УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2021 г. Г. Э. Гришанина, Э. М. Мухамадиев

Доказано, что необходимым и достаточным условием существования в ограниченной плоской области классического решения у неоднородного бигармонического уравнения является требование усиленной непрерывности функции, стоящей в правой части уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064121030043

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о существовании классического решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, G – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, а $f(x, y)$ – непрерывная в G функция. Напомним [1–5], что функция $u(x, y)$ называется *классическим* решением уравнения (1), если она в области G имеет все непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяет уравнению (1). Очевидно, что если уравнение (1) имеет классическое решение, то функция $f(x, y)$ является непрерывной функцией. Однако существуют непрерывные функции $f(x, y)$, при которых уравнение (1) не имеет классических решений. Возникает вопрос, каким дополнительным условиям, кроме непрерывности, должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы уравнение (1) имело классическое решение. Ответ на этот вопрос для уравнения Пуассона получен в работе [6], а для неоднородной системы Коши–Римана – в работе [7].

Отметим, что наличие свойства гладкости решения важно не только для качественной теории дифференциальных уравнений, но имеет практические приложения, например, при приближённом построении решения дифференциального уравнения и оценке точности приближённого решения.

2. Необходимое условие существования классического решения. Определим множество

$$\tilde{G} = \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 : M = (x, y) \in G, \quad |s| < \rho(M, \partial G)\},$$

где $\rho(M, \partial G)$ – расстояние от точки M до границы ∂G области G , и функцию

$$g(x, y, s, \varphi) = f(x + s \cos \varphi, y + s \sin \varphi)$$

на $\tilde{G} \times [0, 2\pi]$. Очевидно, эта функция непрерывна по совокупности переменных. Комплекснозначная функция

$$F_k(x, y, s) = \int_0^{2\pi} g(x, y, s, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

определена и непрерывна на множестве $\tilde{G}$, и для неё справедливо равенство

$$F_k(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in G.$$

Определим функции

$$f_k(x, y, r) = \int_r^{r_1} F_k(x, y, s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < r \leq r_1(x, y) \equiv \frac{1}{2}\rho(M, \partial G).$$

Определение. Непрерывную функцию $f(x, y)$ назовём k -усиленно непрерывной, если функция $f_k(x, y, r)$ имеет непрерывное продолжение на множество $\{(x, y, 0) : (x, y) \in G\} \subset \tilde{G}$.

Непрерывная по Гёльдеру функция является k -усиленно непрерывной для любого k . Более общее, чем непрерывность по Гёльдеру, достаточное условие k -усиленной непрерывности функции $f(x, y)$ даёт следующая оценка для функции $F_k(x, y, r)$:

$$|F_k(x, y, r)| \leq C(1 + |\ln r|)^\nu, \quad \nu < -1, \quad C = \text{const} > 0, \quad 0 < r \leq r_1(x, y).$$

Теорема 1. Если уравнение (1) имеет в области G классическое решение, то функция $f(x, y)$ является k -усиленно непрерывной при $k = 2$ и $k = 4$ в этой области.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть функция $u(x, y)$, $(x, y) \in G$, имеет в области G непрерывные частные производные до m -го порядка включительно. Определим функцию

$$v(x, y, r, \varphi) = u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)$$

на множестве $\tilde{G} \times [0, 2\pi]$ и комплекснозначные функции

$$U_k(x, y, r) = \int_0^{2\pi} v(x, y, r, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad (x, y, r) \in \tilde{G}.$$

Так как подынтегральная функция на множестве $\tilde{G} \times [0, 2\pi]$ имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные по r до порядка m включительно, то функции $U_k(x, y, r)$ имеют в области $\tilde{G}$ непрерывные частные производные по r до m -го порядка включительно.

