ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 306–312

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА, ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. К. С. Лапин

С использованием метода вектор-функций Ляпунова и метода направляющих функций получены достаточные условия существования ограниченных по Пуассону и достаточные условия существования частично ограниченных по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S037406412103002X

Применение метода функций Ляпунова [1] к исследованию ограниченности решений дифференциальных систем приведено в работе [2], а его применение к исследованию ограниченности решений относительно части переменных – в монографии [3, с. 223–228]. Обобщение метода функций Ляпунова – метод вектор-функций Ляпунова – изложено в монографиях [4, 5], и в [5] дано приложение метода вектор-функций Ляпунова к выводу условий, обеспечивающих ограниченность всех решений произвольной нелинейной системы. Независимо от методов работы [2] в монографии [6], основываясь на технике вращений векторных полей, был разработан метод направляющих функций, при помощи которого в [6] получены достаточные условия существования ограниченных на всей числовой прямой решений произвольной нелинейной системы.

С другой стороны, в недавних работах автора (см., например, [7]) начато изучение нового вида ограниченности решений – их ограниченности по Пуассону. Понятие ограниченности по Пуассону на полуоси решения состоит в том, что в фазовом пространстве найдутся такой шар и на временнóй полуоси такая счётная система непересекающихся интервалов, последовательность правых концов которых стремится к $+\infty$, что решение при всех значениях времени, принадлежащих этим интервалам, содержится в данном шаре. Очевидно, что ограниченное решение является ограниченным по Пуассону; обратное, как несложно видеть, не верно. В работах автора изучены условия, при выполнении которых все решения дифференциальной системы являются ограниченными по Пуассону.

Настоящая работа посвящена разработке метода исследования условий существования ограниченных по Пуассону решений, который представляет собой синтез метода вектор-функций Ляпунова и метода направляющих функций. При помощи этого метода в работе получены достаточные условия существования ограниченных по Пуассону решений (теорема 1), а также существования частично ограниченных (ограниченных по части переменных) по Пуассону решений (теорема 2). Перейдём теперь к точным определениям и формулировкам.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad F(t,x) = (F_1(t,x),\ldots,F_n(t,x))^{\mathrm{T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad n \geqslant 2, \qquad (1)$$

где $F\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, будем предполагать, что все решения системы (1) продолжимы на всю временнýю полуось $\mathbb{R}_+$.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Решение $x = x(t)$ системы (1) с начальным условием $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ обозначается через $x(t, t_0, x_0)$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ такую, что $\lim\limits_{i\to+\infty} \tau_i = +\infty$, далее будем называть *$\mathcal{P}$-последовательностью.*

Напомним [2], что решение $x = x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется *ограниченным*, если существует такое число $\beta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$.

Определение 1. Решение $x = x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется *ограниченным по Пуассону*, если найдутся такие $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и число $\beta > 0$, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\|x(\tau_i,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$.

Очевидно, что если решение системы (1) является ограниченным, то оно будет и ограниченным по Пуассону, поскольку в этом случае в качестве требуемой $\mathcal{P}$-последовательности можно взять любую $\mathcal{P}$-последовательность. Также очевидно, что, при необходимости увеличивая число β, неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$ для ограниченного по Пуассону решения можно считать выполненным при всех t, принадлежащих некоторой последовательности интервалов, правые концы которых стремятся к $+\infty$, как это сказано выше. Поэтому приведённое определение равносильно определению ограниченного по Пуассону решения, данному в работе [8].

Напомним, следуя [4, с. 46–48], необходимые в дальнейшем сведения о вектор-функциях Ляпунова. Пусть задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad V(t,x) = (V_1(t,x),\ldots,V_k(t,x))^{\text{т}}, \quad k \geqslant 1.$$

Производная в силу системы (1) этой вектор-функции определяется равенством

$$\dot V(t,x) = (\dot V_1(t,x),\ldots,\dot V_k(t,x))^{\text{т}},$$

где $\dot V_i(t,x)$ – производная в силу системы (1) функции $V_i(t,x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Далее для векторов $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_k)^{\text{т}}$, $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_k)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^k$ запись $\xi \leqslant \eta$ означает, что $\xi_i \leqslant \eta_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$. Будем говорить [3, с. 235], что непрерывная вектор-функция

$$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad f(t,\xi) = (f_1(t,\xi),\ldots,f_k(t,\xi))^{\text{т}}, \quad k \geqslant 1,$$

