*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 338–348*

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.956.6*

# ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

**© 2021 г. А. Н. Зарубин**

Исследуется задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

DOI: 10.31857/S0374064121030055

**Введение.** Учёт последствия и преддействия в классических задачах математической физики приводит к уравнениям с сосредоточенным или функциональным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением по временно́й и (или) пространственной переменным. Такие уравнения позволяют провести глубокий и достаточно полный качественный анализ реальных гидродинамических [1] систем (вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен); построить теорию многослойных оболочек и пластин [2], теорию плазмы [3]; изучить колебания кристаллической решётки [4].

В предлагаемой работе исследуется аналог задачи Трикоми для обобщённого уравнения Лаврентьева–Бицадзе с сосредоточенным некарлемановским запаздыванием и опережением по пространственной координате вида

$$(\operatorname{sgn} y)U_{xx}(x,y)+\sum_{n=-n_1}^{n_2}a_{n+n_1}U_{yy}(x-n\tau,y)=0 \tag{1}$$

в области $D=D^+\bigcup D^-$, где $D^+=\{(x,y):0<x<(n_2+1)\tau,\ \ y>0\}=\bigcup_{k=0}^{n_2}D_k^+$ и $D^-=\bigcup_{k=0}^{n_2}D_k^{\gamma_{n_2}}$ – эллиптическая и гиперболическая части области $D$, причём $D_k^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\ \ y>0\}$ $(k=\overline{-n_1,n_2})$; $n_1,n_2\in\mathbb{N}$; $\tau=\mathrm{const}>0$, $a_{n+n_1}\equiv\mathrm{const}$; $D_k^{\gamma_{n_2}}=\{(x,y):-y+k\tau\gamma_{n_2}<x\gamma_{n_2}<y+(k+1)\tau\gamma_{n_2},\ \ -\gamma_{n_2}\tau/2<y<0\}$ $(k=\overline{-n_1,n_2+1})$; $0<\gamma_0<\gamma_1<\ldots<\gamma_{n_2}$; $\gamma_j^2$ $(j=\overline{0,n_2})$ – действительные собственные значения матрицы коэффициентов системы уравнений, к которой приводится уравнение (1).

Пусть $D_k=D_k^+\bigcup D_k^-\bigcup I_k$ $(k=\overline{-n_1,n_2+1})$; $I=\bigcup_{n=-n_1}^{n_2+1}I_n$, $I_n=\{(x,y):n\tau<x<(n+1)\tau,\ \ y=0\}$; $J=\bigcup_{k=0}^{n_2-1}J_k=\bigcup_{k=0}^{n_2-1}\{(x,y):x=(k+1)\tau,y>0\}$. Тогда $D=(\bigcup_{k=0}^{n_2}D_k)\bigcup(\bigcup_{j=0}^{n_2-1}J_j)$.

**1. Постановка задачи. Однозначная разрешимость.** Не ограничивая общности, для наглядности и упрощения записи рассмотрим уравнение (1) при $n_1=n_2=1$, т.е. рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)U_{xx}(x,y)+a_0U_{yy}(x+\tau,y)+a_1U_{yy}(x,y)+a_2U_{yy}(x-\tau,y)=0, \tag{2}$$

где $(x,y)\in D=D_0\bigcup D_1\bigcup J_0$.

**Задача T.** Найти в области $D=D_0\bigcup D_1\bigcup J_0$ решение $U(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^2(D\setminus J_0)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$U(x,y)=r(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D_{-1}}; \tag{3}$$

$$U(x,y)=\rho(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D_2}; \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+\infty} U(x,y)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\tau; \tag{5}$$

$$U(x,\gamma_j(k\tau-x))=\psi_k(x), \quad k\tau\leqslant x\leqslant (2k+1)\tau/2 \quad (j,k=0,1); \tag{6}$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-)=U(x,0+)=\omega(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 2\tau, \tag{7}$$

$$U_y(x,0-)=U_y(x,0+)=\nu(x), \quad 0<x<2\tau, \quad x\neq\tau, \tag{8}$$

причём

$$\psi_0(0)=r(0,0); \quad r(x,+\infty)=\rho(x,+\infty)=0, \quad \gamma_j=\sqrt{a_1+(-1)^j a_0} \quad (j=0,1), \tag{9}$$

где $r(x,y)$, $\rho(x,y)$, $\psi_k(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega(x)$, $\nu(x)$ и $\gamma_j$ – искомые функции и собственные значения, которые находятся в процессе решения задачи. Области $D$ и $D_{-1}$, $D_2$ показаны на рисунке.