Лемма 1. Пусть функция $u(x, y)$ непрерывна в области G вместе со всеми частными производными до m -го порядка включительно. Тогда при любом $0 < k \leq m$ для функции $U_k(x, y, r)$ справедливы равенства

$$U_k(x, y, 0) = \frac{\partial U_k}{\partial r}(x, y, 0) = \dots = \frac{\partial^{k-1} U_k}{\partial r^{k-1}}(x, y, 0) = 0, \tag{2}$$

и равномерно на каждом компактном подмножестве области G имеют место предельные соотношения

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{k!}{r^k} U_k(x, y, r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(k-1)!}{r^{k-1}} \frac{\partial U_k(x, y, r)}{\partial r} = \dots = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial^{k-1} U_k(x, y, r)}{\partial r^{k-1}} = \frac{\partial^k U_k}{\partial r^k}(x, y, 0). \tag{3}$$

Доказательство. В силу непрерывной дифференцируемости функции $u(x, y)$ в области G справедливы представления

$$\begin{aligned} v(x, y, r, \varphi) &= u(x, y) + \frac{\partial v}{\partial r}(x, y, 0, \varphi)r + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(x, y, 0, \varphi)\frac{r^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \frac{\partial^{k-1} v}{\partial r^{k-1}}(x, y, 0, \varphi)\frac{r^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{r^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-s)^{k-1} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) ds, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^q v}{\partial r^q}(x, y, r, \varphi) &= \frac{\partial^q v}{\partial r^q}(x, y, 0, \varphi) + \frac{\partial^{q+1} v}{\partial r^{q+1}}(x, y, 0, \varphi)r + \frac{\partial^{q+2} v}{\partial r^{q+2}}(x, y, 0, \varphi)\frac{r^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \frac{\partial^{k-1} v}{\partial r^{k-1}}(x, y, 0, \varphi)\frac{r^{k-q-1}}{(k-q-1)!} + \frac{r^{k-q}}{(k-q-1)!} \int_0^1 (1-s)^{k-q-1} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где $0 < q < k$ и

$$\frac{\partial^l v}{\partial r^l}(x, y, r, \varphi) = \sum_{j=0}^l C_l^j \frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j} \partial y^j} \cos^{l-j} \varphi \sin^j \varphi, \quad C_l^j = \frac{l!}{j!(l-j)!},$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j} \partial y^j} = \frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j} \partial y^j}(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi).$$

Так как

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi))$$

и

$$\int_0^{2\pi} \exp(ip\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq 0, \\ 2\pi, & \text{если } p = 0, \end{cases}$$

то при $0 \leq j \leq l < k$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \cos^{l-j} \varphi \sin^j \varphi \exp(ik\varphi) d\varphi = 0. \quad (6)$$

Из представлений (4) и (5) и равенства (6) следует, что

$$U_k(x, y, 0) = \int_0^{2\pi} u(x, y) \exp(ik\varphi) d\varphi = u(x, y) \int_0^{2\pi} \exp(ik\varphi) d\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial r}(x, y, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r}(x, y, 0, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi = 0, \quad \dots,$$

$$\frac{\partial^{k-1} U_k}{\partial r^{k-1}}(x, y, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{k-1} v}{\partial r^{k-1}}(x, y, 0, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi = 0.$$

Равенства (2) доказаны.

В силу (2) и представлений (4) и (5) получаем

$$U_k(x, y, r) = \frac{r^k}{(k-1)!} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s)^{k-1} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) \exp(ik\varphi) ds d\varphi,$$

$$\frac{\partial^q U_k}{\partial r^q}(x, y, r) = \frac{r^{k-q}}{(k-q-1)!} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s)^{k-q-1} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) \exp(ik\varphi) ds d\varphi, \quad q = \overline{1, k-1}. \quad (7)$$

Из равенств (7), согласно правилу Лопиталья, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{U_k(x, y, r)}{r^k} k! &= k \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s)^{k-1} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) \exp(ik\varphi) ds d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, 0, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(k-1)!}{r^{k-1}} \frac{\partial U_k}{\partial r}(x, y, r) &= (k-1) \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s)^{k-2} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) \exp(ik\varphi) ds d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, 0, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad \dots, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial^{k-1} U_k(x, y, r)}{\partial r^{k-1}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, rs, \varphi) \exp(ik\varphi) ds d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x, y, 0, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Равенства (3) доказаны. Лемма доказана.

