ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 313–325

УДК 517.956.35

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И ВНУТРЕННИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ФОКУСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА

© 2021 г. А. Б. Алиев, Г. Х. Шафиева

Для систем одномерных полулинейных волновых уравнений с фокусирующим нелинейным источником, имеющим переменный показатель роста, исследуется смешанная задача с нелинейными диссипативными граничными условиями. Доказаны теоремы о разрушении решений за конечный промежуток времени.

DOI: 10.31857/S0374064121030031

Введение. Для системы двух волновых уравнений

$$u_{i_{tt}} - u_{i_{xx}} = f_i(x, u_1, u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

в которых правые части имеют вид

$$f_1(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)}(u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)-1}|u_2|^{p(x)+1}u_1,$$

$$f_2(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)}(u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)+1}|u_2|^{p(x)-1}u_2,$$

где $p(x)$ – заданная вещественнозначная функция, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_i(0, t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u_{i_x}(l, t) + |u_{i_t}(l, t)|^{r_i - 1}u_{i_t}(l, t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(0, x) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l, \tag{4}$$

здесь r_1, r_2 – фиксированные вещественные числа, бо́льшие единицы, а $u_{10}(x)$, $u_{20}(x)$, $u_{11}(x)$, $u_{21}(x)$ – заданные вещественнозначные функции.

Смешанные задачи с нестационарными граничными условиями возникают в различных задачах механики и оптической физики (см., например, [1]).

Для нелинейных волновых уравнений значительное внимание уделялось изучению смешанной задачи в случае постоянного показателя роста нелинейности, а также исследованию нестационарных граничных условий (см., например, [2–7]). Более конкретно отметим, что вопрос о глобальной разрешимости смешанной задачи для одномерного нелинейного волнового уравнения с линейным нестационарным граничным условием изучен в работе [2], а вопрос о существовании глобального минимального аттрактора соответствующей динамической системы рассмотрен в работе [3].

Смешанная задача для нелинейных волновых уравнений с постоянным показателем роста нелинейности и нелинейным нестационарным граничным условием также достаточно подробно исследована. Например, отметим работы [4, 5], в которых изучен вопрос о разрешимости таких задач и установлено существование глобального минимального аттрактора соответствующей динамической системы. В работах [6, 7] исследован эффект возникновения взрыва за конечное время решений смешанной задачи для полулинейного одномерного волнового уравнения с фокусирующей нелинейностью и нестационарным нелинейным граничным условием.

В последнее время большой интерес вызывают рассмотрение и анализ нелинейных моделей, описываемых уравнениями с переменными показателями роста нелинейности [8–17]. Математические модели физических процессов, таких как поток электрореологических жидкостей или жидкостей с температурно-зависимой вязкостью, фильтрация в пористых средах, нелинейная вязкоупругость и многие другие сводятся к гиперболическим уравнениям с переменными показателями роста нелинейности. Более подробную информацию об этих вопросах можно найти в работах [10–18].

Следует, однако, отметить, что до сих пор имеется мало работ, в которых исследованы гиперболические задачи с нелинейностями типа переменной экспоненты (см., например, [15–18]). Среди этих работ выделим статью [18], в которой исследована начально-краевая задача с граничным условием Дирихле для нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2}\nabla u) + a|u_t|^{m(x)-2}u_t = b|u|^{p(x)-2}u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $r(x)$, $m(x)$, $p(x)$ – заданные вещественнозначные функции. Доказано, что при выполнении некоторых соотношений между этими функциями решение соответствующей начально-краевой задачи разрушается за конечное время. Отметим, что эффект разрушения за конечный промежуток времени решений волновых уравнений с постоянным показателем роста нелинейности исследован достаточно подробно (см., например, [19, 20]).

Цель данной работы состоит в нахождении условий, при выполнении которых решения смешанной задачи (1)–(4) разрушаются за конечное время.

Статья имеет следующую структуру: в п. 1 приведены основные понятия и основные результаты данной работы; в п. 2 рассмотрены необходимые сведения о пространствах Лебега с переменным показателем; в п. 3 дано доказательство основной теоремы работы – теоремы 2; в п. 4 представлена схема доказательства теоремы 3.