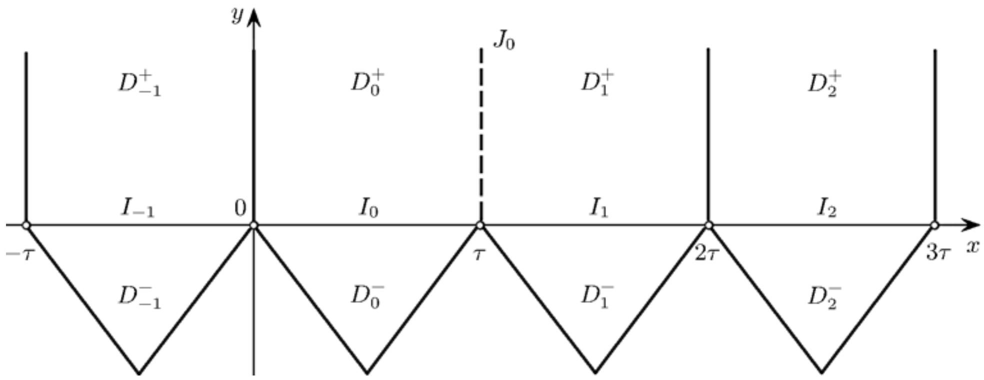


**Рисунок.** Области $D_k=D_k^+\bigcup D_k^-$, $k=\overline{-1,2}$; область $D=D_0\bigcup D_1\bigcup J_0$; интервалы $I_k$, $k=\overline{-1,2}$; $I=\bigcup_{k=-1}^2 I_k$; луч $J_0$.

**Теорема.** *Если имеют место включения*

$$r(x,y)\in C(\overline{D_{-1}})\bigcap C^4(D_{-1}), \quad \rho(x,y)\in C(\overline{D_2})\bigcap C^4(D_2),$$

$$\psi_k(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\bigcap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2) \quad (k=0,1),$$

*справедливо равенство* $a_0=a_2$ *и выполняются соотношения* $a_1>a_0>0$; $r(0,y)=\rho(2\tau,y)$, $y\geqslant 0$; $\psi_0(0)=r(0,0)$; $r(x,+\infty)=\rho(x,+\infty)=0$, $0\leqslant x\leqslant 2\tau$, *то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* $T$.

**Доказательство.** В терминах функций

$$U_j(x,y)=U(x,y), \quad (x,y)\in D_j \quad (j=\overline{-1,2}), \tag{10}$$

уравнение (2) представим с учётом условий (3), (4) в виде системы уравнений смешанного типа, определённых соответственно в областях $D_0$ и $D_1$:

$$(\operatorname{sgn} y)U_{0xx}(x,y)+a_0U_{1yy}(x+\tau,y)+a_1U_{0yy}(x,y)=-a_2r_{yy}(x-\tau,y), \quad (x,y)\in D_0,$$

$$(\operatorname{sgn} y)U_{1xx}(x,y)+a_1U_{1yy}(x,y)+a_2U_{0yy}(x-\tau,y)=-a_0\rho_{yy}(x+\tau,y), \quad (x,y)\in D_1.$$

Заменяя во втором уравнении системы $x$ на $x+\tau$, получаем

$$(\operatorname{sgn} y)U_{0xx}(x,y)+a_0U_{1yy}(x+\tau,y)+a_1U_{0yy}(x,y)=-a_2r_{yy}(x-\tau,y), \quad (x,y)\in D_0, \tag{11}$$

$$(\operatorname{sgn} y)U_{1xx}(x+\tau,y)+a_1U_{1yy}(x+\tau,y)+a_2U_{0yy}(x,y)=-a_0\rho_{yy}(x+2\tau,y), \quad (x,y)\in D_0. \tag{12}$$

