

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.7

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2021 г. В. С. Климов

Устанавливаются оценки (внутренние и вплоть до границы) решений неравенства $\mathcal{L}(u) \geq 0$, где $\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка с импульсными особенностями. Полученные результаты применимы, в частности, к краевой задаче Неймана. Изучается связь множества решений рассматриваемого неравенства с классом вогнутых функций одного переменного.

DOI: 10.31857/S0374064121030018

Введение. В настоящей работе изучаются решения неравенства $\mathcal{L}(u) \geq 0$, где $\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого имеют импульсные особенности [1, гл. 3].

Первый её пункт содержит определения различных функциональных классов. Его цель состоит в фиксации терминологии и обозначений. Во втором пункте устанавливаются обратные неравенства, позволяющие оценивать нормы первых производных функций из множества $\mathcal{K}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(u) \geq 0\}$ через более слабые интегральные нормы. Они носят характер внутренних оценок. Третий пункт работы посвящён оценкам вплоть до границы решений дифференциальных неравенств. Основные результаты относятся к случаю смешанного краевого условия, частным случаем которого является условие Неймана.

К данной публикации близки статьи [2–4]. В работе [2] рассматривается дифференциальный оператор $\mathcal{L}(u) = u^{(n)}$, результаты работ [3, 4] применимы к дифференциальным операторам с суммируемыми коэффициентами.

Ниже все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Если Z – банахово пространство и $v \in Z$, то через $\|v; Z\|$ обозначается норма элемента v в пространстве Z , а через Z^* – сопряжённое к Z пространство. Запись $Z_1 \rightarrow Z_2$ означает непрерывность оператора вложения банахова пространства Z_1 в банахово пространство Z_2 ; если же оператор вложения вполне непрерывен, то для этого используется запись $Z_1 \Rightarrow Z_2$. Замкнутое подмножество K вещественного нормированного пространства E называют *клином*, если для любых $x, y \in K$ и неотрицательного числа α вытекает, что $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$. Если K – клин, то множество $K \cap (-K)$ называется его *лезвием*. Клин K называют *конусом*, если его лезвие состоит лишь из одной точки. Далее будет применяться следующее утверждение [5, с. 126].

Предложение. Пусть E, E_1, E_0 – банаховы пространства, причём $E_1 \Rightarrow E$ и $E \rightarrow E_0$. Тогда существует такая функция $\kappa: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, что для каждого элемента $f \in E_1$ и любого положительного числа η справедливо неравенство Эрлинга

$$\|f; E\| \leq \eta \|f; E_1\| + \kappa(\eta) \|f; E_0\|.$$

Библиография, приведённая в конце статьи, весьма краткая. Автор не ставил своей целью дать обширный обзор литературы, посвящённой дифференциальным неравенствам.

1. Функциональные пространства. Если множество $S \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу, то $\text{mes } S$ – его мера Лебега; совпадающие п.в. (почти всюду) функции f и g называются *эквивалентными* относительно меры Лебега; это отношение обозначаем как $f \sim g$. Через $\text{ess sup } f$ и $\text{ess inf } f$ обозначаются существенные верхняя и нижняя грани вещественнозначной функции f соответственно. Если функция f определена на множестве S , то число $\text{osc } \{f; S\} = \text{ess sup } f - \text{ess inf } f$ называют *существенным колебанием* функции f на этом множестве.

Каждому измеримому подмножеству S действительной прямой можно поставить в соответствие нормированное пространство $L^m(S)$ ($1 \leq m \leq \infty$) тех измеримых на S функций $u(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u; L^m(S)\| = \left(\int_S |u(x)|^m dx \right)^{1/m} \quad (1 \leq m < \infty), \quad \|u; L^\infty(S)\| = \operatorname{ess\,sup} |u(x)|.$$

Как обычно, эквивалентные относительно меры Лебега функции отождествляются.

Вариацией функции $u(x)$ на отрезке $J = [a, b]$ называется число

$$V_a^b(u) = \sup \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})|,$$

где точная верхняя граница берётся по всем возможным разбиениям отрезка J точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Совокупность функций с ограниченной вариацией на отрезке J образует линейное пространство, обозначаемое символом $BV(J)$. Иногда число $V_a^b f$ называют *поточечной вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$.