1. Основные результаты. В полуполосе $Q = (0, l) \times (0, +\infty)$ рассматривается смешанная задача (1)–(4), в которой функция $p(x)$ непрерывна и удовлетворяет логарифмическому условию Липшица, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что при любых $x, y \in [0, l]$, для которых $|x - y| < \delta$, выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \operatorname{const}/|\log|x-y||. \tag{5}$$

Предположим, что

$$1 < \min_{0\leqslant x\leqslant l} p(x) = p_1, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant l} p(x) = p_2 < +\infty. \tag{6}$$

Введём линейные пространства

$$H^1 = \{v : v, v' \in L_2(0, l)\}, \quad {}_0H^1 = \{v : v \in H^1, \quad v(0) = 0\}.$$

В дальнейшем предполагаем, что имеют место включения

$$u_{i0}(\cdot) \in {}_0H^1, \quad u_{i1}(\cdot) \in L_2(0, l), \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Определим энергетическую функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}[\|u_{i_t}(t,\cdot)\|_2^2 + \|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2] - G(u_1(t,\cdot), u_2(t,\cdot)), \tag{8}$$

где

$$G(u_1, u_2) = \int_0^l \frac{1}{2(p(x)+1)}|u_1(x) + u_2(x)|^{2(p(x)+1)}\,dx + \int_0^l \frac{1}{p(x)+1}|u_1(x)u_2(x)|^{p(x)+1}\,dx.$$

Используем стандартный метод сведения к задаче Коши для дифференциальных уравнений с неограниченным оператором. С этой целью, следуя [5, 6], определим в пространстве $L_2(0,l)$ линейный оператор ${}_0\Delta$ следующим образом:

$$D({}_0\Delta) = \{f : f \in H^2(0,l),\quad f(0)=0,\quad f'(l)=0\},\quad {}_0\Delta f(x) = f''(x),\quad x\in(0,l),$$

где $H^2(0,l) = \{v : v, v', v'' \in L_2(0,l)\}$.

Введём также оператор $N : \mathbb{R} \to H^2$, задав его условием $\alpha \mapsto h = N\alpha$, где $h''(x)=0$, $0<x<l$, $h(0)=0$, $h'(l)=\alpha$, т.е. $N\alpha = \alpha x$.

В пространстве $\mathcal{H} = {}_0H^1 \times L_2(0,l) \times {}_0H^1 \times L_2(0,l)$ зададим оператор A следующим образом:

$$D(A) = \{w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H},\quad u_i + Ng(\gamma v_i) \in D({}_0\Delta),\quad i=1,2\},$$

$$A(w) = (v_1, {}_0\Delta(u_1 + Ng_1(\gamma v_1)), v_2, {}_0\Delta(u_2 + Ng_2(\gamma v_2))),$$

где $g_i(s) = |s|^{r_i-1}s$, $i=1,2$.

И, наконец, определим нелинейный оператор $F(\cdot)$ равенством

$$F(w) = (0, f_1(x, u_1, u_2), 0, f_2(x, u_1, u_2)),$$

здесь $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}$. Тогда задача (1)–(4) запишется в следующем виде:

$$w' = A(w) + F(w),$$

$$w(0) = w_0, \tag{9}$$

где $w_0 = (u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x))$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

Несложно доказать, что $-A(\cdot)$ – максимально монотонный оператор, а действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ оператор $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Используя метод срезки нелинейной части $F(w)$, нетрудно доказать, что для любого $w_0 \in \mathcal{H}$ задача (9) имеет единственное локально слабое решение (см., например, [4, 21, 22]). При этом слабые решения являются по определению пределом сильных решений, т.е. решений задачи (9) с начальными данными $w_{0n} \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$, где $w_{0n} \to w_0$ в $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$ В итоге для задачи (1)–(4) получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5)–(7). Тогда существует такое* $T' > 0$, *что задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение* $\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$, *где* $u_i(\cdot) \in C([0,T']; {}_0H^1)$, $u'_{i_t}(\cdot) \in C([0,T']; L_2(0,l))$, $u_{i_t}(l,t) \in L^{r_i+1}(0,T')$, $i=1,2$, *и справедливо тождество*

$$E(t) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^t |u_{i_\tau}(l,\tau)|^{r_i+1}\,d\tau = E(0). \tag{10}$$

В дальнейшем вместо выражения "слабое решение" будем употреблять термин "решение".

Наша основная цель – исследовать вопрос отсутствия глобальных решений задачи (1)–(4) при выполнении следующих условий:

$$r_1 \leqslant r_2,\quad r_2 < p_1 + 1. \tag{11}$$

В случае, когда начальная энергия отрицательна, т.е. когда

$$E(0) < 0, \tag{12}$$

получен следующий результат об отсутствии глобальных решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5)–(7), (11) и (12). Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.*

Теперь рассмотрим задачу (1)–(4) в случае, когда начальная энергия, вообще говоря, не является отрицательной. Для этого введём следующие обозначения:

$$\alpha_0=\sum_{i=1}^{2}\|u_{i0_x}(\cdot)\|_2^2,\quad E_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(p_1+1)}\right)\alpha_1,$$

где $\alpha_1=\{(p_1+1)4^{p_2}l^{p_1+2}\}^{-1/p_1}$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия (5)–(7), (11), а также неравенства*

$$l>\frac{1}{2^{p_2}\sqrt{p_1+1}}, \tag{13}$$

$$\alpha_1<\alpha_0<1/l, \tag{14}$$

$$E(0)<E_1. \tag{15}$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

2. Необходимые сведения о пространстве Лебега с переменным показателем. Чтобы доказать теоремы 2 и 3, сначала приведём определение пространства Лебега с переменным показателем и некоторые необходимые в работе свойства этих пространств в одномерном случае.