Пусть $a_0 = a_2$ и

$$q_j(x,y) = (U_0(x,y) + (-1)^j U_1(x+\tau, y))/2 \quad (j = 0, 1). \tag{13}$$

Тогда, складывая и вычитая уравнения (11), (12), на основании (13) и (9) приходим к системе уравнений смешанного типа

$$(\operatorname{sgn} y) q_{jxx}(x,y) + \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = -a_0 f_j(x,y), \quad (x,y) \in D_0, \tag{14}$$

где

$$f_j(x,y) = (r_{yy}(x-\tau, y) + (-1)^j \rho_{yy}(x+2\tau, y))/2 \quad (j = 0, 1). \tag{15}$$

Множество решений неоднородных уравнений Лаврентьева–Бицадзе (14) содержит все решения уравнения (2), которые можно выделить в силу (13), (10), используя соотношение

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y), \quad (x,y) \in D_0, \tag{16}$$

или

$$U(x,y) = U_1(x,y) = q_0(x-\tau, y) - q_1(x-\tau, y), \quad (x,y) \in D_1. \tag{17}$$

Таким образом, поставленная задача редуцируется к двум задачам Трикоми для уравнения (14) относительно функции $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0}) \bigcap C^2(D_0)$, причём $q_j(x,y)$, согласно (13), (3)–(8) и равенствам

$$U_0(0,y) = U_0(\tau,y) = U_1(\tau,y) = U_1(2\tau,y) = r(0,y) = \rho(2\tau,y),$$

должны удовлетворять граничным условиям

$$q_j(0,y) = q_j(\tau,y) = \overline{r}_j(y) \equiv r(0,y) + (-1)^j \rho(2\tau,y), \quad y \geqslant 0; \tag{18}$$

$$\lim_{y\to+\infty} q_j(x,y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau; \tag{19}$$

$$q_j(x, \gamma_j(-x)) = \overline{\psi}_j(x) \equiv \psi_0(x) + (-1)^j \psi_1(x+\tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau/2; \tag{20}$$

$$q_j(x,0-) = q_j(x,0+) = \overline{\omega}_j(x) \equiv \omega(x) + (-1)^j \omega(x+\tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau; \tag{21}$$

$$q_{jy}(x,0-) = q_{jy}(x,0+) = \overline{\nu}_j(x) \equiv \nu(x) + (-1)^j \nu(x+\tau), \quad 0 < x < \tau. \tag{22}$$

Здесь и далее $j = 0, 1$.

**Единственность решения** задачи $T$ для уравнения (2) в области $D$ следует из того, что однородная задача $T$ имеет только тривиальное решение $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$, поскольку эквивалентна однородной задаче $T$ для уравнения

$$(\operatorname{sgn} y) q_{jxx}(x,y) + \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_0, \tag{23}$$

при однородных условиях (18)–(20), имеющей только тривиальное решение $q_j(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_0}$.

**Доказательство** этого факта основано на установлении знакоопределённости интеграла

$$\beta_j = \int_0^\tau \overline{\omega}_j(x) \overline{\nu}_j(x) dx.$$

**Лемма 1.** *Если $q_j(x,y)$ – решение уравнения (23) в области $\overline{D_0^+}$, принадлежащее классу $C(\overline{D_0^+}) \bigcap C^2(D_0^+)$ и обращающееся в нуль при $x = 0$, $x = \tau$ $(y \geqslant 0)$ и $y \to +\infty$ $(0 \leqslant x \leqslant \tau)$, то*

$$\beta_j \leqslant 0 \tag{24}$$

*и*
$$\gamma_j^2\beta_j + \iint\limits_{D_0^+} [q_{jx}^2(x,y) + \gamma_j^2 q_{jy}^2(x,y)]\,dx\,dy = 0. \tag{25}$$

**Доказательство** проводится известным методом Трикоми [5, с. 491–493; 6, с. 128–130].

**Лемма 2.** *Если* $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^-})\bigcap C^2(D_0^-)$ *– решение уравнения (23) в области* $\overline{D_0^-}$, *обращающееся в нуль на характеристике* $y = -\gamma_j x$ $(0 \leqslant x \leqslant \tau/2)$, *то*
$$\beta_j \geqslant 0. \tag{26}$$