удовлетворяет *условию Важевского,* если для каждого $1 \leqslant s \leqslant k$ функция f_s не убывает по переменным $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_{s-1}, \ \xi_{s+1}, \ \ldots, \ \xi_k$, т.е. из $\xi_i \leqslant \eta_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $i \ne s$, $\xi_s = \eta_s$ следует $f_s(t,\xi) \leqslant f_s(t,\eta)$. Если f удовлетворяет условию Важевского, то это будем обозначать как $f \in$ $\in W$. Отметим, что при $k = 1$ условие $f \in W$ вырождается, поэтому для любой непрерывной функции $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ условимся считать, что $f \in W$.

Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющая для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$ условию $V(t,x) \geqslant 0$, где 0 – нулевой вектор в $\mathbb{R}^k$, и система

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t,\xi), \quad f \in W, \tag{2}$$

называются соответственно *вектор-функцией Ляпунова* и *системой сравнения* для системы (1), если выполнено следующее условие: $\dot V(t,x) \leqslant f(t,V(t,x))$. Далее всегда будем предполагать, что правая часть системы (2) удовлетворяет локальному условию Липшица по ξ и, кроме того, решения этой системы продолжимы на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Так как для системы (2) имеет место единственность решения задачи Коши, то из теоремы Важевского (см., например, [3, с. 236]) следует, что для любой точки $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1), вектор-функция Ляпунова $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и решение $\xi(t,t_0,V(t_0,x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) связаны между собой при всех $t \geqslant t_0$ следующим неравенством:

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant \xi(t,t_0,V(t_0,x_0)). \tag{3}$$

Напомним теперь необходимые понятия и конструкции, связанные с вращениями векторных полей и операторами сдвига по траекториям [6] (см. также [9]). Пусть Ω – любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. Непрерывным векторным полем или, более кратко, векторным полем Q на Ω будем называть, следуя [6], любое непрерывное отображение $Q\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Для векторного поля Q на Ω рассмотрим его ограничение на $\partial\Omega$, т.е. рассмотрим векторное поле $Q|_{\partial\Omega}\colon \partial\Omega \subset \Omega \to \mathbb{R}^n$. Векторное поле Q на Ω называется *невырожденным* на $\partial\Omega$, если $Q(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ для всех $x \in \partial\Omega$. Легко видеть, что любое невырожденное на $\partial\Omega$ векторное поле Q определяет непрерывное отображение

$$T\colon \partial\Omega \to S^{n-1} = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\| = 1\}, \quad T(x) = Q(x)/\|Q(x)\|, \quad x \in \partial\Omega.$$

Вращением $\gamma(Q, \partial\Omega)$ невырожденного на $\partial\Omega$ векторного поля Q называется степень $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ отображения $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$. В случае, когда компактное подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ является n-мерным гладким ориентируемым многообразием с краем $\partial\Omega$ (см., например, [10]), целое число $\deg(T)$ легко определяется, например, при помощи функтора $H_{n-1}(-;\mathbb{Z})$ сингулярных $(n-1)$-мерных гомологий топологических пространств с целыми коэффициентами [11]. Действительно, непрерывное отображение $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$ индуцирует гомоморфизм групп сингулярных гомологий $H_{n-1}(T;\mathbb{Z})\colon H_{n-1}(\partial\Omega;\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$. Хорошо известно (см., например, [11]), что группы $H_{n-1}(\partial\Omega;\mathbb{Z})$ и $H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ изоморфны группе $\mathbb{Z}$ и образующими этих групп являются, соответственно, фундаментальные классы $[\partial\Omega]$ и $[S^{n-1}]$ многообразий $\partial\Omega$ и S^{n-1}. При помощи гомоморфизма групп $H_{n-1}(T;\mathbb{Z})$ и фундаментальных классов $[\partial\Omega]$ и $[S^{n-1}]$ степень отображения $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ определяется по следующему правилу:

$$H_{n-1}(T;\mathbb{Z})([\partial\Omega]) = \deg(T)[S^{n-1}].$$

В общем случае, т.е. в случае, когда Ω является произвольным компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$, определение степени $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ отображения $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$ детально описано в монографии [9, с. 9–29].