Пусть $l>0$, $q(\cdot):[0,l]\to[1,+\infty)$ – измеримая функция. Введём линейное пространство

$$L_{q(\cdot)}(0,l)=\Big\{v:[0,l]\to\mathbb{R} \text{ – измеримая функция},\quad \rho_{q(\cdot)}(v)<+\infty\Big\},$$

где

$$\rho_{q(\cdot)}(v)=\int\limits_0^l|v(x)|^{q(x)}\,dx.$$

Известно, что величина $\|v\|_{q(\cdot)}=\inf\{\lambda>0;\ \rho_{q(\cdot)}(\lambda^{-1}v)\leqslant 1\}$ определяет норму в $L_{q(\cdot)}(0,l)$. Более того, если функция $q(x)$ удовлетворяет условию (5) для $q(x)=p(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, т.е.

$$|q(x)-q(y)|\leqslant \mathrm{const}/|\log|x-y||,\quad x,y\in[0,l],\quad |x-y|<\delta, \tag{16}$$

а также условию (6), т.е.

$$1<q_1=\min_{0\leqslant x\leqslant l}q(x)\leqslant q(x)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant l}q(x)=q_2<+\infty, \tag{17}$$

то $L_{q(\cdot)}(0,l)$ – банахово пространство (см. [10–14]).

Пространство Соболева с переменным показателем определяется следующим образом:

$$W^1_{q(\cdot)}(0,l)=\{v:v,\nabla v\in L_{q(\cdot)}(0,l)\},\quad \|v\|_{W^1_{q(\cdot)}(0,l)}=\|v\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)}+\|\nabla v\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)}.$$

Известно, что если для функции $q(x)$ выполнены условия (16) и (17), то $W^1_{q(\cdot)}[0,l]\subset C[0,l]$ (см. [10, 11]). В этом случае между нормой в $L_{q(\cdot)}(0,l)$ и величиной $\rho_{q(\cdot)}(v)$ имеют место следующие соотношения (см. [11, 12]):

$$\min\{\|v\|^{q_1}_{L_{q(\cdot)}(0,l)},\|v\|^{q_2}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\}\leqslant\rho_{q(\cdot)}(v)\leqslant\max\{\|v\|^{q_1}_{L_{q(\cdot)}(0,l)},\|v\|^{q_2}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\}.$$

Если для $q(x)$ выполнены условия (16), (17), то имеет место также следующее неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_0^l|u(x)v(x)|\,dx\leqslant 2\|u\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\|v\|_{L_{q'(\cdot)}(0,l)},$$

где $u\in L_{q(\cdot)}(0,l)$, $v\in L_{q'(\cdot)}(0,l)$ и $q'(x)=q(x)/(q(x)-1)$, $0\leqslant x\leqslant l$ (см. [11, 12]).

Лемма 1. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда справедливо неравенство*

$$\|v\|_{q_1}^{q_1} \leqslant \rho_{q(\cdot)}(v) + l^{(q_2-q_1)/q_2}\{\rho_{q(\cdot)}(v)\}^{q_1/q_2}. \tag{18}$$

Доказательство. Введя обозначения $\Omega_- = \{x : |v(x)| \leqslant 1\}$, $\Omega_+ = \{x : |v(x)| > 1\}$, получаем

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \geqslant \int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_2}\,dx + \int\limits_{\Omega_+} |v(x)|^{q_1}\,dx. \tag{19}$$

С другой стороны, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_1}\,dx \leqslant l^{(q_2-q_1)/q_1}\bigg(\int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_2}\,dx\bigg)^{q_1/q_2}. \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20) следуют оценки

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \geqslant \int\limits_{\Omega_+} |v(x)|^{q_1}\,dx \quad\text{и}\quad l^{(q_2-q_1)/q_1}(\rho_{q(\cdot)}(v))^{q_1/q_2} \geqslant \int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_1}\,dx,$$

складывая которые, приходим к неравенству (18). Лемма доказана.

