисел $b_1, \ldots, b_n$ можно взять любое решение системы уравнений (23).

Несложно показать (методом от противного), что в силу (21) система алгебраических уравнений (19) может иметь не более чем конечное множество решений.

3) Выбор полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$.

Пусть

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{k_i},$$

$P^* = \{p_i \in \mathbb{C} : i = \overline{1, s_1}\}$ – множество различных действительных или комплексно сопряжённых корней полинома $d(p)$; корень p_i имеет алгебраическую кратность k_i. Полином $a_1(\lambda)$ берём в виде

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad \lambda_i \in \Lambda^* = \{\lambda_i = e^{-p_i h} : p_i \in P^*, \ \ i = \overline{1, s_1}\}. \tag{24}$$

Для того чтобы функция $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in P^*$ значения функции $a_2(e^{-ph}) - p$ и её производных по переменной p обращались в нуль, т.е.

$$(a_2(e^{-ph}) - p)^{(k)}|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, k_i - 1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \Lambda^*$ $(p_i \in P^*)$ должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k(k-1)!}{h\lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, k_i - 1}, \quad \text{если} \quad k_i > 1, \quad i = \overline{1, s_1}. \tag{25}$$

Замечание 2. Поясним возможную трудность при реализации равенства (25). Если набор корней полинома $d(p)$ содержит комплексно сопряжённые корни, то возможна ситуация, когда $p_{k_1} \neq p_{k_2}$, но $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$, и первое равенство в (25) выполнить нельзя, так как в этом случае $a_2(\lambda_{k_1}) = a_2(\lambda_{k_2})$. Для преодоления этой трудности введём в наблюдателе запаздывание $h_1 = h/k$, где $k \in \mathbb{N}$ – некоторое число. Тогда матрицей системы (9) будет $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^k + \ldots + A_m\lambda^{km}$ и $\lambda^i x_k(t) = x_k(t - ih_1)$. Натуральное k можно выбрать так, чтобы разным значениям $p_i \in P^*$ соответствовали различные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Это требование учитываем и при выборе полинома $d_2(p)$ в п. 1) описываемой процедуры.

Пусть $\Lambda_0 = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, \mu_2}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $p^* \in P_0$ выполняется равенство $\lambda_k w_b(p^*, \lambda_k) = 0$. В силу п. 2) множество Λ_0 конечно.

Согласно п. 3) процедуры построения наблюдателя полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ должны быть взаимно простыми. Если эти полиномы имеют общие корни λ_i^0, то вследствие равенств (25) имеем $\lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. В таком случае к (25) добавим равенства

$$a_2(\lambda_i^0) = p^0, \quad \lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*, \tag{26}$$

где $p^0 \in \mathbb{R}$, $p^0 \notin P_0$, причём значение p^0 возьмём одним и тем же для всех $\lambda_i^0 \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (25), (26), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [18, с. 104].

Лемма 4. *Пусть полином $a_2(\lambda)$ удовлетворяет условиям (25), (26). Тогда полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты.*

Доказательство. Предположим противное: существует $\lambda_* \in \mathbb{C}$, при котором выполняются равенства $\lambda_* w_b(a_2(\lambda_*), \lambda_*) = 0$, $d_0(a_2(\lambda_*)) = 0$. Тогда $a_2(\lambda_*) = p_* \in P_0$, $\lambda_* \in \Lambda_0$. Если предположить, что $\lambda_* \in \Lambda^*$, то $\lambda_* = e^{-p_* h}$ в силу (25), откуда получаем противоречие с соотношением (21). Значит, $\lambda_* \notin \Lambda^*$. Поэтому $\lambda_* \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Но в силу (26) величины $\lambda_i w_b(a_2(\lambda_i), \lambda_i)$ и $d_0(a_2(\lambda_i))$ одновременно не равны нулю для всех $\lambda_i \in \Lambda_0 \backslash \Lambda^*$. Получили противоречие. Лемма доказана.

4) Вычисление векторного полинома $q'(\lambda)$.

Покажем, как выбрать векторный полином $q'(\lambda) = [\lambda q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$ таким, чтобы функция $k(p, \lambda)$ была полиномом. В силу теоремы Безу векторный полином $q'(\lambda)$ должен обеспечивать тождество

$$a_1(\lambda) q'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (24), (25) все корни полинома $a_1(\lambda)$ являются корнями полинома $d(a_2(\lambda))$ не меньшей кратности, поэтому $d(a_2(\lambda))$ делится без остатка на $a_1(\lambda)$. Значит, полином $q'(\lambda)$ можно искать как решение полиномиального уравнения

$$q'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно лемме 4 полиномы $\lambda w_b(a_2(\lambda), \lambda)$ и $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты. Поэтому, следуя алгоритму Евклида, найдём полиномы $v_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\lambda v_1(\lambda) w_b(a_2(\lambda), \lambda) + v_2(\lambda) d_0(a_2(\lambda)) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Возьмём $\tilde{q}'(\lambda) = [\lambda v_1(\lambda), v_2(\lambda)]$, тогда $\tilde{q}'(\lambda) \widehat{M}(a_2(\lambda), \lambda) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$q'(\lambda) = -\tilde{q}'(\lambda) d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda). \tag{27}$$

Согласно теореме Безу функция $k(p, \lambda)$ является полиномом. Действительно, обозначим $k_1(p, \lambda) = a_1(\lambda) q'(\lambda) \widehat{M}(p, \lambda) + d(p)$ (см. определение $k(p, \lambda)$ в (18)). Так как $k_1(a_2(\lambda), \lambda) = 0$, то $p = a_2(\lambda)$ – корень полинома $k_1(p, \lambda)$ при любом λ. Значит, в разложении $k_1(p, \lambda)$ на множители присутствует множитель $p - a_2(\lambda)$. Поэтому $k(p, \lambda)$ – полином.

5) Нахождение векторного полинома $f'(p,\lambda)$.

Полином $k(p,\lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p,\lambda) = \frac{(d(p) - d(p)\tilde{q}'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)) + (d(p)\tilde{q}'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda) + a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda))}{a_2(\lambda) - p}.$$

Заменяя в числителе этой дроби слагаемое $d(p)$ в первой скобке на $d(p) = d_2(p)d_0(p) = [0; d_2(p)]\widehat{M}(p,\lambda)$ и во второй скобке $q'(\lambda)$ согласно (27), получаем

$$k(p,\lambda) = \left(\frac{1 - \tilde{q}'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}[0, d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}'(\lambda)\right)\widehat{M}(p,\lambda). \tag{28}$$

Здесь в силу теоремы Безу $(1 - \tilde{q}'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda))/(a_2(\lambda) - p)$ и $(d(p) - d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda) - p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p,\lambda) = \frac{1 - \tilde{q}'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}[0; d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}'(\lambda) + [0, p], \tag{29}$$

имеем вследствие (28) равенство (20). Из вида вектора $\tilde{q}(\lambda)$ вытекает равенство $f'(p,\lambda) = [\lambda f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda)]$. Итак, шаги 1)–5) процедуры построения наблюдателя (12), (13) реализованы.

