ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 286–292

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2020 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2020. Т. 56. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S037406412102014X

А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова, А. Османов (Москва, Россия, ВМК МГУ). "Особенности численной реализации алгоритма построения цифрового стабилизатора для параметрически неопределённой переключаемой системы" (14.09.2020).

Исследуется вопрос о построении численной процедуры расчёта цифрового регулятора для переключаемых систем с интервальной неопределённостью. Предлагаемая численная процедура основана на результатах работ [1, 2].

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau = \mathrm{const} > 0)$; $x \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ и $[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $[b]\colon I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ и $[c]\colon I \to \{[c_1], \ldots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ $(i = \overline{1, m})$ – интервальные матрицы соответствующих размеров.

Определение 1 [1]. *Решением* уравнения состояния системы (1) при фиксированных режимах (c_i, A_i, b_i) $(c_i \in [c_i],\ A_i \in [A_i],\ b_i \in [b_i],\ i \in \{1, \ldots, m\})$, заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем вектор-функцию $x(t)$, являющуюся кусочно-дифференцируемым решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0.$$

Определение 2 [1]. *Пучком траекторий* уравнения состояния системы (1) при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем множество $\mathfrak{X}$ решений $x(t)$ уравнения состояния системы (1) в смысле определения 1 при всех возможных режимах (c_i, A_i, b_i), где $c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ $(i = \overline{1, m})$.

Для заданного алгоритма управления u (в форме обратной связи), наряду с каждым пучком траекторий $\mathfrak{X}$ системы (1), будем рассматривать соответствующий пучок управляющих сигналов $\mathfrak{U}$.

Определение 3 [1]. *Сечением* пучка траекторий $\mathfrak{X}$ уравнения состояния системы (1) в момент времени $t = t^*$ при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем множество $\mathfrak{X}_{t^*}$ значений решений $x \in \mathfrak{X}$ при $t = t^*$, т.е. $\mathfrak{X}_{t^*} = \{x(t^*) : x(\cdot) \in \mathfrak{X}\}$.

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Аналогично определяем сечение пучка управляющих сигналов $\mathfrak{U}_{t^*} = \{u(t^*) : u(\cdot) \in \mathfrak{U}\}$. Норму сечения пучка траекторий $\|\mathfrak{X}_{t^*}\|$ и соответствующую норму пучка управляющих сигналов $\|\mathfrak{U}_{t^*}\|$ определяем следующим образом:

$$\|\mathfrak{X}_{t^*}\| = \sup_{x(t^*)\in\mathfrak{X}} \|x(t^*)\| \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{U}_{t^*}\| = \sup_{u(t^*)\in\mathfrak{U}} \|u(t^*)\|.$$

Для положительных чисел T и τ через $S_{\tau,T}$ обозначим множество переключающих сигналов σ таких, что точки разрыва функций $\sigma(t)$ принадлежат последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ и расстояние между любыми точками разрыва не меньше τ.

Определение 4 [1]. Переключаемую интервальную линейную систему (1) при заданном управлении u (в форме обратной связи; в частности, при $u \equiv 0$) будем называть S_τ-*устойчивой* ($S_{\tau,T}$*-устойчивой*), если при любых $x(0) = x_0$ и $\sigma \in S_\tau$ $(\sigma \in S_{\tau,T})$ для соответствующих пучков траекторий и управляющих сигналов выполнено условие

$$\|\mathfrak{X}_t\| + \|\mathfrak{U}_t\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Постановка задачи цифровой $S_{\tau,T}$*-стабилизации.* Для объекта (1) с заданным $\tau > 0$ необходимо построить цифровой регулятор по выходу

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad T < \tau, v \in \mathbb{R}^1, \quad Q, q, H, h \in \mathbb{R}^1, \quad (2)$$

который обеспечивает $S_{l_0T,T}$-устойчивость в нуле замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы при некотором натуральном l_0 таком, что $l_0T \leqslant \tau$.