Используя определение функционала $\rho_{q(\cdot)}(\cdot)$, нетрудно доказать, что имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда при любом $v \in {}_0H^1 \bigcap L_{q(\cdot)}(0,l)$ справедлива оценка*

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \leqslant l\max\{\|v\|_{C[0,l]}^{q_1}, \|v\|_{C[0,l]}^{q_2}\}, \tag{21}$$

где $\|v\|_{C[0,l]} = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}|v(x)|$.

В силу теорем вложения из оценки (21) вытекает, что

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \leqslant l\max\{l^{q_1/2}\|v\|_{{}_0H^1}^{q_1}, l^{q_2/2}\|v\|_{{}_0H^1}^{q_2}\}. \tag{22}$$

Рассмотрим функционал

$$G_{a,b}(v_1,v_2) = \int\limits_0^l a(x)|v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + \int\limits_0^l b(x)|v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx,$$

где $0 < a_1 \leqslant a(x) \leqslant a_2 < +\infty$, $0 < b_1 \leqslant b(x) \leqslant b_2 < +\infty$, $x \in [0,l]$. Если функция $q(x)$ непрерывна и $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l} q(x) > 0$, то $\theta_{q(\cdot)} = \min\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{|t+1|^{2q(x)} + |t|^{q(x)}\} > 0$.

Лемма 3. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда существуют такие положительные числа c_1 и c_2, зависящие от a_1, a_2, b_1, b_2, $\theta_{q(\cdot)}$, что при любых $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in L_{2q(\cdot)}[0,l]$ справедливы следующие неравенства:*

$$c_1\sum_{i=1}^2 \rho_{2q(\cdot)}(v_i) \leqslant G_{a,b}(v_1,v_2) \leqslant c_2\sum_{i=1}^2 \rho_{2q(\cdot)}(v_i).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\min(a_1,b_1)\bigg\{\int\limits_0^l |v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + 2\int\limits_0^l |v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx\bigg\} \leqslant G_{a,b}(v_1,v_2) \leqslant$$

$$\leqslant \max(a_2,b_2)\bigg\{\int\limits_0^l |v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + 2\int\limits_0^l |v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx\bigg\}.$$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|a+b|^{2q(x)} \leqslant 2^{2q(x)-1}(|a|^{2q(x)} + |b|^{2q(x)}) \quad \text{и} \quad |ab|^{q(x)} \leqslant 2^{-1}(|a|^{2q(x)} + |b|^{2q(x)}). \tag{23}$$

С другой стороны,

$$|a+b|^{2q(x)} + 2|ab|^{q(x)} = |b|^{2q(x)}\{|1+a/b|^{2q(x)} + 2|a/b|^{q(x)}\} \geqslant \theta_0|b|^{2q(x)}, \quad \theta_0 = \theta_{q(\cdot)} > 0. \tag{24}$$

Аналогично получим неравенство

$$|a+b|^{2q(x)} + 2|ab|^{q(x)} \geqslant \theta_0|a|^{2q(x)}. \tag{25}$$

Очевидно, что утверждение леммы 3 является следствием неравенств (23)–(25).

3. Доказательство теоремы 2. Отметим, что в доказательствах теорем 2 и 3 все рассуждения проводятся для решений с гладкими начальными данными. Для начальных данных, удовлетворяющих условиям (7), аналогичные утверждения получаются с помощью аппроксимации их гладкими функциями и последующим предельным переходом. В доказательстве величины c_i и c_{kj} для разных индексов i и k, j являются константами, не зависящими от решения задачи (1)–(4).

Из тождества (10) следует оценка

$$E(t) \leqslant E(0), \quad t > 0. \tag{26}$$

Введём обозначение $H(t) = -E(t)$. Из неравенств (12) и (26) вытекает, что

$$H(t) \geqslant -E(0) > 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{27}$$

В силу леммы 3 существуют такие постоянные $0 < c_1 \leqslant c_2$, при которых выполняются неравенства

$$c_1 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i) \leqslant G(u_1, u_2) \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i), \tag{28}$$

где $\rho(u_i) = \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i)$. Отсюда, учитывая оценку (27), получаем

$$H(t) \leqslant G(u_1, u_2) \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i). \tag{29}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i) \geqslant c_3 H(t) > -c_3 E(0) > 0, \tag{30}$$

где $c_3 = 1/c_2$. В силу леммы 1 имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\left[1 + l^{(p_2-p_1)/(p_2+1)}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\right)^{(p_1-p_2)/(p_2+1)}\right]. \tag{31}$$

Из (27) следует неравенство

$$\left[\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\right]^{(p_2-p_1)/(p_2+1)} \leqslant (-E(0))^{(p_2-p_1)/(p_2+1)} = c_4,$$