Далее будем использовать следующую терминологию. Подмножество

$$\mathrm{Tr}\,(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, 0, x_0), \quad t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $x(t, 0, x_0)$ – решение системы (1) и x_0 – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$, будем называть *траекторией* системы (1), *выходящей из точки* x_0. Рассмотрим для любого фиксированного $\tau > 0$ непрерывное отображение

$$U(\tau)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad U(\tau)(x_0) = x(\tau, 0, x_0),$$

где $x(t, 0, x_0)$ – решение системы (1) и x_0 – произвольная точка из Ω. Отображение $U(\tau)$ называется [6, с. 11–12] *оператором сдвига по траекториям* системы (1) за время $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Точкой *$\tau$-невозвращаемости* траектории системы (1) называется [6, с. 101] такая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что для решения $x(t, 0, x_0)$ системы (1) выполнено условие $x(t, 0, x_0) \neq x_0$ при всех $0 < t \leqslant \tau$.

Рассмотрим векторное поле

$$S_0\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad S_0(x) = -F(0, x),$$

где $F(t, x)$ – правая часть системы (1). Вращение $\gamma(S_0, \partial\Omega)$ этого векторного поля тесно связано с задачей о существовании неподвижных точек оператора $U(\tau)$ сдвига по траекториям системы (1). Действительно, в [6, с. 102–104] показано, что если невырожденное на $\partial\Omega$ векторное поле $S_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет вращение $\gamma(S_0, \partial\Omega) \neq 0$ и все точки границы $\partial\Omega$ являются точками τ-невозвращаемости траекторий системы (1), то оператор $U(\tau)$ сдвига по траекториям системы (1) имеет внутри Ω по крайней мере одну неподвижную точку, т.е. такую точку $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$, что $U(\tau)(x) = x$. Далее будем использовать следующую терминологию. Подмножества

$$\mathrm{Tr}^+(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, t_0, x_0), \quad t > t_0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\mathrm{Tr}^-(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, t_0, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $x(t, t_0, x_0)$ – решение системы (1) и (t_0, x_0) – любая точка из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, будем называть соответственно *правой частью* и *левой частью* траектории $\mathrm{Tr}\,(x(0, t_0, x_0))$ системы (1).

В терминах вектор-функций Ляпунова и вращений векторных полей сформулируем и докажем следующее достаточное условие существования у системы (1) ограниченных по Пуассону решений.

Предложение 1. *Пусть для системы (1) существуют* $\mathcal{P}$*-последовательность* $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *вектор-функция Ляпунова* $V\colon \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ *с системой сравнения (2) и неубывающая функция* $b\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, *обладающая свойством* $b(r)\to+\infty$ *при* $r\to+\infty$, *такие, что при любых* $x\in\mathbb{R}^n$ *и* $i\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$b(\|x\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x). \tag{4}$$

Кроме того, пусть для системы сравнения (2) выполнены следующие условия:

1) существует компактное в $\mathbb{R}^k$ *подмножество* $\Omega\subset\mathrm{Im}\,(V\colon\{0\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k)$, *для которого векторное поле* $S_0:\Omega\to\mathbb{R}^k$, $S_0(\xi)=-f(0,\xi)$, *где* $f(t,\xi)$ *– правая часть системы сравнения (2), является невырожденным на* $\partial\Omega$ *и* $\gamma(S_0,\partial\Omega)\neq0$,

2) для любого $\xi_0\in\partial\Omega$ *правая часть* $\mathrm{Tr}^+(\xi_0,t_0)$ *траектории* $\mathrm{Tr}\,(\xi(0,t_0,\xi_0))$ *системы сравнения (2) не имеет в* Ω *общих точек с левой частью* $\mathrm{Tr}^-(\xi_0,t_0)$ *этой траектории.*

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $m\in\mathbb{N}$ оператор $U(m)\colon\Omega\to\mathbb{R}^k$ сдвига по траекториям системы сравнения (2) для системы (1) за время $0\leqslant t\leqslant m$. Так как по условию для любого $(t_0,\xi_0)\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega$ пересечение $\mathrm{Tr}^+(t_0,\xi_0)\bigcap\mathrm{Tr}^-(t_0,\xi_0)\bigcap\Omega$ пусто, то для любого $m\in\mathbb{N}$ все точки границы $\partial\Omega$ являются точками m-невозвращаемости траекторий системы (2). Из этого, как сказано выше, следует, что для каждого $m\in\mathbb{N}$ оператор $U(m)$ имеет неподвижную точку $\vartheta_m\in\Omega\setminus\partial\Omega$.

