

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. Н. Миронов

Для уравнения Бианки четвёртого порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Для задачи Дарбу определена функция Римана–Адамара, в терминах которой и построено решение этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121030067

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать, например, работы [1, гл. 3, § 1; 2–7].

В статье [8] для уравнения Бианки третьего порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, а также определена функция Римана–Адамара, с помощью которой построено решение этой задачи.

В данной работе для уравнения Бианки четвёртого порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу и определена функция Римана–Адамара. Уравнения Бианки четвёртого и произвольного порядков рассматривались в работах [9–17].

1. Через $C^{(k_1, \dots, k_n)}(D)$, где k_i – фиксированные неотрицательные целые числа, $i = \overline{1, n}$, обозначим класс функций $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, определённых в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и имеющих в ней непрерывные производные $\partial^{r_1+\dots+r_n} u / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}$ при всех $0 \leq r_i \leq k_i$, $i = \overline{1, n}$.

Далее считаем, что в $\mathbb{R}^4$ задана декартова система координат $Oxyz$.

Уравнением Бианки четвёртого порядка называют уравнение

$$L(u) \equiv u_{xyzt} + a_{1110}u_{xyz} + a_{1101}u_{xyt} + a_{1011}u_{xzt} + a_{0111}u_{yzt} + a_{1100}u_{xy} + a_{1010}u_{xz} + a_{1001}u_{xt} + \\ + a_{0110}u_{yz} + a_{0101}u_{yt} + a_{0011}u_{zt} + a_{1000}u_x + a_{0100}u_y + a_{0010}u_z + a_{0001}u_t + a_{0000}u = f(x, y, z, t). \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) зависят от (x, y, z, t) . Решение класса $C^{(1,1,1,1)}(D)$ уравнения (1) назовём *регулярным* в области D .

Пусть D – область в $\mathbb{R}^4$, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_1 > 0$, $z = 0$, $z = z_1 > 0$, $t = x$, $t = t_1 > 0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям $a_{ijkl} \in C^{(i,j,k,l)}(\overline{D})$. Обозначим через X , Y , Z , S грани многогранника D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = x$ соответственно.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z, t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z, t), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x, y, t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x, y, z), \quad (2)$$

где φ_j , $j = \overline{1, 3}$, и ψ – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi \in C^{(1,1,1)}(\overline{S})$$

и условия согласования

$$\varphi_1(y, 0, t) = \varphi_3(0, y, t), \quad \varphi_1(0, z, t) = \varphi_2(0, z, t), \quad \varphi_2(x, 0, t) = \varphi_3(x, 0, t), \\ \varphi_1(y, z, 0) = \psi(0, y, z), \quad \varphi_2(x, z, x) = \psi(x, 0, z), \quad \varphi_3(x, y, x) = \psi(x, y, 0).$$

Следуя подходу из [1, гл. 3, § 1, п. 2°], докажем существование и единственность решения задачи Дарбу. Формулу решения задачи Гурса [11; 9, § 3, п. 1, с. 49–51] будем рассматривать как представление произвольного регулярного решения уравнения (1). Из указанной формулы выведем интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x, y, z, t_1)$ на плоскости $t = t_1$; из существования и единственности решения этого интегрального уравнения будет следовать существование и единственность решения задачи Дарбу (1), (2).

Задача Гурса. В области $G = \{x_0 < x < x_2, y_0 < y < y_2, z_0 < z < z_2, t_0 < t < t_2\}$ найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\overline{X}_0} = \theta_1(y, z, t), \quad u|_{\overline{Y}_0} = \theta_2(x, z, t), \quad u|_{\overline{Z}_0} = \theta_3(x, y, t), \quad u|_{\overline{T}_0} = \theta_4(x, y, z), \quad (3)$$

где θ_k , $k = \overline{1, 4}$, – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\theta_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}_0), \quad \theta_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}_0), \quad \theta_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}_0), \quad \theta_4 \in C^{(1,1,1)}(\overline{T}_0)$$

и условия согласования

$$\theta_1(y_0, z, t) = \theta_2(x_0, z, t), \quad \theta_1(y, z_0, t) = \theta_3(x_0, y, t), \quad \theta_1(y, z, t_0) = \theta_4(x_0, y, z),$$

$$\theta_2(x, z_0, t) = \theta_3(x, y_0, t), \quad \theta_2(x, z, t_0) = \theta_4(x, y_0, z), \quad \theta_3(x, y, t_0) = \theta_4(x, y, z_0).$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0, T_0 – грани параллелопада G при $x = x_0, y = y_0, z = z_0, t = t_0$.

Решение задачи Гурса существует и единственно, что можно доказать, переходя к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерры. Именно, непосредственно интегрируя уравнение (1) с учётом условий (3), приходим к интегральному уравнению Вольтерры – аналогично тому, как это сделано в [11, § 2, п. 1, с. 25–26] в случае задачи Гурса для уравнения Бианки третьего порядка. Следовательно, решение задачи Гурса (1), (3) существует, единственно и записывается с помощью резольвент интегральных уравнений.