Для решения задачи цифровой стабилизации системы (1) осуществляется переход (на основе метода точной дискретизации, описанного в [1, 2]) от исходной непрерывной переключаемой системы к её дискретной модели

$$\begin{aligned} x[(l+1)T] &= [\Lambda_\sigma]x[lT] + [\mu_\sigma]u[lT], \\ y[lT] &= [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,T}, \end{aligned} \quad (3)$$

для которой решается задача $S_{\tau,T}$-стабилизации. Рассчитанный для системы (3) регулятор решает также задачу $S_{\tau,T}$-стабилизации системы (1).

В соответствии с работой [1] поиск регулятора (2), обеспечивающего $S_{\tau,T}$-стабилизацию системы (3), осуществляем следующим образом: в пространстве параметров регулятора $(Q, q, H, h) \in \mathbb{R}^4$ фиксируем прямоугольную окрестность нуля и накладываем на неё сетку с шагом d (выбор размера окрестности и шага сетки произволен, отсчёт узлов сетки ведётся с нуля в $\mathbb{R}^4$). При этом каждому узлу сетки соответствует конкретный регулятор.

Для каждого узла сетки, замыкая систему (3) регулятором (2), получаем точную дискретную модель замкнутой системы с m режимами вида

$$\begin{aligned} x[(l+1)T] &= ([\Lambda_i] + [\mu_i]h[c_i])x[lT] + [\mu_i]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] &= q[c_i]x[lT] + Qv[lT], \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом осуществляется проверка того, является ли данный цифровой регулятор одновременно стабилизирующим для конечного семейства систем (4) с помощью системы линейных матричных неравенств относительно неизвестных матриц L_i $(i = \overline{1,m})$:

$$\begin{gathered} L_i > 0, \\ \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}_{i,\nu} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - L_i < 0, \\ \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}_{i,\nu} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\eta} + \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}_{i,\eta} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - 2L_i < 0, \quad \nu, \eta \in \{1, \ldots, 512\}, \quad \nu \neq \eta, \end{gathered} \quad (5)$$

где $\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}$, $\widetilde{\Lambda}_{i,\eta}$ – вершинные матрицы для интервального семейства:

$$\widetilde{x}[(l+1)T] = [\widetilde{\Lambda}_i]\widetilde{x}[lT], \quad i = \overline{1,m},$$

где $\widetilde{x} = (x, v)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^3$;

$$[\widetilde{\Lambda}_i] = \begin{pmatrix} [\Lambda_{11}^i] & [\Lambda_{12}^i] \\ [\Lambda_{21}^i] & \Lambda_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$[\Lambda_{11}^i] = [\Lambda_i] + [\mu_i]h[c_i], \quad [\Lambda_{12}^i] = [\mu_i]H, \quad [\Lambda_{21}^i] = q[c_i], \quad \Lambda_{22}^i = Q.$$

Если система (5) имеет решение, то соответствующий регулятор является одновременно стабилизирующим для семейства (4). При этом он обеспечивает $S_{\tau,T}$-стабилизацию системы (1) при $\tau \geqslant l_0 T$, где $l_0 = [-2\log_{\gamma_*} C_*] + 1$. Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. Константы C_*, γ_* зависят от собственных значений матриц L_i (формулы для их вычислений указаны в работе [1]).

Для уменьшения величины l_0 предлагается вместо системы (5) рассмотреть систему линейных матричных уравнений:

$$L_i = -\varkappa_i I,$$

$$\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\mathrm{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - L_i = -\varkappa_i I,$$

$$\widetilde{\Lambda}_{i,\nu}^{\mathrm{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\eta} + \widetilde{\Lambda}_{i,\eta}^{\mathrm{т}} L_i \widetilde{\Lambda}_{i,\nu} - 2L_i = -\varkappa_i I, \quad \nu, \eta \in \{1, \ldots, 512\}, \quad \nu \neq \eta.$$

Предполагается, что если варьировать положительные параметры $\varkappa_i$ от 0 до $\varkappa_i^*$, то можно получить такие решения L_i системы (5), на которых минимизируется величина l_0.

Предложенная численная процедура позволит уменьшить время задержки, при котором цифровой регулятор с заданной структурой стабилизирует переключаемую линейную интервальную систему (1).

Подчеркнём, что предложенная численная процедура построения цифрового стабилизатора может быть использована и в случае произвольной размерности параметрически неопределённой переключаемой системы. При этом, естественно, увеличение размерности потребует существенно бóльших вычислительных затрат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-001_Бел-а, 20-07-00827_а) и содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература.