**Доказательство** проводится аналогично [5, с. 491–493; 6, с. 128–130].

Из неравенств (24), (26) следует, что $\beta_j = 0$, а потому в силу (25) имеем равенство
$$\iint\limits_{D_0^+} [q_{jx}^2(x,y) + \gamma_j^2 q_{jy}^2(x,y)]\,dx\,dy = 0,$$
из которого следует, что $q_{jx}(x,y) = q_{jy}(x,y) \equiv 0$, т.е. $q_j(x,y) \equiv \mathrm{const}$ в $D_0^+$. Однородность граничных условий в $D_0^+$ и включение $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^+})$ позволяют утверждать, что $q_j(x,y) \equiv$ $\equiv 0$ в $\overline{D_0^+}$. Значит, $q_j(x,0) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$. Последнее тождество в совокупности с однородным условием (20) обеспечивают тривиальность решения $q_j(x,y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D_0^-}$. Из доказанной тривиальности решений $q_j(x,y)$ в $\overline{D_0^+}$ и $\overline{D_0^-}$ вытекает тривиальность решения $q_j(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_0}$. Таким образом, единственность решения задачи Трикоми для уравнения (14) и граничных условий (18)–(20) в области $\overline{D_0}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи $T$ для уравнения (2) и граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$ следует из того, что $q_j(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_0}$, и равенств (16), (17): $U(x,y) =$ $= U_j(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D_j}$. Это означает единственность решения задачи $T$ для уравнения (2) и граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$.

**Доказательство существования** решения $U(x,y)$ задачи $T$ в области $D$ для уравнения (2) основано на решениях $q_j(x,y)$ задач в области эллиптичности $D_0^+$ и в области гиперболичности $D_0^-$ для уравнения (14).

**Задача Неймана–Дирихле.** Найти в области $D_0^+$ решение $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^+})\bigcap C^2(D_0^+)$ уравнения (14)
$$q_{jxx}(x,y) + \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = -a_0 f_j(x,y), \quad (x,y) \in D_0^+, \tag{27}$$
удовлетворяющее условиям (18), (19), (22).

**Задача Дарбу.** Найти в области $D_0^-$ решение $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^-})\bigcap C^2(D_0^-)$ уравнения (14)
$$q_{jxx}(x,y) - \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = a_0 f_j(x,y), \quad (x,y) \in D_0^-, \tag{28}$$
удовлетворяющее условиям (20), (22).

**Вопрос о существовании** решения $q_j(x,y)$ задачи Трикоми для уравнения (14) в области $D_0$ связан с разрешимостью сингулярного интегрального уравнения относительно функции $\overline{\nu}_j(x)$, $0 < x < \tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённых на линию изменения типа $y = 0$, $0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана–Дирихле из $D_0^+$ и задачи Дарбу из $D_0^-$.

**Лемма 3.** *Если имеют место включения* $\overline{r}_j(y) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\overline{\nu}_j(x) \in C^1(0,\tau)$ *и соотношение* $\lim\limits_{y\to+\infty} \overline{r}_j(y) = 0$, *то существует единственное решение задачи Неймана–Дирихле* $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^+})\bigcap C^2(D_0^+)$. *Это решение представимо в виде*
$$q_j(x,y) = -\gamma_j \int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta) M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta - \frac{a_0}{2\gamma_j} \int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0) M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta+\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta+$$

$$+\frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\biggl[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}\biggr]\,dt,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+},\tag{29}$$

*где*

$$M_j(x,y;\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(z+y)/\gamma_j\tau)-\cos(\pi(\zeta+x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi(z+y)/\gamma_j\tau)-\cos(\pi(\zeta-x)/\tau)}.$$

**Доказательство.** Решение задачи Неймана–Дирихле для уравнения (27) будем искать в виде суммы решений

$$q_j(x,y)=q_{j1}(x,y)+q_{j2}(x,y)\tag{30}$$

двух вспомогательных задач, где функция $q_{j1}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$q_{j1xx}(x,y)+\gamma_j^2q_{j1yy}(x,y)=-a_0f_j(x,y),\quad (x,y)\in D_0^+,\tag{31}$$