учитывая которое в неравенстве (31), приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (5), (6), (8) и* (u_1, u_2) *– решение задачи (1)–(4). Тогда существует постоянная* $c_5 > 0$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)} \leqslant c_5 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i). \tag{32}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями

$$\eta_j = \frac{2(p_1+1)}{r_j+1} \quad \text{и} \quad \eta_j' = \frac{2(p_1+1)}{2p_1+1-r_j},$$

имеем следующее неравенство:

$$\int_0^l |u_j|^{r_j+1}\,dx \leqslant l^{(2p_1+1-r_j)/(2p_1+2)} \biggl(\int_0^l |u_j|^{2(p_1+1)}\,dx\biggr)^{(r_j+1)/(2p_1+1)}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{2} \int_0^l |u_j|^{r_j+1}\,dx \leqslant c_6 \biggl[\biggl(\sum_{j=1}^{2} \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^{2} \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)}\biggr]. \tag{34}$$

Далее, используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$|u_j(l,1)|^{r_j+1} \leqslant \frac{1}{l} \int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j+1}\,dx + (r_j+1)\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j} |u_{jx}(x,t)|\,dx, \quad j=1,2. \tag{35}$$

Если применить неравенства Гёльдера и Юнга с показателями $\alpha+1$ и $(\alpha+1)/\alpha$, где

$$\frac{1}{2(p_1+1)} < \alpha < 1,$$

то будем иметь

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j} |u_{jx}(x,t)|\,dx \leqslant \frac{\alpha+1}{\alpha} \int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j(\alpha+1)/\alpha}\,dx + (\alpha+1)\int_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx, \tag{36}$$

$j=1,2$. В случае же, когда в качестве показателей в неравенстве Гёльдера выбраны числа

$$\eta_j = \frac{2(p_1+1)\alpha}{r_j(\alpha+1)} \quad \text{и} \quad \eta_j' = \frac{2(p_1+1)\alpha}{2(p_1+1)\alpha - r_j(\alpha+1)},$$

получаем неравенство

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j(\alpha+1)/\alpha}\,dx \leqslant l^{(2(p_1+1)\alpha - r_j(\alpha+1))/(2(p_1+1)\alpha)} \times$$

$$\times \biggl(\int_0^l |u_j(x,t)|^{2(p_1+1)}\,dx\biggr)^{(r_j(\alpha+1))/(2(p_1+1)\alpha)}, \quad j=1,2. \tag{37}$$

А в случае, когда в качестве показателей в неравенстве Гёльдера взяты числа $\eta = 2/(\alpha+1)$ и $\eta' = 2/(1-\alpha)$, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx \leqslant l^{(1-\alpha)/2}\biggl(\int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^2\,dx\biggr)^{(\alpha+1)/2}, \quad j=1,2. \tag{38}$$

Отсюда, учитывая неравенства (28), имеем

$$\sum_{j=1}^2 \int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx \leqslant c_7(G(u_1,u_2))^{(\alpha+1)/2} \leqslant c_8\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}. \tag{39}$$

В силу оценок (35)–(39) из (34) следует неравенство

$$\sum_{j=1}^2 |u_j(l,t)^{r_j+1}| \leqslant c_9\biggl[\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)} +$$
$$+\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_1(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_2(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}\biggr]. \tag{40}$$

Из (29) и (40) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^2 H^{\sigma r_i}(t)|u_i(l,t)|^{r_i+1} \leqslant c_{10}\sum_{i=1}^2\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\sigma r_i}\biggl[\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)} +$$
$$+\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_1(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_2(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}\biggr] =$$
$$= c_{10}\sum_{i=1}^2\sum_{k=1}^2\biggl|\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\xi_{ik}} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\eta_{ik}} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\xi_i}\biggr|, \tag{41}$$

где

$$\xi_{ik} = \sigma r_i + \frac{r_k+1}{2(p_1+1)}, \quad \eta_{ik} = \sigma r_i + \frac{(\alpha+1)r_k}{2(p_1+1)\alpha}, \quad \zeta_i = \sigma r_i + \frac{\alpha+1}{2}, \quad i,k=1,2.$$

Если

$$0 < \sigma < \sigma_0 = \min\biggl\{\frac{2(p_1+1)-r_2-1}{2r_2(p_1+1)}, \frac{2(p_1+1)\alpha - r_2(\alpha+1)}{2\alpha(p_1+1)}, \frac{1-\alpha}{2r_2}, \frac{p_1}{2(p_1+1)}\biggr\},$$

то $\xi_{ik} < 1$, $\eta_{ik} < 1$, $\zeta_i < 1$, $i,k=1,2$.