Рассмотрим семейство решений $\{\xi(t,0,\vartheta_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ системы (2). Из условий доказываемой теоремы следует, что $\xi(t,0,\vartheta_m)\in\Omega\setminus\partial\Omega$ при любом $0\leqslant t\leqslant m$. Действительно, если предположить противное, то для некоторой точки $\xi_0=x(t_0,0,\vartheta_m)\in\mathrm{Tr}\,(\vartheta_m)$, где $0<t_0<m$ и $\xi_0\in\partial\Omega$, будем иметь

$$\mathrm{Tr}^+(t_0,\xi_0)\bigcap\mathrm{Tr}^-(t_0,\xi_0)\bigcap\Omega=\{\vartheta_m\}\neq\varnothing,$$

что противоречит условиям теоремы.

Рассмотрим в $\Omega\setminus\partial\Omega$ последовательность точек $(\vartheta_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Пользуясь тем, что множество Ω компактно, выберем из последовательности $(\vartheta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ подпоследовательность $(\vartheta_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторой точке $\mu\in\Omega$. Покажем, что для решения $\xi(t,0,\mu)$ системы (2) при всех $t\geqslant0$ выполнено условие $\xi(t,0,\mu)\in\Omega$. Предположим противное, т.е. что найдётся число $\eta\geqslant0$, для которого $\xi(\eta,0,\mu)\notin\Omega$. Так как для системы (2) выполнены условия теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий (см., например, [12]), то для достаточно больших i будем иметь $\xi(\eta,0,\vartheta_{m_i})\notin\Omega$, где $\eta\leqslant m_i$. Получено противоречие с включением

$$\xi(t,0,\vartheta_{m_i})\in\Omega\setminus\partial\Omega\subset\Omega\quad\text{при всех}\quad0\leqslant t\leqslant m_i.$$

Таким образом, показано, что $\xi(t,0,\mu)\in\Omega$ для любых $t\geqslant0$. Так как множество Ω компактно в $\mathbb{R}^k$, то в $\mathbb{R}^k$ найдётся такой шар радиуса $\alpha>0$ с центром в нуле, что Ω содержится в этом шаре и, следовательно, для всех $t\geqslant0$ справедливо неравенство $\|\xi(t,0,\mu)\|\leqslant\alpha$.

Покажем теперь, что система (1) имеет ограниченное по Пуассону решение $x(t,0,x_0)$ для некоторого $x_0\in\mathbb{R}^n$. Так как по условию $\Omega\subset\mathrm{Im}\,(V:\{0\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k)$, то найдётся такая точка $(0,x_0)\in\{0\}\times\mathbb{R}^n$, что $V(0,x_0)=\mu$. Пользуясь условием (4) и неравенством (3), получаем для решения $x(t,0,x_0)$ системы (1) и решения $\xi(t,0,V(0,x_0))$ системы сравнения (2) неравенства

$$b(\|x(\tau_i,0,x_0)\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x(\tau_i,0,x_0))\leqslant\sum_{q=1}^{k}\xi_q(\tau_i,0,V(0,x_0)),$$

справедливые при всех $i\in\mathbb{N}$. Кроме того, для любого $t\geqslant0$ имеем очевидные неравенства

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i(t,0,V(0,x_0))\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\xi_i(t,0,V(0,x_0))|\leqslant k\|\xi(t,0,V(0,x_0))\|.$$

Так как $V(0,x_0)=\mu$, то $\|\xi(t,0,V(0,x_0))\|\leqslant\alpha$ при всех $t\geqslant 0$. Из этого, а также из указанных выше неравенств вытекает, что при всех $i\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $b(\|x(\tau_i,0,x_0)\|)\leqslant k\alpha$. Пользуясь условием $b(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$ и тем, что число $k\alpha$ фиксировано, выберем такое число $\beta>0$, чтобы $k\alpha\leqslant b(\beta)$. Отсюда для всех $i\in\mathbb{N}$ получаем неравенство $b(\|x(\tau_i,0,x_0)\|)\leqslant b(\beta)$, из которого, поскольку функция $b\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ является неубывающей, следует, что $\|x(\tau_i,0,x_0)\|\leqslant\beta$ при всех $i\in\mathbb{N}$. Таким образом, показано, что решение $x(t,0,x_0)$ системы (1) ограничено по Пуассону. Предложение доказано.