Обоснуем предложенную процедуру построения финитного наблюдателя (12), (13), доказав тождество (6). Для этого понадобится следующее утверждение (см. лемму 2.1 в [19]).

Лемма 5. *Пусть $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – целая функция экспоненциального типа, т.е. $|F(\lambda)| \leqslant l_1 e^{l_2|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, для некоторых положительных чисел l_1, l_2. Тогда для того чтобы существовали неотрицательные постоянные $\underline{t}$, $\overline{t}$ и интегрируемая в квадрате функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что $f(t) \equiv 0$, $t \notin [-\underline{t}, \overline{t}]$, и*

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\underline{t}}^{\overline{t}} e^{-\lambda t} f(t)\,dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\lambda)$ была интегрируема в квадрате на мнимой оси. При выполнении условия леммы наименьшие возможные числа $\underline{t}$, $\overline{t}$ определяются по формулам

$$\underline{t} = \limsup_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in\mathbb{R}}} (1/\lambda)\ln|F(\lambda)|, \quad \overline{t} = \limsup_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in\mathbb{R}}} (1/\lambda)\ln|F(-\lambda)|.$$

Теорема 1. *Существует момент времени $t_1 > 0$ такой, что, каково бы ни было начальное состояние системы (16), выполняются тождества*

$$\zeta_i(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{30}$$

Доказательство. Покажем, что система (16) имеет характеристический полином $d(p)$. Разлагая определитель характеристической матрицы (14) по последнему столбцу и учитывая равенства (18) и (20), получаем

$$|pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda)| = (p - a_2(\lambda))((p - f_2(p,\lambda))M_{n+2}(p) - \lambda f_1(p,\lambda)M_{n+1}(p,\lambda))$$
$$-a_1(\lambda)(\lambda q_1(\lambda)M_{n+1}(p,\lambda) + q_2(\lambda)M_{n+2}(p)) =$$
$$= (p - a_2(\lambda))(pM_{n+2}(p) - f'(p,\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda) =$$
$$= (p - a_2(\lambda))(a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda) + d(p))/(p - a_2(\lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)\widehat{M}(p,\lambda) = d(p).$$

Пусть $\bar{a}_{ij}(p,\lambda)$ – элементы матрицы (14), т.е. $pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda) = [\bar{a}_{ij}(p,\lambda)]_{i,j=1}^{n+3}$. Положим $m_1 = \max\{\deg_\lambda \bar{a}_{ij}(p,\lambda) : i,j = \overline{1,n+1}\}$, $\bar{t}_0 = t_0 + \rho_1 h$, где $\rho_1 = m_1 \deg_p f_1(p,\lambda) + \deg_\lambda f_1(p,\lambda) + 1$. В силу того, что первые $n+1$ компонент системы (16) определяются системой запаздывающего типа, при $t > \bar{t}_0$ старшие производные всех компонент системы (16) либо непрерывны, либо кусочно-непрерывны, а производные более низких порядков непрерывны. Поэтому к системе (16) при $t > \bar{t}_0$ применимо преобразование Лапласа. Согласно лемме 5 для выполнения тождеств (30) достаточно (см. теорему 2.2 в [19]), чтобы элементы первых n строк матрицы $(pI_{n+3} - \overline{A}(p, e^{-ph}))^{-1}$ являлись целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси. Выражая элементы обратной матрицы через элементы присоединённой матрицы, заключаем, что для этого достаточно, чтобы целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси, были $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$, где $r_{ij}(p,\lambda) = m_{ij}(p,\lambda)/d(p)$, а $m_{ij}(p,\lambda)$ – минор элемента $\bar{a}_{ij}(p,\lambda)$ характеристической матрицы (14). Разлагая указанные миноры по последнему столбцу матрицы (14), в силу шага 3) процедуры построения наблюдателя убеждаемся, что $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$, – целые функции экспоненциального типа. Кроме того, очевидны неравенства $\deg_p r_{ij}(p,\lambda) < \deg d(p)$, поэтому $r_{ij}(p, e^{-ph}) = O(|p|^{-1})$ при $|p| \to \infty$ на мнимой оси. Отсюда следует [19] интегрируемость в квадрате на мнимой оси функций $r_{ij}(p, e^{-ph})$, $i = \overline{1,n+3}$, $j = \overline{1,n}$.

Из леммы 5 вытекает, что момент времени t_1 будет определяться равенством $t_1 = \bar{t}_0 + \delta h$, где $\delta = \max\{\delta_i : i = \overline{1,n}\}$, а δ_i – максимальная степень переменной λ в i-й строке матрицы $(pI_{n+3} - \overline{A}(p,\lambda))^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание 3. Систему (12) с помощью введения дополнительных переменных всегда можно записать в нормальной форме. Поскольку $(p - \varphi_{n+1}(p,\lambda))$ и $(p - f_2(p,\lambda))$ – полиномы запаздывающего типа, то система (12) в нормальной форме будет неоднородной линейной автономной дифференциально-разностной системой запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями, причём неоднородная часть будет непрерывной функцией. Такая система при указанных начальных условиях имеет единственное решение [17, с. 51]. Также отметим, что тождество (30) показывает, что система (12) является точечно вырожденной [19]. Таким свойством может обладать только система с запаздыванием, поэтому характеристическая матрица (14) всегда будет зависеть от переменной λ.

Рассмотрим теперь неоднородную систему запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + U(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

$$y(t) = c(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0, \tag{32}$$

где $U(t)$, $t > 0$, – некоторая известная кусочно-непрерывная функция. При дальнейшем проектировании финитного наблюдателя для системы нейтрального типа (4), (5) понадобится финитный наблюдатель для системы (31), (32), который можно записать в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}y(t) + \overline{U}(t), \quad t > t_0, \tag{33}$$

$$\bar{x}(t) = [I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{34}$$

где $\overline{U} = \mathrm{col}\,[U,0,0,0]$, матрицы $\overline{A}(p,\lambda)$, $[I_n, 0_{n\times 3}]$ и число t_0 те же, что и в формулах (12), (13). Пусть $\xi_i = \bar{x}_i - x_i$, $i = \overline{1,n}$, – погрешность наблюдателя (33), (34).