1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559. 2. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.

С.С. Будзинский (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Автоколебания в иерархии моделей нелинейной оптической системы с запаздыванием” (26.10.2020).

Рассматривается модель оптической системы с узкой кольцевой апертурой с близкими между собой внутренним r и внешним R радиусами и запаздыванием в контуре обратной связи (КОС)

$$u_t(\theta, \rho, t) = -u(\theta, \rho, t) + D\Delta u(\theta, \rho, t) + K|\mathbf{B}[e^{iu(\theta,\rho,t-T)}]|^2, \quad r < \rho < R,$$

$$u_\rho|_{\rho=r} = u_\rho|_{\rho=R} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \rho^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ – оператор Лапласа в полярных координатах, а D, T и K – положительные постоянные. Искомая функция $u(\theta, \rho, t)$ имеет смысл фазового набега, а нелинейное слагаемое описывает распределение интенсивности излучения на апертуре в конце КОС. Параметр K пропорционален интенсивности используемого излучения, а линейный оператор $\mathbf{B}$ ставит в соответствие комплексной амплитуде в начале КОС, $A(\theta, \rho, z)|_{z=0}$, её же на расстоянии z_0 в конце КОС, $A(\theta, \rho, z)|_{z=z_0}$, где $A(\theta, \rho, z)$ – решение задачи Коши для линейного уравнения Шрёдингера:

$$A_z(\theta, \rho, z) + i\Delta A(\theta, \rho, z) = 0, \quad r < \rho < R, \quad z > 0,$$

$$A_\rho|_{\rho=r} = A_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad A(\theta, \rho, 0) = e^{iu(\theta,\rho,t-T)}. \tag{2}$$

Задача (1) имеет постоянное решение $u(\theta,\rho,t)\equiv K$. В докладе исследуется, как при изменении параметра K потеря этой точкой покоя устойчивости может приводить к образованию автоколебаний. В частности изучается возможность конструктивно предсказывать наличие автоколебаний по физическим параметрам системы (1).

Придадим параметру нелинейности малое возмущение μ и рассмотрим локализованную в окрестности точки покоя систему

$$v_t(\theta,\rho,t) = -v(\theta,\rho,t) + D\Delta v(\theta,\rho,t) + (K+\mu)\{|\mathbf{B}[e^{iv(\theta,\rho,t-T)}]|^2 - 1\} \tag{3}$$

как абстрактную динамическую систему. Система (3) обладает группой симметрий $O(2)$: вместе с $v(\theta,\rho,t)$ решениями будут также $v(2\pi-\theta,\rho,t)$ и $v([\theta+\delta] \bmod 2\pi,\rho,t)$ для произвольного $0<\delta<2\pi$. Поэтому при выполнении условий бифуркации Андронова–Хопфа динамика описывается следующей нормальной формой на центральном многообразии:

$$\dot s_1 = s_1(C_1\mu + C_2 s_1^2 + C_3 s_2^2), \quad \dot\phi_1 = \omega,$$
$$\dot s_2 = s_2(C_1\mu + C_2 s_2^2 + C_3 s_1^2), \quad \dot\phi_2 = \omega. \tag{4}$$

Соотношения между коэффициентами C_2 и C_3 определяют существование автоколебаний. У задачи (1) есть орбитально асимптотически устойчивые решения вида вращающихся волн при

$$C_2<0, \quad C_2+C_3<0, \quad C_2-C_3>0,$$

а орбитально асимптотически устойчивое решение вида стоячей волны существует при

$$C_2<0, \quad C_2+C_3<0, \quad C_2-C_3<0.$$

Однако коэффициенты C_2 и C_3 нормальной формы (4) для задачи (1) не выражаются явным образом через физические параметры модели, что препятствует конструктивному предсказанию автоколебаний [1]. В то же время динамика задач в тонких областях тесно связана с динамикой предельных задач в областях меньшей размерности [2].