Пусть заданы произвольные натуральные числа $n\geqslant 2$ и $1\leqslant m<n$. Для любого фиксированного элемента $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ и соответствующего ему решения $x(t,t_0,x_0)=(x_1(t,t_0,x_0),\ldots,x_n(t,t_0,x_0))^{\mathrm{т}}$ системы (1) рассмотрим отображение

$$y\colon\mathbb{R}_+\times\{(t_0,x_0)\}\to\mathbb{R}^m,\quad y(t,t_0,x_0)=(x_1(t,t_0,x_0),\ldots,x_m(t,t_0,x_0))^{\mathrm{т}}.$$

Напомним [3], что решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется *y-ограниченным*, если существует такое число $\beta>0$, что для всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено условие $\|y(t,t_0,x_0)\|\leqslant\beta$.

Определение 2. Решение $x=x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется *y-ограниченным по Пуассону*, если найдутся такие $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и число $\beta>0$, что при всех $i\in\mathbb{N}$ выполнено условие $\|y(\tau_i,t_0,x_0)\|\leqslant\beta$.

Очевидно, что если решение системы (1) является y-ограниченным, то оно будет и y-ограниченным по Пуассону, поскольку в этом случае в качестве требуемой $\mathcal{P}$-последовательности можно взять любую $\mathcal{P}$-последовательность. Несложно видеть, что приведённое определение равносильно определению y-ограниченного по Пуассону решения, данному в работе [8].

Следующее утверждение является достаточным условием существования у системы (1) y-ограниченных по Пуассону решений.

Предложение 2. *Пусть выполнены все условия предложения 1 с заменой неравенства (4) неравенством*

$$b(\|y\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x).\tag{5}$$

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно y-ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 1 и заменяя неравенство (4) неравенством (5), получаем неравенство

$$b(\|y(\tau_i,0,x_0)\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x(\tau_i,0,x_0))\leqslant\sum_{q=1}^{k}\xi_q(\tau_i,0,V(0,x_0)),\quad i\in\mathbb{N}.$$

После этого, дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 1 с заменой $x(t,0,x_0)$ на $y(t,0,x_0)$, получаем при всех $i\in\mathbb{N}$ требуемое неравенство $\|y(\tau_i,0,x_0)\|\leqslant\beta$. Таким образом, показано, что решение $x(t,0,x_0)$ системы (1) y-ограничено по Пуассону. Предложение доказано.

Напомним теперь необходимые сведения о направляющих функциях и их индексах [6]. Непрерывно дифференцируемая функция $G\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ называется *направляющей функцией* или, более точно, *r_0-направляющей функцией* для системы (1), если выполнено следующее условие:

$$(\operatorname{grad}G(x),F(t,x))>0,\quad t\geqslant 0,\quad \|x\|\geqslant r_0.\tag{6}$$

Рассмотрим векторное поле $\operatorname{grad}G\colon B^n(r_0)\to\mathbb{R}^n$, где $B^n(r_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leqslant r_0\}$. Из условия (6) видно, что векторное поле $\operatorname{grad}G\colon B^n(r_0)\to\mathbb{R}^n$ является невырожденным на $\partial B^n(r_0)$ и, следовательно, определено вращение $\gamma(\operatorname{grad}G,\partial B^n(r_0))$ этого векторного поля. В монографии [6, с. 90–91] показано, что если для любого $r>r_0$ рассмотреть соответствующее векторное поле $\operatorname{grad}G\colon B^n(r)\to\mathbb{R}^n$, которое, очевидно, является невырожденным на $\partial B^n(r)$, то имеет место равенство вращений $\gamma(\operatorname{grad}G,\partial B^n(r))=\gamma(\operatorname{grad}G,\partial B^n(r_0))$. *Индексом* r_0-направляющей функции G для системы (1) называется целое число $\operatorname{ind}(G)$, определяемое формулой

$$\operatorname{ind}(G)=\gamma(\operatorname{grad}G,\partial B^n(r_0))=\gamma(\operatorname{grad}G,\partial B^n(r)),\quad r>r_0.$$