Справедлива следующая

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (5)–(7) и* $2 < s < 2(p_1+1)$. *Тогда при любых* $u_1, u_2 \in {}_0H^1$ *справедливо неравенство*

$$[\rho(u_j)]^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{11}\biggl(\sum_{k=1}^2 \|u_{k_x}\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \rho(u_k)\biggr). \tag{42}$$

В частности, верно также неравенство

$$\|u_j\|^s_{2(p_1+1)} \leqslant c_{12}\biggl(\sum_{k=1}^2 \|u_{k_x}\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \|u_k\|^{2(p_1+1)}_{2(p_1+1)}\biggr). \tag{43}$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся некоторыми идеями из доказательства леммы 3.2 работы [18].

Если $\rho(u_j) > 1,\ \ j = 1, 2,$ то очевидно, что

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant \rho(u_j). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь случай $\rho(u_j) \leqslant 1,\ \ j = 1, 2.$ Предположим, что $\|u_j\|_{C[0,l]} \leqslant 1.$ Тогда в силу леммы 2 и теоремы вложения получаем

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant l^{s/(2p_1+2)}\|u_j\|^s_{C[0,l]} \leqslant l^{s/(2p_1+2)}\|u_j\|^2_{C[0,l]} \leqslant l^{1+s/(2p_1+2)}\|u_{jx}\|^2_2. \tag{45}$$

Если $\|u_j\|_{C[0,l]} > 1,$ то в силу леммы 2 имеем $\rho(u_j) \leqslant l\|u_j\|^{2(p_2+1)}_{C[0,l]}.$ С другой стороны, $\rho(u_j) \leqslant 1,$ поэтому верно неравенство $(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant (\rho(u_j))^{2/(2p_2+2)},$ из которого и оценки (45) вытекает, что

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant l^{s/(2p_2+1)}\|u_j\|^2_{C[0,l]} \leqslant l^{1+s/(2p_2+2)}\|u_{jx}\|^2_2. \tag{46}$$

Таким образом, объединяя (45) и (46), получаем неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\Big)^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{13}\sum_{j=1}^{2}\|u_{jx}\|^2_2. \tag{47}$$

Неравенство (42) является следствием неравенств (44) и (47). Неравенство (43) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Используя оценки (26) и (29), из (42) получаем неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\Big)^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{14}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j),$$

в силу которого и неравенства (41) справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{2}H^{\sigma r_i}(t)|u_i(l,t)|^{r_i+1} \leqslant c_{15}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j).$$

Введём обозначение

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l u_i(x,t)u_{i_t}(x,t)\,dx, \tag{48}$$

где $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ – решение задачи (1)–(4). Вследствие (48) имеем

$$L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx - \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2\,dx -$$

$$- \varepsilon\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t) + \varepsilon G_1(u_1,u_2), \tag{49}$$

где

$$G_1(u_1,u_2) = \int\limits_0^l |u_1+u_2|^{2(p(x)+1)}\,dx + 2\int\limits_0^l |u_1u_2|^{p(x)+1}\,dx.$$

Из равенства (49) с учётом оценок (29) получаем, что

$$L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+\varepsilon(1+(1-\eta)(p_1+1))\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}|^2\,dx + 2\varepsilon((1-\eta)(p_1+1)-1)\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_x}|^2\,dx -$$

$$-2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)G(u_1,u_2) + \varepsilon G_1(u_1,u_2) - \varepsilon\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_1-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t), \tag{50}$$

где $0<\eta<1$. Используя лемму 2 для величины

$$G_2(u_1,u_2) = G_1(u_1,u_2) - 2(1-\eta)(p_1+1)G(u_1,u_2),$$

будем иметь оценку

$$G_2(u_1,u_2) \geqslant c_{16}\bigg[\int_0^l |u_1+u_2|^{2(p(x)+1)}\,dx + \int_0^l |u_1u_2|^{p(x)+1}\,dx\bigg] \geqslant$$

$$\geqslant c_{17}\sum_{j=1}^{2}\int_0^l |u_j(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx = c_{17}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j). \tag{51}$$

Из представления (50) с учётом оценки (51) вытекает неравенство

$$L'(t) \geqslant (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+\varepsilon\bigg[\int_0^l |u_t|^2\,dx + \int_0^l |u_x|^2\,dx\bigg] + c_{17}\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j) - \varepsilon J, \tag{52}$$

где $J=\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t)$.