Пусть функция $u(x, y)$, $(x, y) \in G$, имеет в области G непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно. Положим

$$f(x, y) = \Delta^2 u(x, y), \quad (x, y) \in G. \tag{8}$$

По функциям

$$\begin{aligned} g(x, y, r, \varphi) &= f(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi), \quad v(x, y, r, \varphi) = u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi), \\ w(x, y, r, \varphi) &= (\Delta u)(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) \end{aligned}$$

на множестве $\tilde{G} \times [0, 2\pi]$ определим комплекснозначные функции

$$\begin{aligned} F_k(x, y, r) &= \int_0^{2\pi} g(x, y, r, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \\ U_k(x, y, r) &= \int_0^{2\pi} v(x, y, r, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad (x, y, r) \in \tilde{G}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ V_k(x, y, r) &= \int_0^{2\pi} w(x, y, r, \varphi) \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad (x, y, r) \in \tilde{G}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Отметим, что функции $F_k(x, y, r)$ непрерывны по совокупности переменных, а функции $V_k(x, y, r)$ и $U_k(x, y, r)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным до 2-го и 4-го порядка включительно соответственно.

Лемма 2. *Справедливы тождества*

$$F_k(x, y, r) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{5 - 2k^2}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{4(4 - k^2)}{r^4} U_k \right) + \frac{(4 - k^2)(16 - k^2)}{r^4} U_k, \quad (9)$$

$$F_k(x, y, r) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{2V_k}{r^2} \right) + \frac{(4 - k^2)}{r^2} V_k, \quad (10)$$

где $U_k = U_k(x, y, r)$, $k = \overline{1, 4}$, $V_k = V_k(x, y, r)$, $k = 1, 2$, и $(x, y, r) \in \tilde{G}$, $r \neq 0$.

Доказательство. Используя определение (8) функции $f(x, y)$, несложно проверить, что функция $g(x, y, r, \varphi)$ удовлетворяет тождеству

$$g(x, y, r, \varphi) = \frac{\partial^4 v}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 v}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} + 4 \frac{v}{r^4} \right) + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4}, \quad (11)$$

где $(x, y, r, \varphi) \in \tilde{G} \times [0, 2\pi]$, $r \neq 0$. Умножим тождество (11) на $\exp(ik\varphi)$ и получившееся тождество проинтегрируем от 0 до 2π , воспользовавшись следующим свойством гладких 2π -периодических по φ функций $v(x, y, r, \varphi)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^l v}{\partial \varphi^l} \exp(ik\varphi) d\varphi = (-ik)^l \int_0^{2\pi} v \exp(ik\varphi) d\varphi, \quad l \in \mathbb{N},$$

которое следует из легко проверяемого тождества

$$\frac{\partial^l v}{\partial \varphi^l} \exp(ik\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^{l-1} v}{\partial \varphi^{l-1}} \exp(ik\varphi) \right) - ik \left(\frac{\partial^{l-1} v}{\partial \varphi^{l-1}} \exp(ik\varphi) \right).$$

Поменяв местами порядок интегрирования по φ и дифференцирования по r , получим

$$F_k(x, y, r) = \frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} - \frac{2k^2 + 1}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{2k^2 + 1}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} - \frac{4k^2 - k^4}{r^4} U_k. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что правые части равенств (9) и (12) совпадают между собой при $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{5 - 2k^2}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{4(4 - k^2)}{r^4} U_k \right) + \frac{(4 - k^2)(16 - k^2)}{r^4} U_k &= \\ &= \frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} + \frac{3}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} - \frac{6}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{5 - 2k^2}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} - \\ &- \frac{3(5 - 2k^2)}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{4(4 - k^2)}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} - \frac{16(4 - k^2)}{r^4} U_k + \frac{(4 - k^2)(16 - k^2)}{r^4} U_k = \\ &= \frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} - \frac{2k^2 + 1}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{2k^2 + 1}{r^3} \frac{\partial U_k}{\partial r} - \frac{4k^2 - k^4}{r^4} U_k. \end{aligned}$$

Тождество (9) доказано.