Если $v \in L^1(J)$ и

$$u(x) = u(a) + \int_a^x v(s) ds,$$

то функцию $u(x)$ называют *абсолютно непрерывной* на отрезке J . В этом случае почти всюду на J функция u дифференцируема и для её производной справедливо равенство $u'(x) = v(x)$ п.в. Функция v является также производной (в смысле Соболева) функции u [6, 7]. Абсолютно непрерывная на отрезке J функция u принадлежит классу $BV(J)$. Имеет место равенство $V_a^b(u) = \|v'; L(J)\|$. Совокупность абсолютно непрерывных на отрезке J функций обозначается символом $AC(J)$. Через $W_m^1(J)$ обозначается часть пространства $AC(J)$, состоящая из функций u , производные которых принадлежат пространству $L^m(J)$ ($1 \leq m \leq \infty$). Для функции u из $W_m^1(J)$ имеет смысл и конечна норма

$$\|u; W_m^1(J)\| = \|u; L^m(J)\| + \|u'; L^m(J)\|,$$

относительно которой $W_m^1(J)$ – банахово пространство. Наряду с $W_m^1(J)$ будут использоваться банахово пространство $C(J)$ непрерывных на отрезке функций, а также пространство $C^1(J)$ непрерывно дифференцируемых на J функций, которое можно рассматривать как собственное подпространство пространства $W_\infty^1(J)$. Через $C_0^1(J)$ обозначается часть пространства $C^1(J)$, состоящая из финитных, т.е. обращающихся в нуль вблизи точек a и b , функций.

Множество точек разрыва функции f класса $BV(J)$ конечно или счётно. Существуют односторонние пределы

$$f_r(x) = \lim_{\xi \rightarrow x+0} f(\xi) \quad (x \in [a, b)), \quad f_l(x) = \lim_{\xi \rightarrow x-0} f(\xi) \quad (x \in (a, b]).$$

Непрерывность функции f в точке a эквивалентна равенству $f(a) = f_r(a)$; аналогично, равенство $f(b) = f_l(b)$ эквивалентно непрерывности функции f в точке b . Если функции f, g принадлежат $BV(J)$ и $f \sim g$, то $f_r(x) = g_r(x)$ и $f_l(x) = g_l(x)$ в естественной области определения.

Однако поточечные вариации $V_a^b f$ и $V_a^b g$ могут быть различными. *Существенной вариацией* функции f на отрезке $J = [a, b]$ называется число

$$\bar{V}(f, J) = \min\{V_a^b g : g \sim f\}.$$

Минимум в данном равенстве достигается. Действительно (см., например, [8]), если функция $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна справа в точке a , непрерывна слева в точке b и

$$\min\{f_r(x), f_l(x)\} \leq g(x) \leq \max\{f_r(x), f_l(x)\} \quad (a < x < b),$$

то $f \sim g$ и $\bar{V}(f, J) = V_a^b g$.

Известны и другие эквивалентные определения существенной вариации. Например, верно равенство

$$\bar{V}(f, J) = \sup \left\{ \int_a^b f(x)h'(x) dx : h \in C_0^1(J), |h(x)| \leq 1 \right\}.$$

Для непрерывной на отрезке $J = [a, b]$ функции f поточечная и существенная вариации совпадают: $\bar{V}(f, J) = V_a^b f$. Отметим также неравенства

$$\operatorname{osc} \{f, J\} \leq \bar{V}(f, J), \quad \bar{V}(fg, J) \leq \bar{V}(f, J)\|g; L^\infty(J)\| + \bar{V}(g, J)\|f; L^\infty(J)\|.$$

Обозначим через $\operatorname{bv}(J)$ линейное пространство суммируемых на отрезке $J = [a, b]$ функций f , имеющих конечную существенную вариацию $\bar{V}(f, J)$. Для функции f из $\operatorname{bv}(J)$ имеет смысл и конечна норма $\|f; \operatorname{bv}(J)\| = \|f; L(J)\| + \bar{V}(f, J)$; эквивалентные функции отождествляются. Относительно этой нормы $\operatorname{bv}(J)$ является банаховым пространством.