Пусть $\delta = K^{-r_i/(r_i+1)}H^{(\sigma r_i)/(r_i+1)}(t)$, где $K>0$. Тогда, применяя неравенства Гёльдера и Юнга с показателями $\eta_i' = r_i+1$ и $\eta_i = (r_i+1)/r_i$, $i=1,2$, получаем

$$|J| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\frac{r_i}{r_i+1}\delta^{-(r_i+1)/r_i}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i+1}\delta^{r_i+1}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_2}{r_1+1}KH^{-\sigma}(t)H'(t) + \frac{K^{-r_1}}{r_1+1}c_{18}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j). \tag{53}$$

Из неравенств (52) и (53) следует, что

$$L'(t) \geqslant \bigg(1-\sigma-\frac{\varepsilon r_2}{r_1+1}K\bigg)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+c_{19}\varepsilon\bigg[\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_x}|^2\,dx\bigg] + \varepsilon\bigg(c_{20} - \frac{K^{-r_1}}{r_1+1}c_{21}\bigg)\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j).$$

Отсюда, выбирая $K > 0$ достаточно большим и $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем неравенство

$$L'(t) \geqslant c_{22}\bigg[H(t) + \sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_x}|^2\,dx + \sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\bigg],$$

вследствие которого, учитывая лемму 4, имеем

$$L'(t) \geqslant c_{23}\bigg[H(t) + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\bigg] \geqslant$$

$$\geqslant c_{24}\bigg[H(t) + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2p_1+1}^{2p_1+1}\bigg] \geqslant 0. \tag{54}$$

С другой стороны, в силу (30) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно неравенство $L(0) > 0,$ из которого и неравенства (54) следует, что

$$L(t) \geqslant L(0) > 0. \tag{55}$$

Используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\bigg|\sum_{i=1}^{2}\int_0^l u_i u_{i_t}\,dx\bigg| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_2\|u_{i_t}\|_2 \leqslant l^{p_1/(2p_1+2)}\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}\|u_{i_t}\|_2.$$

Далее, применяя неравенства Коши и Юнга с показателями

$$\mu_1 = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} > 1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = 2(1-\sigma) > 1,$$

получаем неравенство

$$\bigg(\int_0^l u_i u_{i_t}\,dx\bigg)^{1/(1-\sigma)} \leqslant c_{25}\bigg[\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}^{\mu_1/(1-\sigma)} + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^{\mu_2/(1-\sigma)}\bigg]. \tag{56}$$

Так как $0 < \sigma < \sigma_0 \leqslant p_1/(2p_1+2),$ то, учитывая неравенства (43), (48) и (56), заключаем, что справедлива оценка

$$L^{1/(1-\sigma)}(t) \leqslant c_{26}\bigg[H(t) + \bigg(\int_0^l u_i u_{i_t}\,dx\bigg)^{1/(1-\sigma)}\bigg] \leqslant$$

$$\leqslant c_{27}\bigg[H(t) + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2 + \sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)}\bigg]. \tag{57}$$

Сравнивая (54) и (57), будем иметь $L'(t) \geqslant c_{28}[L(t)]^{1/(1-\sigma)},$ $t > 0.$ Отсюда следует неравенство

$$L(t) \geqslant \bigg[[L(0)]^{-\sigma/(1-\sigma)} - c_{28}t\frac{\sigma}{1-\sigma}\bigg]^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{t\to T^*} L(t) = +\infty,$ где

$$T^* = \frac{1-\sigma}{\sigma c_{28}[L(0)]^{\sigma/(\sigma-1)}}.$$

4. Схема доказательства теоремы 3. В силу определения (8) функции $E(t)$ имеем неравенство

$$E(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2 - G(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot)).$$

Отсюда, используя оценки (22) и (29), получаем

$$E(t) \geqslant \frac{1}{2}\alpha - 2^{2p_2-1}l\ \max\left\{\sum_{i=1}^{2}(l\alpha)^{p_1+1},(l\alpha)^{p_2+1}\right\} = g(\alpha),$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2$. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant l^{-1}$, то $g(\alpha) = h(\alpha)$, где $h(\alpha) = \alpha/2 - 2^{2p_2-1}l(l\alpha)^{p_1+1}$.

Приведём следующие простые свойства $h(\alpha)$:

$$h(0) = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty} h(\alpha) = -\infty, \quad h'(\alpha_1) = 0,$$

где $\alpha_1 = ((p_1+1)4^{p_2}l^{p_1+2})^{-1/p_1}$, $h'(\alpha) > 0$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, и $h'(\alpha) < 0$, если $\alpha > \alpha_1$. В силу (14) $l\alpha_1 < 1$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия (5)–(7) и (13)–(15). Тогда существует число* α_2 *такое, что* $\alpha_1 < \alpha_2 < l^{-1}$ *и*

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 \geqslant \alpha_2. \tag{58}$$

Доказательство. Неравенство (58) докажем, предположив противное, т.е. допустив, что $\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_0,\cdot)\|^2 < \alpha_2$ в некоторой точке $t_0 > 0$. Так как $h(\alpha_0) = g(\alpha_0) \leqslant E(0) = g(\alpha_2)$ и $g(\alpha)$ – возрастающая функция на $(0,\alpha_1)$, то $\alpha_0 \geqslant \alpha_2$. В силу непрерывности функции $\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2$ существует такая точка t_1, что $\alpha_1 < \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_1,\cdot)\|^2 < \alpha_2$. Тогда имеем

$$E(t_1) \geqslant h\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_1,\cdot)\|_2^2\right) > h(\alpha_2) = E(0).$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (26). Таким образом, справедливо неравенство (58). Лемма доказана.