Аналогично устанавливается тождество (10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. 1) Рассмотрим случай $k = 2$. Из тождества (10) при $k = 2$ имеем

$$F_2(x, y, r) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{2V_2}{r^2} \right). \quad (13)$$

Разделив равенство (13) на r и проинтегрировав его по отрезку $[r, r_1]$, $0 < r < r_1(x, y) = 2^{-1}\rho(M, \partial G)$, получим

$$f_2(x, y, r) \equiv \int_r^{r_1} F_2(x, y, s) \frac{ds}{s} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_2}{\partial r}(x, y, r_1) + \frac{2}{r_1^2} V_2(x, y, r_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial r}(x, y, r) - \frac{2}{r^2} V_2(x, y, r). \quad (14)$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_1(x, y, r) + \frac{2}{r^2} V_1(x, y, r) \right) = 2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(x, y, 0). \tag{15}$$

Следовательно, в силу (15) из тождества (14) следует, что функция $f_2(x, y, r)$ продолжается по непрерывности в точку $r = 0$, причём сходимость $\lim_{r \rightarrow 0} f_2(x, y, r) = f_2(x, y, 0)$ равномерна на каждом компакте из области G .

2) Пусть $k = 4$. В силу леммы 2 имеем

$$F_4(x, y, r) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_4}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2} - \frac{27}{r^2} \frac{\partial U_4}{\partial r} - \frac{48}{r^4} U_4 \right),$$

где $U_4 = U_4(x, y, r)$, $(x, y) \in G$, $0 < r \leq r_1(x, y) \equiv \rho(M, \partial G)/2$. Разделив это равенство на r и проинтегрировав его по отрезку $[r, r_1]$, получим

$$f_4(x, y, r) = \int_r^{r_1} F_4(x, y, s) \frac{ds}{s} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial^3 U_4(x, y, r_1)}{\partial r^3} + \frac{3}{r_1^2} \frac{\partial^2 U_4(x, y, r_1)}{\partial r^2} - \frac{27}{r_1^3} \frac{\partial U_4(x, y, r_1)}{\partial r} - \frac{48}{r_1^4} U_4(x, y, r_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_4(x, y, r)}{\partial r^3} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 U_4(x, y, r)}{\partial r^2} + \frac{27}{r^3} \frac{\partial U_4(x, y, r)}{\partial r} + \frac{48}{r^4} U_4(x, y, r).$$

Из леммы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{U_4(x, y, r)}{r^4} = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 U_4(x, y, 0)}{\partial r^4}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{4-l}} \frac{\partial^l U_4(x, y, r)}{\partial r^l} = \frac{1}{(4-l)!} \frac{\partial^l U_4(x, y, 0)}{\partial r^l}, \quad l = \overline{1, 3},$$

причём сходимость равномерна относительно (x, y) из компактного подмножества области G . Следовательно, функция $f_4(x, y, r)$ продолжается по непрерывности в точку $r = 0$ и сходимость $\lim_{r \rightarrow 0} f_4(x, y, r) = f_4(x, y, 0)$ равномерна на каждом компакте из области G . Теорема доказана.

3. Достаточное условие существования классического решения. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна и интегрируема (например, ограничена: $|f(x, y)| \leq \text{const}$) в области G . Тогда функция

$$u_0(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_G f(\xi, \eta) r^2 \ln r \, d\xi \, d\eta, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и является обобщённым решением уравнения (1).

При этих предположениях о функции $f(x, y)$ необходимые условия существования классического решения уравнения (1) являются и достаточными, а именно, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема и k -усиленно непрерывна при $k = 2$ и $k = 4$ в области G . Тогда функция $u_0(x, y)$ является классическим решением уравнения (1).

Для доказательства теоремы удобно выразить операции дифференцирования по x и y через дифференциальный оператор Коши-Римана и сопряжённый к нему оператор. Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 = i \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 \right), \\ \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} &= i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 = - \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 \right), \\ \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} &= i^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = -i \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 \right), \\ \frac{\partial^4}{\partial y^4} &= \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 - 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 6 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4.\end{aligned}$$

Таким образом, все частные производные 4-го порядка представляют собой линейные комбинации произведений степеней $(\partial/\partial \bar{z})^k (\partial/\partial z)^l$ оператора Коши–Римана и сопряжённого к нему оператора, где $k + l = 4$, $l = \overline{0, 4}$.