Определим множество $\mathcal{E}(J)$ как совокупность абсолютно непрерывных функций $u: J \rightarrow \mathbb{R}$, производная u' которых имеет ограниченную существенную вариацию: $\mathcal{E}(J) = \{u \in AC(J) : u' \in \operatorname{bv}(J)\}$. Класс $\mathcal{E}(J)$ представляет собой линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Введём в $\mathcal{E}(J)$ норму равенством $\|u; \mathcal{E}(J)\| = \|u; C(J)\| + \bar{V}(u', J)$. Аналогичные функциональные классы изучались многими математиками (см., например, [1, 7–9]), установившими, в частности, полноту пространства $\mathcal{E}(J)$ и разнообразные неравенства типа теорем вложения. Пространство $\mathcal{E}(J)$ непрерывно вложено в пространство $W_m^1(J)$ ($1 \leq m \leq \infty$); при $m \in [1, \infty)$ это вложение компактно. Отметим, что некоторые авторы вместо термина “существенная вариация” используют его сокращённый вариант – “вариация” [1, гл. 3].

Наряду с введённой выше нормой $\|u; \mathcal{E}(J)\|$ в пространстве $\mathcal{E}(J)$ будут использоваться и другие нормы:

$$\|u\|_0 = \|u; L(J)\| + \bar{V}(pu'; J), \quad \|u\|_1 = \|u; C(J)\| + \bar{V}(pu'; J).$$

Здесь и далее p – фиксированная функция из $BV(J)$ такая, что $p_0 = \inf\{p(x) : x \in J\} > 0$, $\bar{p} = \sup\{p(x) : x \in J\} < \infty$. Нормы $\|u; \mathcal{E}(J)\|$ и $\|u\|_1$ эквивалентны [1, с. 137]. Доказательство эквивалентности норм $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ опирается на неравенство Эрлинга

$$\|u; C(J)\| \leq t(\|u; C(J)\| + \bar{V}(pu'; J)) + \kappa(t)\|u; L(J)\|,$$

где t – любое положительное число. При $t = 1/2$ получаем последовательно оценки

$$\|u; C(J)\| \leq 2\kappa(1/2)\|u; L(J)\| + \bar{V}(pu', J), \quad \|u\|_1 \leq 2\kappa(1/2)\|u; L(J)\| + 2\bar{V}(pu', J),$$

из которых очевидно следует эквивалентность норм $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$.

В ряде мест далее применяется интеграл Римана–Стилтьеса, обозначаемый символом

$$\int_a^b \varphi(x) dg(x).$$

Сопряжённое к $C(J)$ пространство $C^*(J)$ состоит из линейных функционалов Λ , допускающих представление

$$\Lambda(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dg(x),$$

в которых $g \in BV(J)$; верно равенство $\|\Lambda; C^*(J)\| = V_a^b g$. Возрастание функции g эквивалентно положительности функционала Λ ; при этом $\|\Lambda; C^*(J)\| = g(b) - g(a)$.

Если $u \in AC(J)$, $v \in BV(J)$, то справедливо правило интегрирования по частям

$$\int_a^b v(x)u'(x) dx = \int_a^b v(x) du(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x) dv(x).$$

Это равенство показывает, что в некоторых случаях интеграл Римана–Стилтьеса сводится к интегралу Лебега.

2. Внутренние оценки. Ниже p , Q , F – функции класса $BV(J)$ (как и выше $J = [a, b]$, $-\infty < a < b$, $p_0 = \inf\{p(x) : x \in J\} > 0$, $\bar{p} = \sup\{p(x) : x \in J\} < \infty$); функции p , Q , F непрерывны в точках a , b . Определим на пространстве $H(J) = W_2^1(J)$ функционалы

$$\Lambda(u) = \int_a^b u(x)dF(x), \quad \Psi(u) = \frac{1}{2} \left(\int_a^b p(x)(u'(x))^2 dx + \int_a^b u^2(x) dQ(x) \right),$$

$$\Phi(u) = \Psi(u) - \Lambda(u).$$

Интегралы в этих равенствах понимаются по Лебегу (или по Риману–Стилтьесу). Функционалы Ψ, Φ дифференцируемы по Фреше на $H(J)$, соответствующие производные определяются соотношениями

$$\Psi'(u)h = \int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx + \int_a^b u(x)h(x) dQ(x),$$

$$\Phi'(u)h = \Psi'(u)h - \Lambda(h),$$

в которых h – произвольный элемент из $H(J)$.

Обозначим через $H_0(J)$ совокупность функций из $H(J)$, обращающихся в нуль на границе рассматриваемого отрезка, т.е.

$$H_0(J) = \{u \in H : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Экстремалью функционала Φ назовём функцию u из $H(J)$, удовлетворяющую равенству

$$\Phi'(u)h = 0 \quad \text{для всех } h \in H_0(J). \quad (1)$$

Равенство (1) называют уравнением Эйлера (в интегральной форме). Если p , Q , F – функции класса $C^1(J)$ и $q = Q'$, $f = F'$, то уравнение Эйлера сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}(u) := -(pu')' + qu = f; \quad (2)$$

в этом случае экстремали функционала Φ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению (2).