и условиям

$$q_{j1}(0,y)=q_{j1}(\tau,y)=0,\quad y\geqslant 0,\tag{32}$$

$$\lim_{y\to+\infty}q_{j1}(x,y)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau,\tag{33}$$

$$\frac{\partial q_{j1}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\overline{\nu}_j(x),\quad 0<x<\tau;\tag{34}$$

а функция $q_{j2}(x,y)$ – уравнению

$$q_{j2xx}(x,y)+\gamma_j^2q_{j2yy}(x,y)=0,\quad (x,y)\in D_0^+,\tag{35}$$

и условиям

$$q_{j2}(0,y)=q_{j2}(\tau,y)=\overline{r}_j(y),\quad y\geqslant 0,\tag{36}$$

$$\lim_{y\to+\infty}q_{j2}(x,y)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau,\tag{37}$$

$$\frac{\partial q_{j2}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\quad 0<x<\tau.\tag{38}$$

**Решение первой вспомогательной задачи** (31)–(34) будем искать в виде ряда

$$q_{j1}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{nj}(y)\sin(\mu_nx),\quad (x,y)\in\overline{D_0^+},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{\tau},\tag{39}$$

удовлетворяющего условиям (32), предполагая его равномерную сходимость в $\overline{D_0^+}$ и равномерную сходимость в $D_0^+$ рядов, полученных из него почленным дифференцированием по $x$ и $y$ дважды.

Подстановка ряда (39) в уравнение (31) приводит к разложению в ряд Фурье по синусам правой части уравнения (31), а его обращение – к уравнению

$$C''_{nj}(y)-\frac{\mu_n^2}{\gamma_j^2}C_{nj}(y)=-\frac{a_0}{\gamma_j^2}\overline{f}_{jn}(y)\equiv-\frac{2a_0}{\tau\gamma_j^2}\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,y)\sin(\mu_n\zeta)\,d\zeta,\quad y>0,\tag{40}$$

в котором в силу (33), (34), (39) функции $C_{nj}(y)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{y\to+\infty} C_{nj}(y) = 0, \tag{41}$$

$$C'_{nj}(0) = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)\sin(\mu_n\zeta)\,d\zeta; \tag{42}$$

причём, согласно (40), (15) и условиям теоремы, справедливо равенство

$$\lim_{y\to+\infty} \overline{f}_{jn}(y) = 0. \tag{43}$$

Общее решение уравнения (40), удовлетворяющее условию (41), запишем в виде

$$C_{nj}(y) = k_n e^{-\mu_n y/\gamma_j} + \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\int\limits_y^{+\infty} \overline{f}_{jn}(\zeta)e^{-\mu_n(\zeta-y)/\gamma_j}\,d\zeta, \quad y>0, \quad k_n \equiv \mathrm{const}, \tag{44}$$

так как абсолютная сходимость интеграла в (44) вместе с соотношением (43) и правилом Лопиталя позволяют утверждать, что

$$\lim_{y\to+\infty} C_{nj}(y) = \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\lim_{y\to+\infty} e^{\mu_n y/\gamma_j}\int\limits_y^{+\infty} \overline{f}_{jn}(\zeta)e^{-\mu_n\zeta/\gamma_j}\,d\zeta =$$

$$= \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\lim_{y\to+\infty}\frac{-\overline{f}_{jn}(y)e^{-\mu_n y/\gamma_j}}{-\mu_n\gamma_j^{-1}e^{-\mu_n y/\gamma}} = \frac{a_0}{2\mu_n^2}\lim_{y\to+\infty}\overline{f}_{jn}(y) = 0.$$

Подстановка в (44) значения $k_n$, которое найдено с помощью условия (42), приводит к решению $C_{nj}(y)$ уравнения (40), удовлетворяющему условиям (41), (42) и имеющему вид

$$C_{nj}(y) = -\frac{\gamma_j}{\mu_n}C'_{nj}(0)e^{-\mu_n y/\gamma_j} + \frac{a_0}{2\mu_n^2}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}'_{jn}(z)e^{-\mu_n(z+y)/\gamma_j}\,dz +$$

$$+ \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_{jn}(z+y)e^{-\mu_n z/\gamma_j}\,dz, \quad y>0. \tag{45}$$