Ниже нам понадобятся действия этих дифференциальных операторов на функции вида $K(z\bar{z})$, где $K(u)$ – гладкая функция скалярного аргумента $u > 0$. Нетрудно проверить, что справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 K(z\bar{z}) &= K^{IV}(z\bar{z})z^4, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 \frac{\partial}{\partial z} K(z\bar{z}) = K^{IV}(z\bar{z})z^3\bar{z} + 3K'''(z\bar{z})z^2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 K(z\bar{z}) &= K^{IV}(z\bar{z})z^2\bar{z}^2 + 4K'''(z\bar{z})z\bar{z} + 2K''(z\bar{z}), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 K(z\bar{z}) &= K^{IV}(z\bar{z})z\bar{z}^3 + 3K'''(z\bar{z})\bar{z}^2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 K(z\bar{z}) = K^{IV}(z\bar{z})\bar{z}^4,\end{aligned}$$

где через K' , K'' , K''' , K^{IV} обозначены производные первого, второго, третьего и четвёртого порядка от функции $K(u)$ по переменной $u > 0$ соответственно.

Например, для функции $K(u) = u \ln u$ имеем

$$K'(u) = \ln u + 1, \quad K''(u) = \frac{1}{u}, \quad K'''(u) = -\frac{1}{u^2}, \quad K^{IV}(u) = \frac{2}{u^3}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 K(z\bar{z}) &= 2 \frac{z}{\bar{z}^3}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 \frac{\partial}{\partial z} K(z\bar{z}) = -\frac{1}{\bar{z}^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 K(z\bar{z}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^3 K(z\bar{z}) &= -\frac{1}{z^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 K(z\bar{z}) = 2 \frac{\bar{z}}{z^3}.\end{aligned}$$

Рассмотрим несобственный интеграл в смысле главного значения Коши с сингулярным ядром $(\zeta - z)^k |\zeta - z|^{-k-2}$:

$$f_k(z) \equiv \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G \setminus U(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta, \quad (16)$$

где $U(z, \varepsilon)$ – круг с центром в точке z радиуса ε . Заметим, что для вещественной функции $f(z)$ несобственный интеграл (16) существует или не существует одновременно для значения $\pm k$, $k \neq 0$.

Следующее утверждение устанавливает связь между свойством k -усиленной непрерывности и существованием и непрерывностью функции $f_k(z)$.

Лемма 3. Пусть непрерывная функция $f(z) = f(x, y)$ является k -усиленно непрерывной в области G и принадлежит пространству Лебега $L_1(G)$. Тогда несобственный интеграл $f_k(z)$ существует во всех точках области $z \in G$, предельное соотношение (16) выполняется равномерно на каждом компакте $K \subset G$ и функция $f_k(z)$ непрерывна в G .

Доказательство. Нетрудно проверить, что для функций $f(z) = f(x, y)$, принадлежащих пространству Лебега $L_1(G)$, при $r_0 > 0$ интеграл

$$\iint_{G \setminus U(z, r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta$$

определяет непрерывную функцию в G . Пусть $K \subset G$ – компакт, $r_0 = 2^{-1} \min_{z \in K} \rho(z, \partial G)$ и $z \in K$ – фиксированная точка. При $0 < \varepsilon \leq r_0$ имеем

$$\iint_{G \setminus U(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta = \iint_{G \setminus U(z, r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta + \iint_{U(z, r_0) \setminus U(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta. \quad (17)$$

Переходя к полярным координатам $\zeta - z = re^{i\theta}$ в последнем слагаемом в правой части (17), получаем

$$\iint_{G \setminus U(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta = \iint_{G \setminus U(z, r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta + \int_{\varepsilon}^{r_0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) e^{ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}. \quad (18)$$

Поскольку

$$\int_{\varepsilon}^{r_0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) e^{ik\varphi} d\varphi \frac{dr}{r} = \int_{\varepsilon}^{r_0} F_k(z, r) \frac{dr}{r} = f_k(z, \varepsilon) - f_k(z, r_0),$$

то из (18) следует равенство

$$\iint_{G \setminus U(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta = \iint_{G \setminus U(z, r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta + f_k(z, \varepsilon) - f_k(z, r_0), \quad z \in K. \quad (19)$$

Так как функция f является k -усиленно непрерывной, то равномерно по $z \in K$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_k(z, \varepsilon) = f_k(z, 0).$$

Таким образом, из равенства (19) следует, что предельное соотношение (16) выполняется равномерно на каждом компакте $K \subset G$ и имеет место представление