В принятых выше предположениях относительно функций p , Q , F будет использоваться символическая запись уравнения Эйлера (1)

$$\mathcal{L}(u) := -(pu')' + Q'u = F',$$

лишь внешне напоминающая уравнение (2). В этом случае экстремали функционала Φ могут не принадлежать классу $C^1(J)$. Прямые методы вариационного исчисления позволяют установить существование экстремалей, принадлежащих пространству $H(J)$. Вместе с тем удаётся установить определённую повышенную гладкость экстремалей.

Представим функцию Q в жордановой форме $Q(x) = Q^+(x) - Q^-(x)$, где $Q^+(x) = V_a^x Q$. Введём в рассмотрение возрастающую функцию $Q_1(x) = Q^+(x) + Q^-(x) = 2V_a^x - Q(x)$. Установим оценки решений u уравнения Эйлера (1).

Лемма 1. Для любой экстремали и функционала Φ имеет место оценка

$$\bar{V}(pu', J) \leq \int_a^b |u(x)| dQ_1(x) + V_a^b F. \quad (3)$$

Доказательство. Введём в рассмотрение множество $\mathcal{M} = \{h \in C_0^1(J) : |h(x)| \leq 1\}$. Для любой функции h из $\mathcal{M}$ справедливо равенство (1), влекущее за собой соотношение

$$\int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx = \int_a^b u(x)h(x) dQ(x) - \int_a^b h(x) dF(x).$$

Очевидно, что

$$\left| \int_a^b u(x)h(x) dQ(x) - \int_a^b h(x) dF(x) \right| \leq \int_a^b |u(x)| dQ_1(x) + V_a^b F.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от выбора функции h из $\mathcal{M}$, из чего следует требуемая оценка

$$\bar{V}(pu', J) = \sup_{h \in \mathcal{M}} \int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx \leq \int_a^b |u(x)| dQ_1(x) + V_a^b F.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любой экстремали и функционала Φ имеет место оценка

$$\|u; \mathcal{E}(J)\| \leq k \left(\int_a^b |u(x)| dQ_1(x) + V_a^b F + \|u; L(J)\| \right), \quad (4)$$

в которой k – постоянная, при которой выполняется неравенство $\|u; \mathcal{E}(J)\| \leq k\|u\|_0$ для всех $u \in \mathcal{E}(J)$.

Лемма 2 очевидным образом следует из неравенства (3).

Оценки типа (3), (4) именуют *неравенствами коэрцитивности*. Заменяя в (4) отрезок $J = [a, b]$ отрезком $I = [x_1, x_2] \subset J$, приходим к неравенству

$$\bar{V}(pu', I) \leq \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| dQ_1(x) + V_{x_1}^{x_2} F. \quad (5)$$

Если, например, отрезки I стягиваются к точке x_0 , а функции Q и F непрерывны в этой точке, то правая часть неравенства (5) стремится к нулю, поэтому верно соотношение

$$\lim_{I \rightarrow x_0} \bar{V}(pu'; I) = 0,$$

из которого вытекает непрерывность функции $p(x)u'(x)$ в точке x_0 . Это замечание применимо, в частности, к случаям $x_0 = a$ и $x_0 = b$. Таким образом, функция $u'(x)$ непрерывна в точках a и b .

Для функций, удовлетворяющих дополнительным граничным условиям, можно установить оценки, аналогичные (3), (4), но не содержащие функции u в правой части. Такого рода

оценки доказаны, например, для однородной задачи Коши или для задачи Дирихле [1, гл. 3]. Для достаточно обширного класса функций F ниже найдены внутренние оценки функции u .

Обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ клин экстремалей функционала Φ с возрастающей функцией F . Лезвие клина $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ совпадает с двумерным пространством $\text{Ker}(\mathcal{L})$ решений однородного уравнения $\mathcal{L}(w) = 0$. Для элементов клина $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ верны неравенства, имеющие характер внутренних оценок экстремалей функционала Φ .