Следствие. *Существует момент времени $t_1 > 0$ такой, что имеют место тождества*

$$\xi_i(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{35}$$

Доказательство. Сделаем в системе (33) замену переменных $z_i = \xi_i - x_i$, $i = \overline{1,n}$, и введём вектор $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}]'$. Учитывая, что функция x удовлетворяет системе (31), получаем систему

$$\dot{\xi}(t) = \overline{A}(p_{_D}, \lambda_h)\xi(t)$$

с такой же матрицей $\overline{A}(p,\lambda)$, что и в системе (16). В доказательстве теоремы 1 показано, что найдётся момент времени $t_1 > 0$ такой, что, каково бы ни было начальное состояние системы с матрицей $\overline{A}(p,\lambda)$, её первые n компонент при $t \geqslant t_1$ тождественно равны нулю, т.е. имеет место тождество (35). Следствие доказано.

3. Финитный наблюдатель для системы нейтрального типа. Напомним [20, с. 230], что для любой полиномиальной матрицы $R(\lambda)$ существует пара унимодулярных матриц (т.е. невырожденных матриц с определителем, не зависящим от λ) $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, приводящих матрицу $R(\lambda)$ к нормальной форме Смита $\widetilde{R}(\lambda)$, т.е. $\widetilde{R}(\lambda) = P_1(\lambda)R(\lambda)P_2(\lambda)$ (см. также [18, с. 139] – канонический вид λ-матриц). Матрица $\widetilde{R}(\lambda)$ характеризуется тем, что левый верхний квадратный блок этой матрицы, размер которого совпадает с рангом матрицы $R(\lambda)$, имеет вид $\operatorname{diag}[r_1(\lambda),\ldots,r_k(\lambda)]$, а все остальные элементы матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$ являются нулями. Многочлены $r_i(\lambda)$, $i=\overline{1,k}$, называются инвариантными многочленами матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$ и определяются равенством $r_i(\lambda) = d_i(\lambda)/d_{i-1}(\lambda)$, где $d_i(\lambda)$ – наибольший общий делитель всех миноров порядка i матрицы $\widetilde{R}(\lambda)$.

Перейдём к вопросу о проектировании финитного наблюдателя для систем нейтрального типа. Считаем, что параметры системы (4), (5) удовлетворяют условиям (7), (8). В силу условия (8) наибольший общий делитель всех миноров порядка n матрицы

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} \tag{36}$$

равен единице. Поэтому нормальная форма Смита матрицы (36) имеет вид $\operatorname{col}[I_n, 0_{l\times n}]$, здесь и ниже через $0_{i\times j}$ обозначается нулевая матрица размера $i\times j$. Обозначим $\mathbb{R}^{n\times m}[\lambda]$ множество $n\times m$-матриц, элементы которых являются полиномами переменной λ. Пусть унимодулярные матрицы $N(\lambda)\in\mathbb{R}^{(n+l)\times(n+l)}[\lambda]$ и $N_1(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$ обеспечивают преобразование

$$N(\lambda)\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} N_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{l\times n} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Умножим матрицу

$$\widehat{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p(I_n - D(\lambda))N_1(\lambda) - A(\lambda)N_1(\lambda) & 0_{n\times l} \\ pC(\lambda)N_1(\lambda) & -pI_l \end{bmatrix}$$

слева на матрицу

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} N_{11}(\lambda) & N_{12}(\lambda) \\ N_{21}(\lambda) & N_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блоки $N_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $N_{12}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$, $N_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $N_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$. Полученную в результате матрицу

$$\widehat{W}_1(p,\lambda) = N(\lambda)\widehat{W}(p,\lambda) \tag{38}$$

запишем в силу (37) в виде

$$\widehat{W}_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(\lambda) & -pN_{12}(\lambda) \\ \widehat{C}_1(\lambda) & -pN_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\widehat{A}(\lambda) = N_{11}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda)$, $\widehat{C}_1(\lambda) = -N_{21}(\lambda)A(\lambda)N_1(\lambda)$.

В системе (4), (5) перейдём к новой переменной

$$\hat{x}(t) = N_1^{-1}(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant (-m + \deg_\lambda N_1^{-1}(\lambda))h. \tag{39}$$

Тогда

$$x(t) = N_1(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t \geqslant (-m+\gamma)h, \tag{40}$$

где $\gamma = \deg_\lambda N_1^{-1}(\lambda) + \deg_\lambda N_1(\lambda)$. Продифференцируем равенство (5) и присоединим к полученному равенству систему (4), перейдя в них к переменной $\hat{x}$. Тогда получим систему, которой удовлетворяют переменные $\hat{x}$, y (записанную в операторном виде)

$$\widehat{W}(p_{_D}, \lambda_h)\mathrm{col}\,[\hat{x}(t), y(t)] = 0_{(n+l)\times 1}, \quad t > \gamma h. \tag{41}$$

Если $p = 0$ является спектральным значением системы (4), то для однородной системы (41) будет нарушаться условие, аналогичное условию (7) (заметим, что множества спектральных значений систем (4) и (41) совпадают между собой). В этом случае нулевому выходу $(y = 0)$ системы (41) может соответствовать [10, 11], в отличии от системы (4), (5), ненулевое текущее состояние $\hat{x}_t$. Это означает, что любое состояние $\hat{x}_t$ системы (41), найденное по известному выходу y системы (41), при преобразовании (40) не совпадёт с состоянием системы (4), (5), отвечающим этому же выходу. Для того чтобы избежать такой ситуации, к соотношениями (41) добавим равенство

$$y(t) = C(\lambda_h)N_1(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \gamma h. \tag{42}$$

Простая проверка показывает, что для системы (41), (42) выполняется условие, аналогичное условию (7).