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{G \setminus U(z, r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} (f_k(z, 0) - f_k(z, r_0)), \quad z \in K.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Рассмотрим общее представление вида

$$w(z, \delta) = \int_0^R \frac{\partial}{\partial \rho} L(\rho, \delta) \cdot h(z, \rho) d\rho, \quad (20)$$

где функция $h(z, \rho)$ непрерывна на множестве $G \times (0, 1]$, а вещественнозначная функция $L(\rho, \delta)$ непрерывна на множестве $[0, R] \times (0, 1]$ и удовлетворяет условиям:

- 1) $L(0, \delta) \equiv 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} L(\rho, \delta) = 1$ при $\rho \in (0, R]$;
 2) $(\partial/\partial\rho)L(\rho, \delta)$ непрерывна и неотрицательна при $\rho > 0$, $\delta \in (0, 1]$.
 Справедлива

Лемма 4. Пусть сходимость

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} h(z, \rho) = h(z, 0)$$

имеет место равномерно по z на каждом компактном подмножестве области G . Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(z, \delta) = h(z, 0),$$

сходимость в котором равномерна по z на каждом компактном подмножестве области G .

Доказательство. Пусть $G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G$. По $\varepsilon > 0$ выберем $\sigma \in (0, R)$ такое, что

$$|h(z, \rho) - h(z, 0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } 0 < \rho < \sigma, \quad z \in \bar{G}_1.$$

Из представления (20) вытекают равенства

$$\begin{aligned} w(z, \delta) - h(z, 0) &= \int_0^R \frac{\partial}{\partial \rho} L(\rho, \delta) (h(z, \rho) - h(z, 0)) d\rho + h(z, 0) (L(R, \delta) - L(0, \delta)) - h(z, 0) = \\ &= h(z, 0) (L(R, \delta) - 1) + \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial \rho} L(\rho, \delta) (h(z, \rho) - h(z, 0)) d\rho + \int_\sigma^R \frac{\partial}{\partial \rho} L(\rho, \delta) (h(z, \rho) - h(z, 0)) d\rho. \end{aligned}$$

Здесь использовано условие $L(0, \delta) \equiv 0$. Положим $M = \max\{|h(z, \rho)| : z \in \bar{G}_1, 0 \leq \rho \leq R\}$. В силу условия 1) существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$0 < L(R, \delta) - L(\sigma, \delta) \leq |L(R, \delta) - 1| + |1 - L(\sigma, \delta)| < \varepsilon/(6M), \quad \delta < \delta_0.$$

Используя условие 2) для функции $L(\rho, \delta)$, имеем оценку

$$\begin{aligned} |w(z, \delta) - h(z, 0)| &\leq M|L(R, \delta) - 1| + K(\sigma, \delta) \frac{\varepsilon}{3} + 2M(L(R, \delta) - L(\sigma, \delta)) < \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{6M} + 2M \frac{\varepsilon}{6M} < \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

если $\varepsilon < M$, $0 < \delta < \delta_0$ и $z \in \bar{G}_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим семейство функций

$$u_\delta(x, y) = \frac{1}{16\pi} \iint_G f(\xi, \eta) (r^2 + \delta) \ln(r^2 + \delta) d\xi d\eta, \quad \delta > 0, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Функции $u_\delta(x, y)$ при каждом $\delta > 0$ бесконечно дифференцируемы на всей плоскости. Несложно видеть, что все частные производные $\partial^{k+l} u_\delta(x, y) / \partial x^k \partial y^l$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно сходятся к соответствующим частным производным $\partial^{k+l} u_0(x, y) / \partial x^k \partial y^l$, если $k + l \leq 3$. Поэтому для доказательства существования непрерывных частных производных четвёртого порядка у функции $u_0(x, y)$ достаточно показать, что функции $\partial^4 u_\delta(x, y) / \partial x^k \partial y^l$, где $k + l = 4$, при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на каждом компакте области G сходятся к некоторым функциям

$$w_{kl}(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^4}{\partial x^k \partial y^l} u_\delta(x, y), \quad k + l = 4. \quad (21)$$

В силу приведённых выше замечаний существование равномерных пределов (21) равносильно существованию равномерных пределов

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^l u_\delta(z), \quad k + l = 4, \tag{22}$$