Для задачи (1) предельная задача на окружности ставится, исходя из известных асимптотических свойств спектра оператора Лапласа–Неймана:

$$\widetilde u_t(\theta,t) = -\widetilde u(\theta,t) + \widetilde D\widetilde u_{\theta\theta}(\theta,t) + K|\widetilde{\mathbf{B}}[e^{i\widetilde u(\theta,t-T)}]|^2, \quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$
$$\widetilde u|_{\theta=0} = \widetilde u|_{\theta=2\pi}, \quad \widetilde u_\theta|_{\theta=0} = \widetilde u_\theta|_{\theta=2\pi}. \tag{5}$$

Здесь $\widetilde D = D/r^2$, а оператор $\widetilde{\mathbf{B}}$ решает одномерный аналог задачи Коши (2) с $\widetilde z_0 = z_0/r^2$. Задача (5) также обладает группой симметрий $O(2)$, в отличие от (1) для неё все коэффициенты нормальной формы (4) вычисляются явно [3], и значит, существует конструктивный критерий проверки существования автоколебаний на окружности.

Численные эксперименты показывают, что в случае узкого кольца, исходя из данных “одномерных” критериев, можно делать выводы о существовании автоколебаний в кольце [1]. Таким образом, возникает иерархия моделей:

модель в тонком кольце $\to$ модель на окружности $\to$ нормальная форма.

Схожие рассуждения можно применить для анализа задачи вида (1), снабжённой краевыми условиями на наклонную производную

$$(\rho u_\rho - \operatorname{tg}(\alpha)u_\theta)|_{\rho=r,R} = 0, \quad \alpha\neq 0. \tag{6}$$

Спектр оператора Лапласа с краевыми условиями (6) обладает аналогичными асимптотическими свойствами [4], что позволяет поставить предельную задачу на окружности вида (5) с $\widetilde D = D/(r\cos\alpha)^2$ и $\widetilde z_0 = z_0/(r\cos\alpha)^2$. Использование иерархии моделей для анализа автоколебаний в данном случае приводит к обнаружению в численных экспериментах вращающихся и пульсирующих спиральных волн в тонком кольце. При этом пульсирующие спирали – ранее не описанный класс решений, который образуется вследствие несоответствия групп симметрий исходной задачи с наклонной производной, $SO(2)$, и предельной задачи, $O(2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2019-1624).

Литература. 1. Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V. Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlin. Anal. Real World Appl. 2018. V. 44. P. 559–572. 2. Hale J., Raugel G. Reaction-diffusion equation on thin domains // J. de Math. Pures et Appl. 1992. T. 71. № 1. P. 33–95. 3. Budzinskiy S., Razgulin A. Normal form of $O(2)$ Hopf bifurcation in a model of a nonlinear optical system with diffraction and delay // Electr. J. of Qualit. Theory of Differ. Equat. 2017. № 50. P. 1–12. 4. Будзинский С.С. О нулях перекрестных произведений функций Бесселя из краевых задач с наклонной производной // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2020. № 2. С. 3–10.

Ю.А. Комаров (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Векторный гамильтонов формализм для задач оптимизации управляемого движения” (09.11.2020).

Доклад посвящён методам решения задач оптимизации движения управляемых динамических систем в непрерывном и дискретном времени с векторным критерием. В то время как скаляризация многомерного функционала порождает ошибку аппроксимации и не позволяет отыскать всю границу Парето, необходимую для принятия решения в реальных векторных задачах, предлагаемый в настоящей работе векторный гамильтонов формализм позволяет описать эволюцию во времени всего паретовского фронта.

В докладе рассматриваются векторные функционалы качества, принимающие значения в частично упорядоченном пространстве $(\mathbb{R}^p, \leqslant)$ с паретовским отношением порядка.

Определение 1. Будем говорить, что вектор $y = (y_1, \dots, y_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$ *доминируется по Парето* вектором $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$, если $y \neq \hat{y}$ и выполнены покомпонентные неравенства $\hat{y}_i \leqslant y_i, \quad i = \overline{1, p}$.

Введённое отношение на $\mathbb{R}^p$ является отношением порядка, которое будем называть *порядком по Парето* и обозначать через $\leqslant$, т.е. $\hat{y} \leqslant y$, если выполнены условия определения 1.