Из неравенств (26) и (58) вытекает, что

$$G(u_1,u_2) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 - E(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 - E(0) \geqslant \frac{1}{2}\alpha_2 - g(\alpha_2) = 2^{2p_2-1}l^{p_1+2}\alpha_2^{p_1+1}.$$

Сравнив (55) и (58), получим оценку

$$G(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot)) \geqslant 2^{2p_2-1}l^{p_1+2}\alpha_2^{p_1+1}. \tag{59}$$

Теперь докажем теорему 3. Воспользовавшись неравенством (58), будем иметь

$$E_1 - \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2\right] \leqslant E_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 \leqslant E_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 = -\frac{1}{2(p_1+1)}\alpha_1 < 0.$$

Отсюда следует, что $0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant G(u_1,u_2) \leqslant 2^{2p_2-1}\sum_{i=1}^{2}\rho(u_i)$, где $H(t) = E_1 - E(t)$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 для решений задачи (1)–(4) справедливы оценки (29).

Далее доказательство теоремы 3 представляет собой повторение доказательства теоремы 2 с небольшим изменением. Следует только отметить, что при установлении неравенства (54), как и в доказательстве теоремы 2, в неравенстве (49) мы должны работать с выражением $2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t)$. При этом, в отличие от доказательства теоремы 2, дополнительно появляется слагаемое $-\varepsilon E_1$. Чтобы провести дальнейшую корректировку доказательства, нужно учесть определение величины E_1 и использовать неравенство $-\varepsilon E_1 \geqslant -\varepsilon MG(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot))$, где $M=\varepsilon(1-\eta)p_1(\alpha_1/\alpha_2)^{p_1+1}$, которое следует из оценки (59) и определения числа α_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rauch J.* Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics. Rhode Island, 2012.
2. *Алиев А.Б.* Смешанная задача с диссипацией на границе для квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 6. С. 1289–1292.
3. *Алиев А.Б., Ханмамедов А.Х.* О существовании минимального глобального аттрактора для нелинейного волнового уравнения с антидиссипацией в области и диссипацией на части границы // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 326–330.
4. *Chueshov I., Eller M., Lasiecka I.* On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation // Comm. in Partial Differ. Equat. 2002. V. 27. P. 1901–1951.
5. *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2008. V. 195 (912). P. 1–183.
6. *Hongyinping Fenga, Shengjia Li, Xia Zhi.* Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source // Nonlin. Anal. 2012. V. 75. P. 2273–2280.
7. *Wenjun Liu, Yun Sun, Gang Li.* Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonnegative initial energy // Electr. J. of Differ. Equat. 2013. V. 2013. № 115. P. 1–8.
8. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 5. С. 961–998.
9. *Жиков В.В.* Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 107–114.
10. *Ruzicka M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Lect. Notes in Math. V. 1748. Berlin, 2000.
11. *Lars D., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lect. Notes Math. Springer Verlag, 2017.
12. *Almeida A., Samko S.* Embeddings of variable Hajlasz–Sobolev spaces into Holder spaces of variable order // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 353. № 2. P. 489–496.
13. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 263. № 2. P. 424–446.
14. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces and $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. 1991. V. 41. P. 592–618.
15. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$-laplacian and damping term: blow-up of solutions // C.R. Mecanique. 2011. V. 339. P. 751–755.
16. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$-laplacian and damping term: existence and blow-up // Differ. Equat. Appl. 2011. V. 3. № 4. P. 503–525.
17. *Sun L., Ren Y., Gao W.* Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources // Comput. Math. Appl. 2016. V. 71. № 1. P. 267–277.
18. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. P. 1–11.
19. *Корпусов М.О.* О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией // ТМФ. 2012. Т. 171. № 3. С. 355–369.
20. *Bilgin B.A., Kalantarov V.K.* Blow up of solutions to the initial boundary value problem for quasilinear strongly damped wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. № 1. P. 89–94.
21. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. Mathematical Surveys and Monographs. V. 49. Amer. Math. Soc., 1997.
22. *Brezis H.* Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert. Amsterdam, 1973.

Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку,
Азербайджанский технический университет,
г. Баку,
Бакинский государственный университет, Азербайджан

Поступила в редакцию 19.11.2020 г.
После доработки 19.11.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.