Подействуем на обе части системы (41) слева оператором $N(\lambda_h)$. На основании формулы (38) получим

$$\widehat{W}_1(p_{_D}, \lambda_h)\mathrm{col}\,[\hat{x}(t), y(t)] = 0_{(n+l)\times 1}, \quad t > \gamma_1 h, \tag{43}$$

где $\gamma_1 = \gamma + \nu$, $\nu = \deg_\lambda N(\lambda)$. Воспользовавшись блочной структурой матрицы $\widehat{W}_1(p, \lambda)$, систему (42), (43) запишем в виде двух уравнений, одно из которых описывает динамику изменения состояния системы (42), (43), а другое – выход этой системы:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \widehat{A}(\lambda_h)\hat{x}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t), \quad t > \gamma_1 h, \tag{44}$$

$$\hat{y}(t) = \widehat{C}(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \gamma_1 h, \tag{45}$$

где

$$\widehat{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widehat{C}_1(\lambda) \\ C(\lambda)N_1(\lambda) \end{bmatrix}$$

и функция $\hat{y}$ определяется равенством

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} N_{22}(\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t > \gamma_1 h. \tag{46}$$

Лемма 6. *Если выполнено условие (7), то*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(e^{-ph}) \\ \widehat{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{47}$$

Доказательство. Предположим, что условие (47) нарушается при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$. Тогда найдётся ненулевой вектор $\widehat{g} \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$(p_0 I_n - \widehat{A}(e^{-p_0 h}))\widehat{g} = 0_{n\times 1}, \quad \widehat{C}(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{2l\times 1}.$$

Эти соотношения запишем в развёрнутом виде:

$$(p_0 I_n - N_{11}(e^{-p_0 h})A(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h}))\widehat{g} = 0_{n\times 1},$$

$$N_{21}(e^{-p_0 h})A(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{l\times 1},$$
$$C(e^{-p_0 h})N_1(e^{-p_0 h})\widehat{g} = 0_{l\times 1}. \tag{48}$$

В силу первых двух равенств (48) заключаем, что выполняется равенство

$$N(e^{-p_0h})\begin{bmatrix} p_0(I_n - D(e^{-p_0h}))N_1(e^{-p_0h}) - A(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h}) & 0_{n\times l} \\ p_0C(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h}) & -p_0I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{g} \\ 0_{l\times 1} \end{bmatrix} = 0_{(n+l)\times 1},$$

из которого в силу третьего равенства в (48) следует, что

$$(p_0(I_n - D(e^{-p_0h})) - A(e^{-p_0h}))N_1(e^{-p_0h})\widehat{g} = 0_{n\times 1}, \quad C(e^{-p_0h})N_1(e^{-p_0h})\widehat{g} = 0_{l\times 1}. \tag{49}$$

Поскольку матрица $N_1(\lambda)$ является унимодулярной, то равенства (49) противоречат условию (7). Лемма доказана.

Пусть $\hat{c}_i(\lambda)$ – это строка матрицы $\widehat{C}(\lambda)$ с номером i, т.е. $\widehat{C}(\lambda) = \operatorname{col}[\hat{c}_1(\lambda), \ldots, \hat{c}_{2l}(\lambda)]$. В силу условия (47) для любого натурального i_0, $i_0 \in \{1, \ldots, 2l\}$, найдётся [6] матрица $L_{i_0}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n\times 2l}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \widehat{A}(e^{-ph}) - L_{i_0}(e^{-ph})\widehat{C}(e^{-ph}) \\ \hat{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{50}$$

Используя матрицу $L_{i_0}(\lambda)$, обеспечивающую соотношение (50), и уравнения (44), (45), исходную систему (4), (5) заменим системой

$$\dot{\hat{x}}(t) = \widehat{A}_L(\lambda_h)\hat{x}(t) + Y(t), \quad t > \hat{t}_2, \tag{51}$$

$$\hat{y}_{i_0}(t) = \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\hat{x}(t), \quad t > \hat{t}_2, \tag{52}$$

где $\widehat{A}_L(\lambda) = \widehat{A}(\lambda) + L_{i_0}(\lambda)\widehat{C}(\lambda)$,

$$Y(t) = -L_{i_0}(\lambda_h)\hat{y}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t), \tag{53}$$

$\hat{y}_{i_0}$ – компонента вектора $\hat{y}$ с номером i_0, число $\hat{t}_2$ определяется равенством $\hat{t}_2 = \gamma_2 h$, $\gamma_2 = = \gamma_1 + \nu_0$, $\nu_0 = \deg_\lambda L_{i_0}(\lambda)$.

Обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t > \hat{t}_2$, решение однородной системы (51) $(Y \equiv 0)$, порождаемое некоторой неизвестной начальной функцией $\hat{x}(t)$, $t \leqslant \hat{t}_2$, зависящей в силу замены (39) от решения системы (4), а через $\widehat{F}(t)$ фундаментальную матрицу однородной системы (51). Тогда по формуле Коши решение системы (51) запишется в виде

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_2. \tag{54}$$

Согласно формуле (54) для восстановления решения x системы (4), (5) достаточно восстановить функцию $\hat{x}_0$, которая определяется системой

$$\begin{gathered} \dot{\hat{x}}_0(t) = \widehat{A}_L(\lambda_h)\hat{x}_0(t), \quad t > \hat{t}_2, \\ \hat{y}^0(t) = \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\hat{x}_0(t), \quad t > \hat{t}_3. \end{gathered} \tag{55}$$

Здесь $\hat{y}^0$ – наблюдаемый выход, который определяется формулой

$$\hat{y}^0(t) = \hat{y}_{i_0}(t) - \hat{c}_{i_0}(\lambda_h)\int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_3,$$

а $\hat{t}_3 = \hat{t}_2 + (m + \deg_\lambda N_{21}(\lambda) + \deg_\lambda N_1(\lambda))h$. Система (55) представляет собой линейную автономную дифференциально-разностную систему запаздывающего типа с одномерным выходом.

Поскольку выполняется условие (50), то для этой системы существует финитный наблюдатель, который можно построить следуя п. 2. Для определённости считаем, что для системы (55) построен финитный наблюдатель (12), (13), при этом систему (12) запишем в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_L(p_{_D}, \lambda_h)z(t) - e_{n+1}\hat{y}^0(t), \quad t > \hat{t}_0, \tag{56}$$

где матрица $\overline{A}_L(p,\lambda)$ имеет ту же структуру, что и матрица $\overline{A}(p,\lambda)$ системы (14), $\hat{t}_0 = \hat{t}_3 + t_0$, число t_0 определяется согласно п. 2. Для системы (56) определим выход

$$\bar{x}(t) = N_1(\lambda_h)\bigg([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau\bigg), \quad t > \hat{t}_0 + \nu_1 h, \tag{57}$$

где $\nu_1 = \deg N_1(\lambda)$.

Уравнения (56), (57) определяют финитный наблюдатель для системы (4), (5). Действительно, в силу определения финитного наблюдателя, построенного для системы (55), существует момент времени $\hat{t}_1 > 0$ такой, что

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}_0(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \hat{t}_1. \tag{58}$$

Погрешность наблюдателя (56), (57) в силу формул (40), (54) удовлетворяет равенству

$$\bar{x}(t) - x(t) = N_1(\lambda_h)\bigg([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau - \hat{x}(t)\bigg) =$$

$$= N_1(\lambda_h)([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}_0(t)), \quad t > \hat{t}_0 + \nu_1 h.$$

Поэтому из тождества (58) следует, что

$$\bar{x}(t) \equiv x(t), \quad t \geqslant t_1, \tag{59}$$

где $t_1 = \hat{t}_1 + h\nu_1$.