Равенство (39) вместе с (45), (40), (42) и формулой 5.4.12.6 из [7] для суммирования рядов приводит к искомому решению задачи (31)–(34):

$$q_{j1}(x,y) = \sum_{n=1}^\infty C_{nj}(y)\sin(\mu_n x) = -\gamma_j\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta -$$

$$- \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta + \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta, \tag{46}$$

где $M_j(x,y;\zeta,z)$ определено в формулировке леммы 3.

**Решение второй вспомогательной** задачи (35)–(38) будем искать, используя косинус-преобразование Фурье, удовлетворяющее условиям (37), (38):

$$q_{j2}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j x}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j x})\cos(\lambda y)\,d\lambda,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+}. \tag{47}$$

Для нахождения функций $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$ воспользуемся краевыми условиями (36), т.е.

$$q_{j2}(0,y)=\overline{r}_j(y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)+B_j(\lambda))\cos(\lambda y)\,d\lambda,$$

$$q_{j2}(\tau,y)=\overline{r}_j(y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j\tau}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j\tau})\cos(\lambda y)\,d\lambda.$$

Так как $\overline{r}_j(y)$ – функция ограниченной вариации на $[0,+\infty)$, $\overline{r}_j(+\infty)=0$, то, обратив косинус-преобразование Фурье, получим

$$A_j(\lambda)+B_j(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt,$$

$$A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j\tau}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j\tau}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Поэтому

$$A_j(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{1-e^{-\lambda\gamma_j\tau}}{\operatorname{sh}(\lambda\gamma_j\tau)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt,\quad B_j(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\lambda\gamma_j\tau}-1}{\operatorname{sh}(\lambda\gamma_j\tau)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Значит,

$$A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j x}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j x}=\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{ch}(\lambda\gamma_j(2x-\tau)/2)}{\operatorname{ch}(\lambda\gamma_j\tau/2)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Заменяя подынтегральную функцию в (47) согласно последнему равенству и применяя формулу 1.9.(12) из [8], получаем искомое решение $q_{j2}(x,y)$ задачи (35)–(38):

$$q_{j2}(x,y)=\frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\biggl[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}+$$
$$+\frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}\biggr]\,dt,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+}. \tag{48}$$

Таким образом, решение задачи Неймана–Дирихле (27), (18), (19), (22) в силу (30), (46), (48) имеет вид (29).

**Функциональное соотношение** между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённое из $\overline{D_0^+}$ на линию изменения типа $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\tau$, найдём из решения задачи Неймана–Дирихле (29), полагая в нём $y=0$ и дифференцируя:

$$\overline{\omega}_j'(x)=\frac{\gamma_j}{2\tau}\int\limits_0^{\tau}\overline{\nu}_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau)-\operatorname{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]\,d\zeta+\delta_j(x),\quad 0<x<\tau, \tag{49}$$

где

$$\delta_j(x) = \frac{a_0}{4\tau\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^{\tau} [2f_j(\zeta,z) - f_j(\zeta,0)]\left[\frac{\sin(\pi(\zeta+x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi z/\gamma_j\tau) - \cos(\pi(\zeta+x)/\tau)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\pi(\zeta-x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi z/\gamma_j\tau) - \cos(\pi(\zeta-x)/\tau)}\right] d\zeta +$$

$$+ \frac{2\pi}{\gamma_j\tau^2}\cos\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty} \overline{r}_j(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/\gamma_j\tau)[\operatorname{sh}^2(\pi t/\gamma_j\tau) - \sin^2(\pi x/\tau)]}{[\operatorname{ch}^2(\pi t/\gamma_j\tau) - \cos^2(\pi x/\tau)]^2}\,dt,$$

причём $\delta_j(x) \in C^1[0,\tau]$.