Определение 2. *Границей Парето*, или *паретовским фронтом*, множества $Y \subset (\mathbb{R}^p, \leqslant)$ будем называть множество $\mathbf{Min}\, Y$ всех минимальных в смысле порядка по Парето элементов из Y, т.е.

$$\mathbf{Min}\, Y = \{\hat{y} \in Y : \text{не существует } y \in Y \text{ такого, что } y \leqslant \hat{y}\}.$$

В первой части доклада рассматривается управляемая динамическая система в дискретном времени вида

$$x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), \quad t = \overline{0, T-1},$$
$$x_0 = x^0, \quad u_t \in \mathcal{P}_t,$$
$$x_t \in \mathbb{R}^n, \quad u_t \in \mathbb{R}^m.$$

Необходимо описать динамику границы Парето значений векторного функционала

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{s=0}^{T-1} \boldsymbol{\mathcal{L}}(s, x_s, u_s) + \boldsymbol{\varphi}(x_T),$$

где функции $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ заданы и $\boldsymbol{\mathcal{J}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\mathcal{L}}(s, x, u), \boldsymbol{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^p$, а также найти все допустимые стратегии управления $\boldsymbol{u} = [u_0, \dots, u_{T-1}]$, приводящие на границу $\mathbf{Min}\, \boldsymbol{\mathcal{J}}(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$.

Подход к построению решения этой задачи основан на методе динамического программирования. Для этого вводится векторная функция цены (многозначная функция) вида $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, x) = \mathcal{Z}(t, x)$. Для неё справедливы следующие аналоги принципа оптимальности и уравнения Беллмана.

Предложение 1. *Пусть существует граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(0,x^0)$. *Тогда для любого* $t=\overline{0,T}$ *для* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(0,x^0)=\mathbf{Min}\left\{\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{\mathcal{L}}(s,\bar{x}_s,\bar{u}_s)+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,x_{t+1}[\bar{\boldsymbol{u}}]):\bar{\boldsymbol{u}}=\{\bar{u}_s\}_{s=0}^{t},\quad \bar{u}_s\in\mathcal{P}_s\right\}.$$

Предложение 2. *Пусть существует граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(0,x^0)$. *Тогда функция* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)=\mathbf{Min}\,\{\boldsymbol{\mathcal{L}}(t,x,u)+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,f(t,x,u)):u\in P_t\},\quad t=\overline{T-1,0},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(T,\cdot\,)=\boldsymbol{\varphi}(\cdot).$$

В отличие от задач со скалярным критерием последнее предложение определяет лишь необходимые, но не достаточные условия для отыскания векторной функции цены.

Во второй части доклада рассматривается управляемая динамическая система в непрерывном времени вида

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$
$$x(t_0)=x^0,$$
$$u(t)\in\mathcal{P}(t),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$

с векторным функционалом в форме Майера–Больца:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(t_0,x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{\vartheta}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\boldsymbol{\varphi}(x(\vartheta)).$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, а функции $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ заданы и $\boldsymbol{\mathcal{J}}(t,x(\cdot),u(\cdot)),\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,x,u),\boldsymbol{\varphi}(x)\in\mathbb{R}^p$. Необходимо описать динамику границы Парето значений указанного векторного функционала, а также отыскать все минимизирующие стратегии управления $u(\cdot)$.

Для векторной функции цены вида $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)=\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(t,x)$ справедливы векторные аналоги принципа оптимальности и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Предложение 3. *Пусть граница Парето* $\mathbf{Min}\,\mathcal{Z}(t_0,x^0)$ *существует. Тогда для любого* $t\in[t_0,\vartheta]$ *для* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\cdot\,,\cdot\,)$ *выполняется векторный аналог принципа оптимальности в виде*

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0,x^0)=\mathbf{Min}\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))\,d\tau+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,\bar{x}[t]):\bar{u}(\tau)\in\mathcal{P}(\tau)\right\}.$$

Предложение 4. *Пусть граница Парето множества* $\mathcal{Z}(t_0,x^0)$ *существует. Тогда введённая векторная функция цены* $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)$ *удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma\to+0}\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x),\mathbf{Min}\left\{\int_{t}^{t+\sigma}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))\,d\tau+\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+\sigma,\bar{x}[t+\sigma])\right\}\right)=0,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot\,)=\boldsymbol{\varphi}(\cdot).$$

А.С. Фурсов, А.В. Мальцева, Д. Миниахметов (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Некоторые аспекты вычислительной процедуры построения стабилизатора для переключаемых систем с режимами различных порядков” (30.11.2020).