Рассуждения пп. 2, 3 резюмируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть для системы (4), (5) выполняются условия (7), (8). Тогда существует финитный наблюдатель (56), (57), который реализует оценку $\bar{x}$ решения уравнения (4), удовлетворяющую тождеству (59).*

Замечание 4. Предположим, что класс начальных функций (3) системы (4), (5) состоит из функций $\varphi(t)$, $t \in [-mh, 0]$, имеющих на отрезке $[-mh, 0]$ кусочно-непрерывные производные до порядка $\rho_0 + 1$ включительно (напомним, что $\rho_0 = \max\{\deg_p f_1(p,\lambda) - \deg_p(\varphi_{n+1}(p,\lambda) - p), 0\}$, см. также (14)). Тогда, наряду с наблюдателем (56), (57), можно построить наблюдатель, для которого не требуется вычислять фундаментальную матрицу $\widehat{F}(t)$.

Пусть для системы (55) построен финитный наблюдатель, определяемый системой (56). Построим финитный наблюдатель для системы (51), (52). Рассмотрим систему

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_L(p_{_D}, \lambda_h)z(t) + F_y(t), \quad t > \hat{t}_2 + t_0, \tag{60}$$

где $F_y(t) = \overline{Y}(t) - e_{n+1}\hat{y}_{i_0}(t)$, $\overline{Y}(t) = \operatorname{col}[Y(t), 0_{3\times 1}]$. В силу утверждения 1 для решения системы (60) выполняется тождество

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \hat{x}(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \hat{t}_1,$$

поэтому в силу формулы (40) справедливо равенство

$$x(t) = N_1(\lambda_h)[I_n, 0_{n\times 3}]z(t), \quad t \geqslant t_1.$$

Замечание 5. Финитный наблюдатель, задаваемый формулами (56), (57), определяется системой запаздывающего типа с конечным спектром. При этом функции $\hat{y}^0(t)$ и $\widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)$, входящие в соотношения (56), (57), зависят от производной выхода исходной системы $\dot{y}$. Известно, что операция дифференцирования является чувствительной к малым изменениям функции. Поясним, как при формировании оценки решения системы (4), (5), избежать дифференцирования функции y.

Рассмотрим функцию Y, определяемую равенством (53). Заменив в нём функцию $\hat{y}$ согласно равенству (46), получим

$$Y(t) = -L_{i_0}(\lambda_h)\begin{bmatrix} N_{22}(\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + N_{12}(\lambda_h)\dot{y}(t). \tag{61}$$

Очевидно, что найдутся полиномиальные матрицы $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$, с помощью которых функцию Y, заданную равенством (61), можно записать в виде

$$Y(t) = Q_1(\lambda_h)y(t) + Q_2(\lambda_h)\dot{y}(t).$$

Тогда, вычисляя интеграл (57) по частям, получаем

$$\int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_1(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_2(\lambda_h)\dot{y}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \widehat{F}(t-\tau)Q_1(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau + Q_2(\lambda_h)y(t) - \widehat{F}(t-\hat{t}_2)(Q_2(\lambda_h)y(\tau))\Big|_{\tau=\hat{t}_2} -$$

$$- \int\limits_{\hat{t}_2}^{t} \bigg(\frac{\partial}{\partial\tau}\widehat{F}(t-\tau)\bigg)Q_2(\lambda_h)y(\tau)\,d\tau, \quad t > \hat{t}_0.$$

При нахождении решения z системы (56) по формуле Коши также следует воспользоваться интегрированием по частям вследствие равенства (53).

4. Финитный наблюдатель, не содержащий производную выхода. Рассмотрим другой подход к синтезу финитного наблюдателя, позволяющий избежать использования в его структуре производной выхода (5). По-прежнему предполагаем, что параметры системы (4), (5) удовлетворяют условиям (7), (8).

Рассмотрим систему (4), (5). В силу условия (8) найдутся [21] матрицы $\widetilde{L}_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$ и $\widetilde{L}_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$|I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda)| \equiv 1, \tag{62}$$

где матрица $D_{\widetilde{L}}(\lambda)$ определяется равенством

$$D_{\widetilde{L}}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda\widetilde{L}_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda\widetilde{L}_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

– матрица, обратная к матрице $(I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda))$, т.е. $\Pi(\lambda) = (I_{n+r} - D_{\widetilde{L}}(\lambda))^{-1}$. Здесь выполняются включения $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$.

В силу условия (62) имеем $\Pi(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+l)\times(n+l)}[\lambda]$, т.е. матрица $\Pi(\lambda)$ является полиномиальной. Введём функцию

$$\tilde{x}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{63}$$

Пусть $\chi(t)$, $(\chi \in \mathbb{R}^r,\ t \in \mathbb{R})$ – произвольная функция. Умножая очевидное равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h \widetilde{L}_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_r - \lambda_h \widetilde{L}_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h \widetilde{L}_1(\lambda_h)\chi(t) \\ (I_r - \lambda_h \widetilde{L}_2(\lambda_h))\chi(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0,$$

слева на матрицу $\Pi(\lambda)$, приходим к соотношению

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\tilde{x}(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geqslant \gamma_2 h, \tag{64}$$

где $\gamma_2 = \max\{\tilde{\nu}_{1j},\ j = 1,2\}$, $\tilde{\nu}_{ij} = \deg_\lambda \Pi_{ij}(\lambda)$. На основании формул (63), (64) систему (4), (5) запишем в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \widetilde{A}(\lambda_h)\tilde{x}(t) - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \gamma_3 h, \tag{65}$$

$$\tilde{y}(t) = \widetilde{C}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h, \tag{66}$$

где $\widetilde{A}(\lambda) = A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$,

$$\widetilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

выходной сигнал $\tilde{y}(t)$, $t \geqslant \gamma_3 h$, является известной функцией и определяется формулой

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} I_r + C(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h) \\ (I_n - D(\lambda_h))\Pi_{12}(\lambda_h) \end{bmatrix} y(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h,$$

$\gamma_3 = m + \gamma_2$. Уравнение (65) является неоднородным линейным автономным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и известной неоднородной частью $(-A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y)$.