Введём возрастающие функции

$$p_1(x) = 2V_a^x p - p(x), \quad Q_1(x) = 2V_a^x Q - Q(x), \quad \mu(x) = x + p_1(x) + Q_1(x).$$

Для непрерывной на отрезке $[c, d] \subset J$ функции g справедливы неравенства

$$\left| \int_c^d g(x) dp(x) \right| \leq \int_c^d |g(x)| dp_1(x), \quad \left| \int_c^d g(x) dQ(x) \right| \leq \int_c^d |g(x)| dQ_i(x).$$

Далее используется обозначение

$$\|u; L(J, \mu)\| = \int_a^b |u(x)| d\mu(x).$$

Теорема 1. Для любого отрезка $J_\delta = [a + \delta, b - \delta]$ ($0 < 2\delta < b - a$) существует такая константа $c_0(\delta)$, что для всех функций u из $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ имеет место оценка

$$\|u; \mathcal{E}(J_\delta)\| \leq c_0(\delta) \|u; L(J, \mu)\|. \quad (6)$$

Доказательство. Зафиксируем функцию u из $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ и построим связанную с u срезающую функцию h класса $H_0(J)$. Положим для краткости $a_1 = a + \delta$, $b_1 = b - \delta$.

Разобьём каждый из отрезков $[a, a_1]$ и $[b_1, b]$ на три равные части, которые обозначим через I_1 , I_2 , I_3 и I_4 , I_5 , I_6 соответственно (длина каждого из них равна $\delta/3$). Подберём числа

$$x_1 \in I_1, \quad x_2 \in I_3, \quad x_3 \in I_4, \quad x_4 \in I_6 \quad (7)$$

таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} |u(x_1)| &\leq \frac{3}{\delta} \int_{I_1} |u(x)| dx, & |u(x_2)| &\leq \frac{3}{\delta} \int_{I_3} |u(x)| dx, \\ |u(x_3)| &\leq \frac{3}{\delta} \int_{I_4} |u(x)| dx, & |u(x_4)| &\leq \frac{3}{\delta} \int_{I_6} |u(x)| dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Из включений (7) вытекают неравенства $3(x_2 - x_1) \geq \delta$, $3(x_4 - x_3) \geq \delta$.

Обозначим через $h(x)$ функцию, определённую на отрезке $J = [a, b]$ и имеющую графиком ломаную линию, последовательно соединяющую точки $(a, 0)$, $(x_1, 0)$, $(x_2, 1)$, $(x_3, 1)$, $(x_4, 0)$, $(b, 0)$. Таким образом, функция $h(x)$ равна единице на отрезке $[x_2, x_3]$, нулю – на отрезках $[a, x_1]$ и $[x_4, b]$, линейна на каждом из отрезков $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$. Как нетрудно видеть, функция h принадлежит пространству $H_0(J)$.

Поскольку $\Phi'(u)h = 0$, то справедливо соотношение

$$\int_a^b h(x) dF(x) = \int_a^b u(x)h(x) dQ(x) + \int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx. \quad (9)$$

Оценим интеграл в левой части этого соотношения снизу, а интегралы в правой его части сверху. Так как функция h неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и $h(x) = 1$ при $x \in [a_1, b_1]$, то

$$\int_a^b h(x) dF(x) \geq \int_{a_1}^{b_1} 1 dF(x) = F(b_1) - F(a_1). \quad (10)$$

Из определения функции Q_1 вытекает оценка первого интеграла в правой части (9):

$$\left| \int_a^b u(x) h(x) dQ(x) \right| \leq \int_a^b |u(x)| dQ_1(x). \quad (11)$$

Второй интеграл в правой части соотношения (9) равен сумме интегралов:

$$s_1 = \int_{x_1}^{x_2} p(x) u'(x) h'(x) dx \quad \text{и} \quad s_2 = \int_{x_3}^{x_4} p(x) u'(x) h'(x) dx.$$

На интервале (x_1, x_2) производная $h'(x)$ постоянна и равна $(x_2 - x_1)^{-1}$, поэтому

$$s_1 = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} p(x) u'(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(p(x) u(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} u(x) dp(x) \right).$$

Из определения функции $p_1(x)$ вытекает оценка

$$- \int_{x_1}^{x_2} u(x) dp(x) \leq \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| dp_1(x).$$

Неравенства (8) и условие $\bar{p} = \sup\{p(x) : x \in J\} < \infty$ приводят к оценке

$$p(x) u(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \leq \frac{6\bar{p}}{\delta} \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| dx.$$

Установленные оценки влекут за собой неравенство

$$s_1 \leq \frac{1}{\delta} \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| dp_1(x) + \frac{6\bar{p}}{\delta^2} \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| dx.$$

Аналогичное неравенство верно и для интеграла s_2 :

$$s_2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{x_3}^{x_4} |u(x)| dp_1(x) + \frac{6\bar{p}}{\delta^2} \int_{x_3}^{x_4} |u(x)| dx.$$

В итоге приходим к следующей оценке сверху второго интеграла в правой части (9):

$$s_1 + s_2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{J^\delta} |u(x)| dp_1(x) + \frac{6\bar{p}}{\delta^2} \int_{J^\delta} |u(x)| dx; \quad (12)$$

здесь $J^\delta = [a, a + \delta] \cup [b - \delta, b]$.