В [6, с. 110–111] показано, что если для системы (1) имеется r_0-направляющая функция G, то для любого $r \geqslant r_0$ вращение векторного поля $S_0\colon B(r) \to \mathbb{R}^n$, $S_0(x) = -F(0,x)$, где $F(t,x)$ – правая часть системы (1), и индекс r_0-направляющей функции G связаны между собой равенством

$$\gamma(S_0, \partial B^n(r)) = (-1)^n \operatorname{ind} G.$$

Неограниченной r_0-направляющей функцией для системы (1) называется любая r_0-направляющая функция G для этой системы, которая удовлетворяет условию $G(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$. В [6, с. 111–113] показано, что для любой неограниченной r_0-направляющей функции G для системы (1) имеет место равенство $\operatorname{ind}(G) = 1$. Из этого следует, что если для системы (1) имеется неограниченная r_0-направляющая функция, то вращение указанного выше векторного поля $S_0\colon B^n(r) \to \mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле $\gamma(S_0, \partial B^n(r)) = (-1)^n$.

В терминах вектор-функций Ляпунова и направляющих функций сформулируем и докажем следующее достаточное условие существования у системы (1) ограниченных по Пуассону решений.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, неубывающая функция $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которой $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, и вектор-функция Ляпунова $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ с системой сравнения (2) такие, что при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (4). Кроме того, пусть существуют числа $r_1 > r_0$ и неограниченная r_0-направляющая функция G для системы*

$$\frac{d\varrho}{dt} = g(t,\varrho), \quad (t,\varrho) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k, \quad g(t,\varrho) = f(t, \varrho + \overline{r}_1), \quad \overline{r}_1 = (r_1, \ldots, r_1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k, \tag{7}$$

где $f(t,\xi)$ – правая часть системы (2), и при этом число r_1 удовлетворяет следующими условиями:

1) $G(\varrho) \geqslant M_0$ при всех $\varrho \in \mathbb{R}^k$, $\|\varrho\| = r_1$, где $M_0 = \max\limits_{\|\varrho\|\leqslant r_0} G(\varrho)$;

2) $B^k_{\overline{r}_1}(r_1) = \{\xi \in \mathbb{R}^k \,|\, \|\xi - \overline{r}_1\| \leqslant r_1\} \subset \operatorname{Im}(V\colon \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k)$.

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $L_0\colon B^k(r_1) \to \mathbb{R}^k$, определяемое формулой $L_0(\varrho) = -g(0,\varrho)$, где $g(t,\varrho)$ – правая часть системы (7). Из сказанного выше следует равенство $\gamma(L_0, \partial B^k(r_1)) = (-1)^k$. Таким образом, $\gamma(L_0, \partial B^k(r_1)) \neq 0$.

Покажем, что какова бы ни была точка $\varrho_0 \in \partial B^k(r_1)$, правая часть $\operatorname{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ траектории $\operatorname{Tr}(\varrho(0, t_0, \varrho_0))$ системы (7) не имеет в $B^k(r_1)$ общих точек с левой частью $\operatorname{Tr}^-(\varrho_0, t_0)$ этой траектории. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = G(\varrho(t, t_0, \varrho_0))$, $t \geqslant 0$, и её производную

$$\varphi'(t) = \frac{d(G(\varrho(t,t_0,\varrho_0))}{dt} = (\operatorname{grad} G(\varrho(t,t_0,\varrho_0)), g(t, \varrho(t,t_0,\varrho_0))), \quad t \geqslant 0.$$

Так как G является r_0-направляющей функцией для системы (7), то $\varphi'(t) > 0$ для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$. Очевидно, что $\varphi(t_0) = G(\varrho_0) \geqslant M_0$ и $\varphi(t) \leqslant M_0$ для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \leqslant r_0$. Кроме того, очевидно, что $\varphi(t)$ – возрастающая функция для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$. Из этого вытекает, что для любой точки $\varrho(t,t_0,\varrho_0) \in \operatorname{Tr}^-(\varrho_0,t_0)$ справедливо неравенство $\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0)$.