Лемма 7. *Если выполнено условие (7), то*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) \\ \widetilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{67}$$

Доказательство. Предположим противное: условие (7) выполнено, а равенство (67) нарушается при некотором $p = p_0 \in \mathbb{C}$. Выберем в качестве ненулевого вектора $q \in \mathbb{C}^n$ решение алгебраической системы

$$(p_0 I_n - \widetilde{A}(e^{-p_0 h}))q = 0, \quad \widetilde{C}(e^{-p_0 h})q = 0. \tag{68}$$

Положим $q_1 = \Pi_{11}(e^{-p_0 h})q$. Из второго равенства в (68) следует, что вектор q_1 отличен от нулевого. Тогда на основании (68) имеем $W(p_0, e^{-p_0 h})q_1 = 0_{n\times 1}$ и $C(e^{-p_0 h})q_1 = 0_{l\times 1}$. Но эти равенства противоречат условию (7). Лемма доказана.

Зафиксируем произвольный номер $i_0 \in \{1, \ldots, n+l\}$. В силу условия (67) найдётся [6] матрица $V_{i_0}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times(n+l)}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph})\widetilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{69}$$

где $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ – строка матрицы $\widetilde{C}(\lambda)$ с номером i_0. Положим

$$\widetilde{A}_V(\lambda) = \widetilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\widetilde{C}(\lambda), \quad \widetilde{Y}(t) = -A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t) - V_{i_0}(\lambda_h)\tilde{y}(t),$$

$\tilde{y}_{i_0}(t)$ – компонента вектора $\tilde{y}$ с номером i_0. После этого, используя уравнения (65) и (66), систему (4), (5) заменим системой

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \widetilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}(t) + \widetilde{Y}(t), \quad t > \tilde{t}_2,\\ \tilde{y}_{i_0}(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_2,\end{aligned} \tag{70}$$

где $\tilde{t}_2 = (\tilde{\nu}_0 + \gamma_3)h$, $\tilde{\nu}_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$.

Решение системы (70) запишем по формуле Коши

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau, \quad t > \tilde{t}_2, \tag{71}$$

где $\tilde{x}_0(t)$, $t > \tilde{t}_2$, – решение однородной системы (70) ($\widetilde{Y} \equiv 0$), порождаемое некоторой неизвестной начальной функцией, зависящей, согласно формуле (63), от решения системы (4), а $\widetilde{F}(t)$ – фундаментальная матрица системы (70).

В силу формул (64), (71) для восстановления решения x системы (4), (5) достаточно восстановить функцию $\tilde{x}_0$, которая определяется системой

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_0(t) &= \widetilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}_0(t), \quad t > \tilde{t}_2,\\ \tilde{y}^0(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}_0(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_3.\end{aligned} \tag{72}$$

Здесь $\tilde{y}^0$ – наблюдаемый выход, определяемый формулой

$$\tilde{y}^0(t) = \tilde{y}_{i_0}(t) - \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau, \quad t > \tilde{t}_3,$$

а $\tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + (m + \tilde{\nu}_{11})h$. Система (72) представляет собой линейную автономную дифференциально-разностную систему запаздывающего типа с одномерным выходом, для которой выполняется условие (69). Поэтому для этой системы существует финитный наблюдатель, который можно построить следуя п. 2. Для определённости считаем, что для системы (72) построен финитный наблюдатель (12), (13), а система (12) записана в виде

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_V(p_{\scriptscriptstyle D}\lambda_h)z(t) - e_{n+1}\tilde{y}^0(t), \quad t > \tilde{t}_0, \tag{73}$$

где матрица $\overline{A}_V(p,\lambda)$ имеет структуру, описываемую правой частью равенства (14), $\tilde{t}_0 = \tilde{t}_3 + t_0$, число t_0 определяется в п. 2. На основании соотношений (64) и (71) получаем следующую оценку $\bar{x}$ решения x системы (4), (5):

$$\bar{x}(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\biggl([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau\biggr) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_0 + \tilde{\nu}_{11}h. \tag{74}$$

Уравнения (73), (74) определяют финитный наблюдатель для системы (4), (5). Покажем это. В силу определения финитного наблюдателя, построенного для системы (72), существует момент времени $\tilde{t}_1 > 0$ такой, что

$$[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \tilde{x}_0(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \tilde{t}_1. \tag{75}$$

Погрешность оценки $\bar{x}$ наблюдателя (73), (74) в силу (64) и (71) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) - x(t) &= \Pi_{11}(\lambda_h)\biggl([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) + \int\limits_{\tilde{t}_2}^{t} \widetilde{F}(t-\tau)\widetilde{Y}(\tau)\,d\tau - \tilde{x}(t)\biggr) =\\ &= \Pi_{11}(\lambda_h)([I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \tilde{x}_0(t)), \quad t > \tilde{t}_0 + \tilde{\nu}_{11}h.\end{aligned}$$

Поэтому вследствие тождества (75) получаем, что

$$\bar{x}(t) \equiv x(t), \quad t \geqslant t_1, \tag{76}$$

где $t_1 = \tilde{t}_1 + \tilde{\nu}_{11}h.$

Подводя итог рассуждениям п. 2 и 4, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы (4), (5) выполняются условия (7), (8). Тогда существует финитный наблюдатель (73), (74), который реализует оценку* $\bar{x}$ *решения уравнения (4), удовлетворяющую тождеству (76).*

Замечание 6. Если предположить, что класс начальных функций (3) системы (4), (5) состоит из функций, имеющих кусочно-непрерывные производные до порядка ρ_0 включительно, то, используя рассуждения замечания 4, можно построить финитный наблюдатель, не требующий вычисления фундаментальной матрицы $\widetilde{F}(t)$. Такой наблюдатель будет определяться системой

$$\dot{z}(t) = \overline{A}_V(p_{_D}, \lambda_h)z(t) + \widetilde{F}_y(t), \quad t > \tilde{t}_2 + t_0,$$
$$x(t) \equiv \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n\times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geqslant t_1,$$

где $\widetilde{F}_y(t) = \overline{\overline{\overline{Y}}}(t) - e_{n+1}\tilde{y}_{i_0}(t),$ $\overline{\overline{\overline{Y}}}(t) = \operatorname{col}[\widetilde{Y}(t), 0_{3\times 1}].$

5. Пример. Рассмотрим систему (4), (5) с матрицами

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [1+\lambda, 0]$$

и запаздыванием $h = \ln 2.$ Простая проверка показывает, что условия (7), (8) выполнены.