**Лемма 4.** *Если выполняются включения* $\overline{\nu}_j(x) \in C^1(0,\tau)$, $\overline{\psi}_j(x) \in C[0,\tau/2]\bigcap C^2(0,\tau/2)$ *и равенство* $\overline{\psi}_j(0) = \overline{r}_j(0)$, *то существует единственное решение* $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0^-})\bigcap C^2(D_0^-)$ *задачи Дарбу. Это решение имеет вид*

$$q_j(x,y) = \gamma_j \int\limits_0^{x+y/\gamma_j} \overline{\nu}_j(\zeta)\,d\zeta - \overline{\psi}_j(0) + \overline{\psi}_j((x-y/\gamma_j)/2) + \overline{\psi}_j((x+y/\gamma_j)/2) - B_j(x,y) +$$

$$+ B_j((x-y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x-y/\gamma_j)/2) + B_j((x+y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x+y/\gamma_j)/2), \quad (x,y) \in \overline{D_0^-}, \quad (50)$$

*где*

$$B_j(x,y) = \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^y dt \int\limits_{x-(y-t)/\gamma_j}^{x+(y-t)/\gamma_j} f_j(\zeta,t)\,d\zeta.$$

**Доказательство** представления (50) вытекает из общего решения неоднородного уравнения (28) колебаний струны

$$q_j(x,y) = P_{j1}(x-y/\gamma_j) + P_{j2}(x+y/\gamma_j) -$$

$$- \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^y dt \int\limits_{x-(y-t)/\gamma_j}^{x+(y-t)/\gamma_j} f_j(\zeta,t)\,d\zeta, \quad (x,y) \in D_0^-, \quad P_{j1}, P_{j2} \in C^2[0,\tau],$$

и краевых условий (20), (22).

**Функциональное соотношение** между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённое из $D_0^-$ на линию изменения типа $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$, найдём из решения (50) задачи Дарбу, полагая в нём $y=0$ и дифференцируя:

$$\overline{\omega}_j'(x) = \gamma_j\overline{\nu}_j(x) - m_j(x), \quad 0 < x < \tau, \quad (51)$$

где

$$m_j(x) = \frac{a_0}{\gamma_j}\int\limits_0^{-x\gamma_j/2} f_j(x+t/\gamma_j, t)\,dt - \overline{\psi}_j'(x/2),$$

причём $m_j(x) \in C^1[0,\tau]$.

**Вопрос о существовании решения** задачи Трикоми (14), (18)–(20) в силу условий сопряжения (21), (22) и функциональных соотношений (49), (51) сведён к разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$\overline{\nu}_j(x) - \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)]\,d\zeta = \Theta_j(x), \quad 0 < x < \tau, \tag{52}$$

которое после очевидного преобразований ядра запишем в виде

$$\overline{\nu}_j(x) - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)\frac{\sin(\pi\zeta/\tau)\,d\zeta}{\cos(\pi\zeta/\tau) - \cos(\pi x/\tau)} = \Theta_j(x), \quad 0 < x < \tau, \tag{53}$$

где $\Theta_j(x) = (\delta_j(x) + m_j(x))/\gamma_j$.

Проведя в уравнении (53) замену переменных и функций по формулам

$$\overline{\nu}_j(x) = \overline{\overline{\nu}}_j(y), \quad \Theta_j(x) = \overline{\Theta}_j(y), \quad y = \cos(\pi x/\tau), \quad t = \cos(\pi\zeta/\tau), \tag{54}$$

получим уравнение

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(t)\frac{dt}{t - y} = \overline{\Theta}_j(y), \quad -1 < y < 1. \tag{55}$$

Переход от уравнения (53) к уравнению (55) законен ввиду монотонности функции $\cos(\pi x/\tau)$, $0 < x < \tau$.

Уравнение (55) является уравнением нормального типа [9, с. 177]. Его индекс [9, с. 101, 176] равен нулю. В силу единственности решения задачи Трикоми (14), (18)–(20) уравнение (55) однозначно обратимо.

**Регуляризацию сингулярного интегрального уравнения** (55) проведём в классе функций $\overline{\overline{\nu}}_j(y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера при $y \in (-1, 1)$, методом сингуляризации [10, 11].