где

$$u_\delta(z) \equiv u_\delta(x, y) = \frac{1}{16\pi} \iint_G f(\zeta) K(r^2 + \delta) d\xi d\eta,$$

$$\delta > 0, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad r^2 = |z - \zeta|^2, \quad K(u) = u \ln u.$$

Согласно лемме Гейне–Бореля при $\delta \rightarrow 0$ пределы (22) существуют равномерно по z на любом компактном подмножестве области G тогда и только тогда, когда они равномерно сходятся по z в некоторой окрестности любой точки области G . Поэтому теорема 2 будет доказана, если мы покажем существование равномерного предела (22) в некоторой окрестности любой точки области G .

Пусть $z_0 \in G$ и число d удовлетворяет условию $0 < 3d \leq \rho(z_0, \partial G)$, обозначим $U(z, d) = \{\zeta : |\zeta - z| < d\}$. Для $|z - z_0| \leq d$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^l u_\delta(z) = J_{k1}(z, \delta) + J_{k2}(z, \delta), \tag{23}$$

где $l = 4 - k$, $k = \overline{0, 4}$, и

$$J_{k1}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \iint_{G \setminus U(z, d)} f(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^l K(r^2 + \delta) d\xi d\eta,$$

$$J_{k2}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \iint_{U(z, d)} f(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^l K(r^2 + \delta) d\xi d\eta.$$

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{k1}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \iint_{G \setminus U(z, d)} f(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^l K(r^2) d\xi d\eta, \tag{24}$$

сходимость в котором равномерна по $z \in U(z_0, d)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при $\delta \rightarrow 0$ предел функции $J_{k2}(z, \delta)$, $k = \overline{0, 4}$, существует равномерно по $z \in U(z_0, d)$. Так как имеют место тождества $J_{02} \equiv J_{42}$, $J_{12} \equiv J_{32}$, то достаточно рассмотреть случаи $k = 2, 3, 4$.

В силу равенств

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 K(r^2 + \delta) &= \frac{2(z - \zeta)^4}{(r^2 + \delta)^3}, \quad r^2 = |z - \zeta|^2, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 K(r^2 + \delta) &= \frac{2(z - \zeta)^3(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(r^2 + \delta)^3} - \frac{3(z - \zeta)^2}{(r^2 + \delta)^2} = \left(\frac{2r^2}{(r^2 + \delta)^3} - \frac{3}{(r^2 + \delta)^2} \right) (z - \zeta)^2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 K(r^2 + \delta) &= \frac{2r^4}{(r^2 + \delta)^3} - \frac{4r^2}{(r^2 + \delta)^2} + \frac{2}{(r^2 + \delta)}, \end{aligned}$$

переходя к полярным координатам $\zeta - z = \rho \exp(i\theta)$, для функции $J_{k2}(z, \delta)$ при $k = 4, 3, 2$ имеем

$$J_{42}(z, \delta) = \frac{1}{8\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5}{(\rho^2 + \delta)^3} f(z + \rho \exp(i\theta)) \exp(4i\theta) d\theta d\rho, \tag{25}$$

$$J_{32}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\rho^2}{(\rho^2 + \delta)^3} - \frac{3}{(\rho^2 + \delta)^2} \right) \rho^3 f(z + \rho \exp(i\theta)) \exp(2i\theta) d\theta d\rho, \quad (26)$$

$$J_{22}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{2\delta^2 \rho}{(\rho^2 + \delta)^3} f(z + \rho \exp(i\theta)) d\theta d\rho. \quad (27)$$

Вследствие условия k -усиленной непрерывности функции $f(z) = f(x, y)$ при $k = 2, 4$, функции

$$\int_\rho^d \frac{ds}{s} \int_0^{2\pi} f(z + s \exp(i\theta)) \exp(ik\theta) d\theta = f_k(z, \rho) - f_k(z, d) \quad (28)$$

непрерывны по ρ на отрезке $[0, d]$, дифференцируемы при $\rho > 0$ и

$$\frac{df_k(z, \rho)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} f(z + \rho \exp(i\theta)) \exp(ik\theta) d\theta. \quad (29)$$