Решается задача разработки вычислительной процедуры построения стабилизатора для переключаемых систем с режимами различных порядков в соответствии с методами, изложенными в работе [1]. Для реализации указанной процедуры предполагается использовать систему MATLAB, в которой для нахождения решений дифференциальных уравнений будем использовать метод Эйлера первого порядка.

Рассматривается переключаемая линейная система

$$\dot{x}^{(\sigma)} = A_\sigma x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \tag{1}$$

где $\sigma \in \{1,\ldots,m\}$ – переключающий сигнал, m – количество различных режимов (динамических систем вида $\dot{x}^{(i)} = A_i x^{(i)} + b_i u$). Считаем, что режимы могут иметь различные динамические порядки от первого до третьего. В каждый момент времени функционирование системы определяется каким-то одним из этих m режимов, а моменты переключения кратны некоторой положительной величине (моменты переключения и режим функционирования системы между моментами переключения определяются случайным образом).

Преемственность режимов в моменты переключений обеспечивается матрицами преемственности $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, где Z_{ij} осуществляет преобразование конечного состояния j-го режима в начальное состояние i-го режима в момент времени t_{ij} по правилу $x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij} x^{(j)}(t_{ij})$.

Основные шаги вычислительной процедуры. В работе [1] для системы (1) предлагается использовать метод расширения динамического порядка, позволяющий преобразовать все режимы к одному (максимальному) порядку

$$\dot{x} = \bar{A}_i x + \bar{b}_i u, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Задача поиска регулятора $u = -kx$, стабилизирующего все расширенные режимы (2), сводится к решению системы линейных матричных неравенств

$$\bar{H}\bar{A}_i^{\mathrm{T}} + \bar{A}_i\bar{H} - (\bar{k}^{\mathrm{T}}\bar{b}_i^{\mathrm{T}} + \bar{b}_i\bar{k}) < 0, \quad \bar{H} > 0. \tag{3}$$

Численное решение системы (3) может быть реализовано в MatLab с помощью пакета LMI.

В случае существования решения системы (3) вектор параметров регулятора задаётся равенством $k = \bar{k}H$, где $H = \bar{H}^{-1}$.

Полученный регулятор $u = -kx$ будет стабилизировать систему (1), если для всех матриц преемственности выполняются неравенства $\|Z_{ij}\|_2^2 \leqslant \theta$, где $\theta = \lambda_{\min}(\bar{H}^{-1})/\lambda_{\max}(\bar{H}^{-1})$, $\lambda_{\min}(\bar{H}^{-1})$ и $\lambda_{\max}(\bar{H}^{-1})$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\bar{H}^{-1}$ соответственно.

В связи с этим предлагается немного модифицировать алгоритм нахождения вектора k с целью максимизации соответствующего параметра θ. Для этого вместо системы линейных матричных неравенств (3) будем решать систему линейных уравнений

$$\bar{H}\bar{A}_i^{\mathrm{T}} + \bar{A}_i\bar{H} - (\bar{k}^{\mathrm{T}}\bar{b}_i^{\mathrm{T}} + \bar{b}_i\bar{k}) = -\mu I, \quad \bar{H} > 0, \tag{4}$$

где I – единичная матрица, а положительный параметр μ пробегает с некоторым шагом фиксированный промежуток $(0, \mu^*]$.

Пусть M – множество параметров μ, при которых разрешима система (4). Для каждого $\mu_i \in M$ найдём вектор параметров регулятора k_i и значение θ_i. Обозначим $\bar{\theta} = \max \theta_i$. Тогда, если для всех матриц преемственности будут выполнены неравенства $\|Z_{ij}\|_2^2 \leqslant \bar{\theta}$, то регулятор $u = -k_i x$ решает задачу стабилизации системы (1).

Отметим, что предложенная численная процедура может быть также применена для поиска стабилизирующего регулятора в случае произвольной размерности режимов переключаемой системы. При этом увеличение размерности, естественно, потребует существенно бо́льших вычислительных затрат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-57-001 Бел-а).

Литература. 1. Фурсов А.С., Капалин И.В. Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.