Действуя на обе части уравнения (55) оператором

$$K\varphi \equiv \varphi(s) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \varphi(p)\frac{dp}{p - s},$$

получаем

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p - y} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{t - y}\left[\overline{\overline{\nu}}_j(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p - t}\right]dt = \overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p - y},$$

где $-1 < y < 1$, т.е.

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{t - y}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p - t} = \overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p - y}, \quad -1 < y < 1. \tag{56}$$

Формула Пуанкаре–Бертрана [9, с. 63] позволяет поменять порядок интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши, а необходимые при этом преобразования приводят к решению уравнения (56) вида

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) = \frac{1}{2}\overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p - y}, \quad -1 < y < 1. \tag{57}$$

Возвращаясь к старым переменным и функциям по формулам (54), из уравнения (57) получаем решение сингулярного интегрального уравнения (53):

$$\overline{\nu}_j(x) = \frac{1}{2}\Theta_j(x) + \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\sin(\pi\zeta/\tau)}{\cos(\pi\zeta/\tau) - \cos(\pi x/\tau)}\Theta_j(\zeta)\,d\zeta, \quad 0 < x < \tau,$$

а следовательно, уравнения (52):

$$\overline{\nu}_j(x) = \frac{1}{2}\Theta_j(x) + \frac{1}{4\tau}\int\limits_0^\tau \Theta_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)]\,d\zeta, \quad 0 < x < \tau, \tag{58}$$

единственность которого устанавливается теоремой Нётера [9, с. 208].

Найденное в (58) представление функции $\overline{\nu}_j(x)$ позволяет получить с помощью (49) или (51) выражение для $\overline{\omega}_j(x)$.

Подставляя $\overline{\nu}_j(x)$ в (29) и (50), находим искомые решения $q_j(x,y)$ задачи Неймана–Дирихле (27), (18), (19), (22) в области $D_0^+$ и задачи Дарбу (28), (20), (22) в области $D_0^-$.

Таким образом, задача Трикоми (14), (18)–(20) решена в области $D_0 = D_0^+ \bigcup D_0^- \bigcup I_0$.

Вернёмся к задаче Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе (2) в области $D_0$.

Её решение в силу (16) и (29) имеет в области $\overline{D_0^+}$ вид

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y) = \sum_{j=0}^{1} q_j(x,y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\biggl\{ -\gamma_j\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta - \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta + \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\biggl[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau) - \cos(2\pi x/\tau)} +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau) - \cos(2\pi x/\tau)}\biggr]dt\biggr\}, \quad (x,y) \in \overline{D_0^+}; \tag{59}$$

а в области $\overline{D_0^-}$ согласно (16), (50) – вид

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y) = \sum_{j=0}^{1} q_j(x,y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\biggl\{\gamma_j\int\limits_0^{x+y/\gamma_j}\overline{\nu}_j(\zeta)\,d\zeta - \overline{\psi}_j(0) + \overline{\psi}_j((x-y/\gamma_j)/2) + \overline{\psi}_j((x+y/\gamma_j)/2) - B_j(x,y) +$$

$$+ B_j((x-y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x-y/\gamma_j)/2) + B_j((x+y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x+y/\gamma_j)/2)\biggr\}, \quad (x,y) \in \overline{D_0^-}; \tag{60}$$

где функции $f_j(x,y)$, $\overline{r}_j(y)$, $\overline{\psi}_j(x)$, $\overline{\nu}_j(x)$ $(j=0,1)$ определяются равенствами (15), (18), (20), (22) соответственно, причём $\overline{\nu}_j(x)$ – решение сингулярного интегрального уравнения (52), найденное в явной форме (58).

Решение задачи Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе (2) в области $D_1$ можно получить из представлений (59) и (60) для $\overline{D_1^+}$ и $\overline{D_1^-}$ соответственно, если в них заменить $x$ на $x-\tau$. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.
2. *Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
3. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
4. *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
5. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
6. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орёл, 1997.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
8. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М., 1969.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
10. *Флайшер Н.М.* Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1965. V. 10. № 5. P. 615–620.
11. *Бабурин Ю.С.* О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. Рязань, 1977. Вып. 10. с. 3–11.


Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.
После доработки 08.05.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.