Покажем теперь, что если $\varrho(t,t_0,\varrho_0) \in \operatorname{Tr}^+(\varrho_0,t_0)$, то имеет место неравенство

$$\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| > r_0.$$

Предположим противное, т.е. что для некоторого $t_1 > t_0$ выполнено условие $\|\varrho(t_1,t_0,\varrho_0)\| \leqslant r_0$ и, следовательно, имеет место неравенство $\varphi(t_1) \leqslant M_0$. Так как $\varphi(t_0) \geqslant M_0$ и $\varphi'(t_0) > 0$, то найдётся такое $t_0 < t' < t_1$, что $\varphi(t') > M_0$ и, следовательно, $\|\varrho(t',t_0,\varrho_0)\| > r_0$. Из этого в силу непрерывности функции $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\|$ следует, что найдётся $t' < t_2 \leqslant t_1$, для которого $\|\varrho(t_2,t_0,\varrho_0)\| = r_0$ и $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$ при $t' < t \leqslant t_2$. Очевидно, что $\varphi(t_2) \leqslant M_0$, поскольку $\|\varrho(t_2,t_0,\varrho_0)\| = r_0$. Поскольку $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$ для $t' \leqslant t \leqslant t_2$, то $\varphi'(t) > 0$ при $t' \leqslant t \leqslant t_2$ и, значит, $\varphi(t') < \varphi(t_2)$. Из этого получаем $\varphi(t_2) > M_0$, что противоречит указанному выше неравенству $\varphi(t_2) \leqslant M_0$. Таким образом, для любой точки $\varrho(t, t_0, \varrho_0) \in \mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ имеем $\|\varrho(t, t_0, \varrho_0)\| > r_0$.

Отсюда получаем, что $\varphi'(t) > 0$ при $t > t_0$ и, следовательно, $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ при $t > t_0$. Итак, $\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ при $t > t_0$. Это означает, что правая часть $\mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ траектории $\mathrm{Tr}\,(\varrho(0, t_0, \varrho_0))$ системы (7) не имеет в $B^k(r_1)$ общих точек с левой частью $\mathrm{Tr}^-(\varrho_0, t_0)$ этой траектории. Проводя теперь рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в доказательстве теоремы 1, получим решение $\varrho(t, 0, \mu)$, где $\mu \in B^k(r_1)$, системы (7), для которого при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\varrho(t, 0, \mu) \in B^k(r_1)$.

Так как система (7) получается из системы (2) с помощью замены переменных $\xi = \varrho + \overline{r}_1$, то для решения $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) = \varrho(t, 0, \mu) + \overline{r}_1$ системы (2) при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. Очевидно включение $\mu + \overline{r}_1 \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. Из условия 2) теоремы следует, что найдётся такая точка $(0, x_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n$, для которой $V(0, x_0) = \mu + \overline{r}_1$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в доказательстве предложения 1, получим ограниченность по Пуассону решения $x(t, 0, x_0)$ системы (1). Теорема доказана.

Следующее утверждение является достаточным условием существования у системы (1) y-ограниченных по Пуассону решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 с заменой неравенства (4) неравенством (5). Тогда система (1) имеет по крайней мере одно y-ограниченное по Пуассону решение.*

Доказательство. Дословно повторим рассуждения из доказательства теоремы 1 до момента рассмотрения решения $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) = \varrho(t, 0, \mu) + \overline{r}_1$ системы (2), для которого при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$, где $V(0, x_0) = \mu + \overline{r}_1 \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. После этого, проводя рассуждения аналогичные тем, которые проведены в доказательстве предложения 2, получим, что решение $x(t, 0, x_0)$ системы (1) y-ограничено по Пуассону. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-211.2020.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. *Yoshizawa T.* Liapunov's function and boundedness of solutions // Funkcial. Ekvac. 1959. V. 2. P. 95–142.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М., 1987.
4. *Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И, Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М., 1987.
5. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М., 2001.
6. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
7. *Лапин К.С.* Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 40–50.
8. *Лапин К.С.* Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1304–1309.
9. *Звягин В.Г., Корнев С.В.* Метод направляющих функций и его модификации. М., 2018.
10. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980.
11. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
12. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., 1980.

Мордовский государственный педагогический университет
им. М.Е. Евсевьева, г. Саранск

Поступила в редакцию 04.10.2020 г.
После доработки 29.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.