а) Проиллюстрируем реализацию оценки (57). Вначале находим унимодулярные матрицы $N(\lambda)$ и $N_1(\lambda),$ обеспечивающие преобразование (37):

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad N_1(\lambda) = I_2,$$

и составляем блоки $N_{ij}(\lambda),$ $i, j = 1, 2.$ После этого вычисляем матрицы $\widehat{A}(\lambda)$ и $\widehat{C}(\lambda)$ и записываем систему (44), (45), которая в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} (1-\lambda_h)/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t),$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1-\lambda_h^2 & 1+\lambda_h \\ 1+\lambda_h & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t),$$

где

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} (1-\lambda_h)\dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Далее выбираем число $i_0 = 2$ (вторую строку матрицы $\widehat{C}(\lambda)$) и находим матрицу $L_2(\lambda),$

$$L_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которая позволяет получить систему (51), (52) $(\hat{t}_2 = h)$:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{y}(t), \quad t > \hat{t}_2,$$

$$\hat{y}_2(t) = [1+\lambda_h, 0]\hat{x}(t), \quad t \geqslant \hat{t}_2.$$

Далее для системы (55) при $\hat{t}_3 = 3h$ строим финитный наблюдатель (12), следуя шагам предложенной в п. 2 процедуры.

1) Вначале выбираем полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,3}$, $d_0(p)$, обеспечивающие равенство (17). В данном случае можем взять $\varphi_i(\lambda) = 0$, $i = 1, 2$, $\varphi_3(\lambda) = -1$, $d_0(p) = p(p+1)(p-1)$. Теперь зададим характеристический полином матрицы (14). Согласно п. 1) процедуры его можно взять, например, в виде $d(p) = d_0(p)(p+2)(p-2)(p+3)$.

2) Далее следует обеспечить конечность множества решений системы (19). Для этого выберем $b_1 = 0$, $b_2 = 2$.

3) Находим полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, а именно:

$$a_1(\lambda) = (\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right),$$

$$a_2(\lambda) = -(1/31)\lambda^5 + \frac{31\lambda^4}{60} - \frac{155\lambda^3}{56} + \frac{155\lambda^2}{24} - \frac{31\lambda}{4} + \frac{3879}{1085}.$$

4) Определяем векторный полином $q(\lambda) = [\lambda q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$. После необходимых вычислений получаем

$$q_1(\lambda) = \frac{-1}{2781016066080000}(1811 - 2481\lambda + 790\lambda^2)(67056 - 67698\lambda + 32779\lambda^2 - 6517\lambda^3 + 420\lambda^4) \times$$
$$\times (93096 - 108714\lambda + 59461\lambda^2 - 12614\lambda^3 + 840\lambda^4)(59568 - 71121\lambda + 48527\lambda^2 - 11774\lambda^3 + 840\lambda^4),$$

$$q_2(\lambda) = \frac{-1}{6621466824000}(47789639902512 - 370092952633644\lambda + 1102423544237376\lambda^2 -$$
$$- 1495170574909779\lambda^3 + 1222044685296108\lambda^4 - 648099963764831\lambda^5 + 227930209931054\lambda^6 -$$
$$- 51881901955156\lambda^7 + 7207393605160\lambda^8 - 547550774400\lambda^9 + 17280144000\lambda^{10}).$$

5) Согласно (29) находим векторный полином $f(p,\lambda) = [\lambda f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda)]$, здесь

$$f_1(p,\lambda) = \frac{1}{854382816000}(-8+\lambda)(-4+\lambda)(-1+4\lambda)(1811 - 2481\lambda + 790\lambda^2) \times$$
$$\times (7988783616 + 2424219840p + 678081600p^2 - 37575407520\lambda - 5255132400p\lambda + 72040115700\lambda^2 +$$
$$+ 4379277000p\lambda^2 - 81298581900\lambda^3 - 1876833000p\lambda^3 + 59878769293\lambda^4 +$$
$$+ 350342160p\lambda^4 - 29829131010\lambda^5 - 21873600p\lambda^5 + 10059099325\lambda^6 - 2221928100\lambda^7 +$$
$$+ 302096116\lambda^8 - 22602720\lambda^9 + 705600\lambda^{10}),$$

$$f_2(p,\lambda) = \frac{-1}{2034244800}(39681595008 + 11341149120p + 2034244800p^2 - 400956231504\lambda -$$
$$- 109327742160p\lambda + 2364797481444\lambda^2 + 550649886360p\lambda^2 - 6948849607388\lambda^3 - 750485377320p\lambda^3 +$$
$$+ 10681166767235\lambda^4 + 387578526720p\lambda^4 - 9634085091384\lambda^5 - 78584241120p\lambda^5 + 5490542253471\lambda^6 +$$
$$+ 5101756800p\lambda^6 - 2025337510542\lambda^7 + 474916910292\lambda^8 - 67225325032\lambda^9 +$$
$$+ 5170883200\lambda^{10} - 164572800\lambda^{11}).$$

Пользуясь видом матрицы (14), окончательно получаем наблюдатель (12). Непосредственной проверкой убеждаемся, что определитель характеристической матрицы (14) равен $d(p)$. Окончательно оценку решения находим по формуле (57), где $t_0 = 0$, $\hat{t}_0 = \hat{t}_3 + t_0 = 3h$, $\bar{t}_0 = 19h$. Вычисляя матрицу, присоединённую к матрице (14), получаем, что $\delta = 7$ (см. доказательство теоремы 1), поэтому $\hat{t}_1 = \hat{t}_0 + \bar{t}_0 + \delta h = 29h$, $t_1 = \hat{t}_1 = 29h$.

б) Рассмотрим теперь реализацию оценки (74). Находим [21] матрицы $\widetilde{L}_1(\lambda)$, $\widetilde{L}_2(\lambda)$, обеспечивающие тождество (62):

$$\widetilde{L}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{L}_2(\lambda) = [-1/2].$$

Далее вычисляем матрицу $\Pi(\lambda)$, обратную к матрице $(I_3 - D_{\widetilde{L}}(\lambda))$:

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda/2 & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Теперь строим систему (65), (66), которая будет иметь следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1-\lambda_h/2-\lambda_h^2/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} - \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t),$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2+3\lambda_h/2+1 & 0 \\ -\lambda_h^2/2-\lambda_h/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t),$$

где

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2+\lambda_h/2+1 \\ \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Далее выбираем номер $i_0 = 2$ и находим матрицу $V_2(\lambda)$ (см. (69)):

$$V_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем неоднородную систему запаздывающего типа (70) $(\tilde{t}_2 = 2h)$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) - \begin{bmatrix} \lambda_h^2/2-\lambda_h/2 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}(t), \quad t > \tilde{t}_2,$$

$$\tilde{y}_2(t) = [-\lambda_h^2/2 - 1/2, 0]\tilde{x}(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_2.$$