Воспользовавшись интегрированием по частям, равенства (25), (26) в силу (28) и (29) запишем в виде

$$J_{42}(z, \delta) = \frac{1}{8\pi} \int_0^d \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \delta} \right)^3 (f_4(z, \rho) - f_4(z, d)) d\rho, \quad (30)$$

$$J_{32}(z, \delta) = \frac{1}{16\pi} \int_0^d \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{2\rho^6}{(\rho^2 + \delta)^3} - \frac{3\rho^4}{(\rho^2 + \delta)^2} \right) (f_2(z, \rho) - f_2(z, d)) d\rho. \quad (31)$$

Каждая из функций

$$L(\rho, \delta) = \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \delta} \right)^3 \quad \text{и} \quad L(\rho, \delta) = 3 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \delta} \right)^3 - 2 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \delta} \right)^2$$

на множестве $[0, R] \times (0, 1]$, где $R = d$, удовлетворяет условиям 1) и 2). Поэтому из представлений (30), (31) и леммы 4 следует, что имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_{42}(z, \delta) = \frac{1}{8\pi} (f_4(z, 0) - f_4(z, d)), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{32}(z, \delta) = -\frac{1}{16\pi} (f_2(z, 0) - f_2(z, d)),$$

причём сходимость в них равномерна на круге $|z - z_0| \leq d$.

Из равенства (27) вытекает, что равномерно по $z \in U(z_0, d)$ имеет место сходимость

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 u_\delta(z) = \frac{1}{16} f(z).$$

Таким образом, установлено существование предела функции $J_{k2}(z, \delta)$, $k = \overline{0, 4}$, при $\delta \rightarrow 0$ равномерного по $z \in U(z_0, d)$. Поэтому из представления (23) и равенства (24) следует существование равномерного по $z \in U(z_0, d)$ предела (22), что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из приведённого доказательства вытекает, что для частных производных $(\partial/\partial z)^k (\partial/\partial \bar{z})^l u_0(z)$ функции $u_0(z)$ справедливы представления

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^4 u_0(z) = \frac{1}{8} f_4(z), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 u_0(z) = \frac{1}{8} f_{-4}(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 u_0(z) = -\frac{1}{16} f_2(z),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 u_0(z) = \frac{1}{16} f(z), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u_0(z) = -\frac{1}{16} f_{-2}(z),$$

или для частных производных $(\partial/\partial x)^k (\partial/\partial y)^l u_0(x, y)$ функции $u_0(x, y)$ – представления

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 u_0(x, y) = \frac{1}{8} [f_4(z) + f_{-4}(z) - 2f_2(z) - 2f_{-2}(z) + 3f(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u_0(x, y) = \frac{1}{8} [f_4(z) + f_{-4}(z) + 2f_2(z) + 2f_{-2}(z) + 3f(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0(x, y) = \frac{i}{8} [f_{-4}(z) - f_4(z) + f_2(z) - f_{-2}(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_0(x, y) = \frac{1}{8} [f(z) - f_4(z) - f_{-4}(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u_0(x, y) = \frac{i}{8} [f_4(z) - f_{-4}(z) + f_2(z) - f_{-2}(z)].$$

Пример. Функция, определённая формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2 |\ln(x^2 + y^2)|^\beta}, & \text{если } 0 < x^2 + y^2 \leq 3/4, \end{cases}$$

при $\beta > 0$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3/4\}$. В этой области уравнение Пуассона $\Delta u = f(x, y)$ имеет классическое решение при любом $\beta > 0$, а уравнение $\Delta^2 u = f(x, y)$ не имеет классического решения при $\beta \leq 1$ и имеет классическое решение при $\beta > 1$.

Так как всякое обобщённое решение однородного уравнения $\Delta^2(u) = 0$ в области G является бесконечно дифференцируемой функцией (см., например, [5]), то из теоремы 2 следует

Теорема 3. В условиях теоремы 2 каждое обобщённое решение уравнения (1) в области G является классическим решением этого уравнения в этой области.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5 из работы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1976.
5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 2005.
6. Мухамадиев Э.М., Гришанина Г.Э., Гришанин А.А. О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 196–211.
7. Байзаев С., Гришанина Г.Э., Мухамадиев Э. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения неоднородной системы Коши–Римана // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 215–227.

Государственный университет “Дубна”, г. Дубна,
Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 22.07.2020 г.
После доработки 22.07.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.