Из оценок (10)–(12) следует неравенство

$$F(b - \delta) - F(a + \delta) \leq \int_a^b |u(x)| dQ_1(x) + \frac{1}{\delta} \int_{J^\delta} |u(x)| dp_1(x) + \frac{6\bar{p}}{\delta^2} \int_{J^\delta} |u(x)| dx.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться неравенством коэрцитивности (4), заменяя в нём J на J_1 . Следует учесть лишь, что в силу возрастания функции F верно равенство $\|F; BV(J_1)\| = F(b_1) - F(a_1)$. Теорема доказана.

Постоянная $c_0(\delta)$ в неравенстве (6) возрастает при $\delta \rightarrow 0$. Анализируя проведённое выше доказательство, можно показать, что $c_0(\delta) = O(\delta^{-2})$ при $\delta \rightarrow 0$. Сформулируем одно из следствий теоремы 1, имеющее характер нелинейной теоремы вложения [10]. Введём в рассмотрение множество

$$\mathbb{B}_r = \{u \in C(J) : \|u; L(J, \mu)\| \leq r\}.$$

Теорема 2. Пусть $J_\delta = [a + \delta, b - \delta]$ ($0 < 2\delta < b - a$), $0 < r < \infty$. Тогда оператор вложения $\mathcal{K}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_r \rightarrow W_p^1(J_\delta)$ ограничен при $p \in [1, \infty]$ и вполне непрерывен, если $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\mathcal{K}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_r$ ограничено в пространстве $\mathcal{E}(J_\delta)$. Поэтому доказываемое утверждение вытекает из теорем вложения для $\mathcal{E}(J_\delta)$. Теорема доказана.

Приведём пример, показывающий, что в теоремах 1, 2 условие $\delta > 0$ существенно. Пусть $J = [0, 1]$, $\mathcal{L}(u) = -u''$. В этом случае $p(x) \equiv 1$, $Q(x) \equiv 0$, $\mu(x) = 2x$, класс $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ совпадает с классом вогнутых на J функций. При любом $t \in (0, 1)$ имеем

$$f_t(x) = \min \left\{ \frac{x}{t}, \frac{1-x}{1-t} \right\} \in \mathcal{K}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_1;$$

вместе с тем функция $\gamma(t) = V_0^1 f_t = (t(1-t))^{-1}$ неограничена на интервале $(0, 1)$.

В приведённом примере функции $f_t(x)$ удовлетворяют однородному условию Дирихле

$$f_t(0) = f_t(1) = 0.$$

Для других краевых условий ситуация более благополучна; аналогичные теоремам 1, 2 утверждения верны и в случае $\delta = 0$.

3. Дополнительные замечания. Неравенство (7) носит характер внутренних оценок решений дифференциальных неравенств. Для функций, удовлетворяющим некоторым краевым условиям, в работе [3] установлены оценки решений неравенств вплоть до границы. Соответствующие результаты относились к линейным дифференциальным операторам с достаточно регулярными коэффициентами.

Обсудим варианты этих результатов для дифференциальных уравнений с импульсными особенностями. Для большей обобщимости будем рассматривать краевые условия вида

$$p(a)u'(a) - k_1 u(a) = p(b)u'(b) + k_2 u(b) = 0, \quad (13)$$

возникающие при изучении экстремалей функционала Больца $\Phi_1: H \rightarrow \mathbb{R}$, определяемого равенством $\Phi_1(u) = \Phi(u) + (k_1 u^2(a) + k_2 u^2(b))/2$. Функционал Φ_1 дифференцируем по Фреше на пространстве H и имеет место равенство

$$\Phi'_1(u)h = \Phi'(u)h + k_1 u(a)h(a) + k_2 u(b)h(b) \quad (h \in H).$$

Элемент u назовём экстремалью функционала Φ_1 , если

$$\Phi'_1(u)h = 0 \quad \text{для всех } h \in H. \quad (14)$$

В частности, равенство (14) справедливо для h из H_0 . Отсюда следует, что экстремаль u функционала Φ_1 является экстремалью функционала Φ . Можно сказать, что u есть обобщённое решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее в обобщённом же смысле краевому условию (13) – естественному условию для функционала Φ_1 .