На основании полученной системы записываем однородную систему (72) $(\tilde{t}_3 = 4h)$, для которой строим финитный наблюдатель (12). В данном случае функции $\varphi_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $\varphi_3(p, \lambda)$, числа b_1, b_2, полиномы $d_0(p)$, $d(p)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(p)$ возьмём такими же, как и в пункте а). После этого находим

$$q_1(\lambda) = \frac{1}{11124064264320000}(15439 - 22221\lambda + 7262\lambda^2)(67056 - 67698\lambda + 32779\lambda^2 - 6517\lambda^3 +$$

$$+420\lambda^4)(93096-108714\lambda+59461\lambda^2-12614\lambda^3+840\lambda^4)(59568-71121\lambda+48527\lambda^2-11774\lambda^3+840\lambda^4),$$

$$q_2(\lambda) = \frac{-1}{13242933648000}(95579279805024 + 1530780291432936\lambda - 4510961571442104\lambda^2 +$$

$$+ 6456712956921228\lambda^3 - 5380997274462633\lambda^4 + 2890251963977114\lambda^5 - 1026288639816701\lambda^6 +$$

$$+ 235362880595332\lambda^7 - 32883400769716\lambda^8 + 2508786225120\lambda^9 - 79423041600\lambda^{10}),$$

$$f_1(p, \lambda) = \frac{-1}{3417531264000}(-8+\lambda)(-4+\lambda)(-1+4\lambda)(15439 - 22221\lambda + 7262\lambda^2)(7988783616 +$$

$$+2424219840p+678081600p^2-37575407520\lambda-5255132400p\lambda+72040115700\lambda^2+4379277000p\lambda^2-$$
$$-81298581900\lambda^3-1876833000p\lambda^3+59878769293\lambda^4+350342160p\lambda^4-29829131010\lambda^5-21873600p\lambda^5+$$
$$+10059099325\lambda^6-2221928100\lambda^7+302096116\lambda^8-22602720\lambda^9+705600\lambda^{10}),$$

$$f_2(p,\lambda)=\frac{-1}{4068489600}(79363190016+22682298240p+4068489600p^2+706950535008\lambda+$$
$$+367284513120p\lambda-8550986632632\lambda^2-2292547069680p\lambda^2+28547458488080\lambda^3+$$
$$+3298289807400p\lambda^3-45868205683952\lambda^4-1747400945640p\lambda^4+42302146281009\lambda^5+$$
$$+358866145680p\lambda^5-24452419069086\lambda^6-23448707520p\lambda^6+9114030394725\lambda^7-$$
$$-2153950061364\lambda^8+306684620308\lambda^9-23691492832\lambda^{10}+756409920\lambda^{11}).$$

Подставляя найденные полиномы в матрицу (14), завершаем построение наблюдателя (12). Непосредственной проверкой убеждаемся, что определитель характеристической матрицы равен $d(p)$. Далее по формуле (74) получаем оценку решения системы (4), (5) с матрицами данного примера. В рассматриваемом случае $t_0=0$, $\tilde{t}_0=4h$, $\bar{t}_0=19h$, $\delta=11$, $\tilde{t}_1=\tilde{t}_0+\bar{t}_0+ +\delta h=34h$, $t_1=\hat{t}_1+h=35h$.

Замечание 7. В некоторых случаях момент времени $\bar{t}_0$, указанный в п. 2, можно уменьшить [9]. В частности для данного примера в части а) можно взять $\bar{t}_0=12h$, а в части б) $\bar{t}_0=0$. Также при непосредственных вычислениях иногда можно уменьшить и моменты времени $\hat{t}_i$, $\tilde{t}_i$, $i=1,2$. Так, в части а) данного примера можно взять $\hat{t}_3=2h$.

Заключение. Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа предложены методы проектирования двух видов финитных наблюдателей, представляющих собой линейные автономные дифференциально-разностные системы запаздывающего типа с выходом. При этом указанные системы имеют конечный спектр, что существенно облегчает процесс восстановления решения. Реализация наблюдателя (56), (57) представляется в общем случае проще, поскольку процесс приведения полиномиальной матрицы к нормальной форме Смита относится к операции, встроенной в современные пакеты компьютерной алгебры. Кроме того, размер выхода вспомогательной системы (44), (45) равен $2l$, в то время как размер выхода вспомогательной системы (65), (66) равен $n+l$. В то же время недостатком наблюдателя (56), (57) (в отличии от наблюдателя (73), (74)) является наличие в его структуре производной выхода, от которой можно избавиться, применяя формулу интегрирования по частям.

В случае, если множество начальных состояний исходной системы нейтрального типа состоит из достаточное количество раз дифференцируемых функций, оценку решения можно записать в виде выхода системы запаздывающего типа, не содержащего слагаемых с фундаментальными матрицами $\widehat{F}(t)$ и $\widetilde{F}(t)$ (см. замечания 4, 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sename O.* New trends in design of observers for time-delay systems // Kybernetika. 2001. V. 37. № 4. P. 427–458.
2. *Lee E.B., Olbrot A.W.* Observability and related structural results for linear hereditary systems // Int. J. Contr. 1981. № 34. P. 1061–1078.
3. *Pourboghrat F., Chyung D.H.* Exact state-variable reconstruction of delay systems // Int. J. Contr. 1986. V. 44. № 3. P. 867–877.
4. *Emre E., Khargonekar P.P.* Regulation of split linear systems over rings: coefficient-assignment and observers // IEEE Trans. Aut. Contr. 1982. V. 27. № 1. P. 104–113.
5. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Trans. on Aut. Contr. 1976. V. AC-21. № 2. P. 292–293.
6. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Aut. Contr. 1986. V. AC-31. № 6. P. 543–550.
7. *Ильин А.В., Буданова А.В., Фомичев В.В.* Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402.

8. *Метельский А.В.* Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
9. *Метельский А.В.* Дифференциально-разностный наблюдатель для системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 516–533.
10. *Минюк С.А., Метельский А.В.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 5. С. 15–23.
11. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–80.
12. *Хартовский В.Е.* Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального тип // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422.
13. *Хартовский В.Е.* К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716.
14. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
15. *Харитонов В.Л.* Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 51–65.
16. *Mondie S., Mihiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. on Aut. Contr. 2003. V. 48. № 12. P. 2207–2212.
17. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
19. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
20. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М., 1996.
21. *Хартовский В.Е.* Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск,
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 09.10.2020 г.
После доработки 10.12.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.