Из (14) вытекает равенство

$$\int_a^b h(x) dF(x) = \int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx + \int_a^b u(x)h(x) dQ(x) + k_1 u(a)h(a) + k_2 u(b)h(b).$$

Если h – достаточно гладкая функция, например, $h \in C^2(J)$, то

$$\int_a^b p(x)u'(x)h'(x) dx = u(x)p(x)h'(x)|_a^b - \int_a^b u(x) d(p(x)h'(x)).$$

Таким образом, экстремаль u удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) dF(x) = & - \int_a^b u(x) d(p(x)h'(x)) + \int_a^b u(x)h(x) dQ(x) + \\ & + u(a)(p(a)h'(a) - k_1 h(a)) + u(b)(p(b)h'(b) + k_2 h(b)). \end{aligned} \quad (15).$$

Существование экстремалей функционала Φ_1 устанавливается с помощью прямых методов вариационного исчисления. Стандартным является предположение о неотрицательности коэффициентов k_1, k_2 .

Обозначим через $\mathcal{K}_1(\mathcal{L})$ совокупность экстремалей функционала Φ_1 с возрастающей функцией F .

Теорема 3. Пусть $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$. Тогда существует такая константа $c_1(J)$, что для всех функций u из $\mathcal{K}_1(\mathcal{L})$ имеет место оценка

$$\|u; \mathcal{E}(J)\| \leq c_1(J) \|u; L(J, \mu)\|. \quad (16)$$

Доказательство. Оценка (16) следует из неравенства (15) при специальном выборе функции h . Определим функцию h как решение краевой задачи

$$h''(x) = -1, \quad p(a)h'(a) - k_1 h(a) = p(b)h'(b) + k_2 h(b) = 0.$$

Решение данной краевой задачи единственно и положительно на отрезке $J = [a, b]$ ($h(x) \geq h_0 = \min\{h(a), h(b)\} > 0$). Из соотношения (15) следует неравенство

$$h_0(F(b) - F(a)) \leq \int_a^b h(x) dF(x) \leq - \int_a^b u(x) d(p(x)h'(x)) + \int_a^b u(x)h(x) dQ(x),$$

которое влечёт за собой оценку $V_a^b F = F(b) - F(a) \leq \text{const} \|u; L(J, \mu)\|$. Объединяя эту оценку с оценкой леммы 1, приходим к доказываемому утверждению. Теорема доказана.

Сформулируем вариант теоремы 2.

Теорема 4. Пусть $0 < r < \infty$. Тогда оператор вложения $\mathcal{K}_1(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_r \rightarrow W_p^1(J)$ ограничен при $p \in [1, \infty]$ и вполне непрерывен, если $1 \leq p < \infty$.

Остановимся на дополнительных свойствах клина $\mathcal{K}(\mathcal{L})$, относящихся к специальному классу дифференциальных операторов $\mathcal{L}$. Приведём некоторые определения.

Фундаментальную систему $\{w_1(x), w_2(x)\}$ решений однородного уравнения $\mathcal{L}(w) = 0$ назовём *марковской* на отрезке J , если выполняются следующие два условия: 1) $w_1(x) > 0$ для

любого $x \in J$; 2) функция $z(x) = w_2(x)/w_1(x)$ строго возрастает на J . Условие 2) в этом определении можно заменить требованием положительности определителя:

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} w_1(x_1) & w_2(x_1) \\ w_1(x_2) & w_2(x_2) \end{vmatrix} \quad (a \leq x_1 < x_2 \leq b).$$

Если для оператора $\mathcal{L}$ существует соответствующая марковская система, то будем использовать обозначение $\mathcal{L} \in T_0(J)$. Условие $\mathcal{L} \in T_0(J)$ сужает класс допустимых операторов $\mathcal{L}$, однако допускает эффективную проверку. Здесь полезны признаки неосцилляции, в частности, установленный в [1, с. 151] вариант классической теоремы Валле–Пуссена (см., например, [11, гл. 4]).

Предположение $\mathcal{L} \in T_0(J)$ гарантирует весьма интересные свойства функций класса $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ [1, 11, 12]. Отметим лишь *свойство обобщённой вогнутости* [11, с. 78]: если $u \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, то существует единственное решение $w(x)$ краевой задачи

$$\mathcal{L}(w)(x) = 0, \quad w(x_1) = u(x_1), \quad w(x_2) = u(x_2); \quad (17)$$

при этом верно неравенство $u(x) > w(x)$ для любого $x \in (x_1, x_2)$.

Обозначим через $[A, B]$ область значений строго возрастающей на $[a, b]$ функции $z(x) = w_2(x)/w_1(x)$. При любом $t \in [A, B]$ уравнение $z(x) = t$ имеет единственное решение $x = g(t)$; определяемая таким образом функция g строго возрастает и непрерывна на отрезке $[A, B]$.

Теорема 5. Пусть $w_1(x), w_2(x)$ ($x \in J$) – марковская система решений уравнения $\mathcal{L}(w) = 0$. Тогда включение $u \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$ эквивалентно строгой вогнутости на $[A, B]$ функции

$$F(t) = \frac{u(g(t))}{w_1(g(t))}. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$ и $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$. Обозначим через w решение краевой задачи (17). Тогда найдутся такие числа λ_1, λ_2 , что имеют место соотношения

$$u(x) > w(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x),$$

$$u(x_1) = w(x_1) = \lambda_1 w_1(x_1) + \lambda_2 w_2(x_1), \quad u(x_2) = w(x_2) = \lambda_1 w_1(x_2) + \lambda_2 w_2(x_2).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{vmatrix} w_1(x_1) & w_2(x_1) & u(x_1) \\ w_1(x_2) & w_2(x_2) & u(x_2) \\ w_1(x) & w_2(x) & u(x) \end{vmatrix} = (u(x) - w(x)) \mathcal{D} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} > 0. \quad (19)$$

Введём в рассмотрение функцию $v(x) = u(x)/w_1(x)$ ($x \in J$). Из неравенства (19) следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & z(x_1) & v(x_1) \\ 1 & z(x_2) & v(x_2) \\ 1 & z(x) & v(x) \end{vmatrix} > 0 \quad (a \leq x_1 < x < x_2 \leq b).$$

Положим $t = z(x)$, $t_1 = z(x_1)$, $t_2 = z(x_2)$. С учётом этих обозначений приходим к неравенству

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & F(t_1) \\ 1 & t_2 & F(t_2) \\ 1 & t & F(t) \end{vmatrix} > 0 \quad (A \leq t_1 < t < t_2 \leq B),$$

из которого вытекает, что включение $u \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$ влечёт за собой строгую вогнутость функции $F(t)$.

Верно и обратное утверждение. Для его доказательства следует провести рассуждения в обратном порядке. Теорема доказана.

Равенство (18) означает, что обобщённая вогнутость эквивалентна обычной вогнутости некоторой суперпозиции.

Следствие. В условиях теоремы 5 функция $u(x)$ допускает представление

$$u(x) = F\left(\frac{w_2(x)}{w_1(x)}\right)w_1(x).$$

В общем случае условие $\mathcal{L} \in T_0(J)$ может не выполняться. Однако для любой точки $x_0 \in J$ существует такой отрезок J_1 положительной длины, что $x_0 \in J_1$ и $\mathcal{L} \in T_0(J_1)$. Следовательно, функции класса $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ локально являются обобщённо вогнутыми.

В ряде мест работы использовалась самосопряжённость дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Как полагает автор, данное предположение не является принципиальным для большинства результатов. Оно принято лишь для упрощения изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Базтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009.
2. *Малышев В.А.* Оценки производных n -выпуклых функций // Зап. науч. семинара ПОМИ. 1996. Т. 232. С. 123–133.
3. *Климов В.С., Павленко А.Н.* Нетривиальные решения краевых задач с сильными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1676–1682.
4. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1034–1044.
5. *Лионс Ж.Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
6. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
7. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
8. *Матвеев В.А.* О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30. № 6. С. 1397–1419.
9. *Souček J.* Spaces of functions on domain Ω , whose k -th derivatives are measures defined on $\bar{\Omega}$ // Časopis Pest. Mat. 1972. V. 97. P. 10–46.
10. *Малышев В.А.* Нелинейные теоремы вложения // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 6. С. 1–38.
11. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965.
12. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 06.10.2020 г.
После доработки 14.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.