Кратко опишем построение формулы решения задачи Гурса в терминах функции Римана [9; 11, § 3, п. 1]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) - \int_{\tau}^t a_{1110}(x, y, z, \delta) v(x, y, z, \delta) d\delta - \int_{\zeta}^z a_{1101}(x, y, \gamma, t) v(x, y, \gamma, t) d\gamma - \\ - \int_{\eta}^y a_{1011}(x, \beta, z, t) v(x, \beta, z, t) d\beta - \int_{\xi}^x a_{0111}(\alpha, y, z, t) v(\alpha, y, z, t) d\alpha + \\ + \int_{\zeta}^z \int_{\tau}^t a_{1100}(x, y, \gamma, \delta) v(x, y, \gamma, \delta) d\delta d\gamma + \int_{\eta}^y \int_{\tau}^t a_{1010}(x, \beta, z, \delta) v(x, \beta, z, \delta) d\delta d\beta + \\ + \int_{\xi}^x \int_{\tau}^t a_{0110}(\alpha, y, z, \delta) v(\alpha, y, z, \delta) d\delta d\alpha + \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z a_{1001}(x, \beta, \gamma, t) v(x, \beta, \gamma, t) d\gamma d\beta + \\ + \int_{\xi}^x \int_{\zeta}^z a_{0101}(\alpha, y, \gamma, t) v(\alpha, y, \gamma, t) d\gamma d\alpha + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y a_{0011}(\alpha, \beta, z, t) v(\alpha, \beta, z, t) d\beta d\alpha - \\ - \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z \int_{\tau}^t a_{1000}(x, \beta, \gamma, \delta) v(x, \beta, \gamma, \delta) d\delta d\gamma d\beta - \int_{\xi}^x \int_{\zeta}^z \int_{\tau}^t a_{0100}(\xi, y, \gamma, \delta) v(\xi, y, \gamma, \delta) d\delta d\gamma d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y \int_{\tau}^t a_{0010}(\xi, \beta, z, \delta) v(\xi, \beta, z, \delta) d\delta d\beta d\xi - \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z a_{0001}(\xi, \beta, \zeta, t) v(\xi, \beta, \zeta, t) d\zeta d\beta d\xi + \\
& + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z \int_{\tau}^t a_{0000}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) v(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\delta d\gamma d\beta d\alpha = 1.
\end{aligned} \quad (4)$$

Решение v уравнения (4) существует и единственно и представляет собой функцию Римана [9] для уравнения (1). Понятно, что v зависит также от входящих в уравнение (4) переменных ξ, η, ζ, τ . Если нужно подчеркнуть эту зависимость, то пишут $v = R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{0001} &= R_t - a_{1110}R, & A_{0010} &= R_z - a_{1101}R, & A_{0100} &= R_y - a_{1011}R, & A_{1000} &= R_x - a_{0111}R, \\
A_{0011} &= R_{zt} - (a_{1110}R)_z - (a_{1101}R)_t + a_{1100}R, & A_{0101} &= R_{yt} - (a_{1110}R)_y - (a_{1011}R)_t + a_{1010}R, \\
A_{0110} &= R_{yz} - (a_{1101}R)_y - (a_{1011}R)_z + a_{1001}R, & A_{1001} &= R_{xt} - (a_{1110}R)_x - (a_{0111}R)_t + a_{0110}R, \\
A_{1010} &= R_{xz} - (a_{1101}R)_x - (a_{0111}R)_z + a_{0101}R, & A_{1100} &= R_{xy} - (a_{1011}R)_x - (a_{0111}R)_y + a_{0011}R, \\
A_{0111} &= R_{yzt} - (a_{1110}R)_{yz} - (a_{1101}R)_{yt} - (a_{1011}R)_{zt} + (a_{1100}R)_y + (a_{1010}R)_z + (a_{1001}R)_t - a_{1000}R, \\
A_{1011} &= R_{xzt} - (a_{1110}R)_{xz} - (a_{1101}R)_{xt} - (a_{0111}R)_{zt} + (a_{1100}R)_x + (a_{0110}R)_z + (a_{0101}R)_t - a_{0100}R, \\
A_{1101} &= R_{xyt} - (a_{1110}R)_{xy} - (a_{1101}R)_{xt} - (a_{0111}R)_{yt} + (a_{1010}R)_x + (a_{0110}R)_y + (a_{0011}R)_t - a_{0010}R, \\
A_{1110} &= R_{xyz} - (a_{1101}R)_{xy} - (a_{1011}R)_{xz} - (a_{0111}R)_{yz} + (a_{1001}R)_x + (a_{0101}R)_y + (a_{0011}R)_z - a_{0001}R,
\end{aligned} \quad (5)$$

где функция R зависит от переменных $x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau$, а коэффициенты уравнения (1), как сказано выше, — от переменных x, y, z, t .

Непосредственным вычислением несложно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{aligned}
(Ru)_{xyzt} &\equiv RL(u) + (A_{0001})_{xyz} + (A_{0010})_{xyt} + (A_{0100})_{xzt} + (A_{1000})_{yzt} - (A_{0011})_{xy} - (A_{0101})_{xz} - \\
&- (A_{0110})_{xt} - (A_{1001})_{yz} - (A_{1010})_{yt} - (A_{1100})_{zt} + (A_{0111})_x + (A_{1011})_y + (A_{1101})_z + (A_{1110})_t,
\end{aligned} \quad (6)$$

где $u(x, y, z, t)$ — любая функция класса $C^{(1,1,1,1)}$.

Дифференцируя уравнение (4), получаем тождества

$$\begin{aligned}
A_{0001} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta; & A_{0010} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad t = \tau; \\
A_{0100} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad z = \zeta, \quad t = \tau; & A_{1000} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \tau; \\
A_{0011} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad y = \eta; & A_{0101} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad z = \zeta; \\
A_{0110} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad t = \tau; & A_{1001} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad y = \eta, \quad z = \zeta; \\
A_{1010} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad y = \eta, \quad t = \tau; & A_{1100} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad t = \tau; \\
A_{0111} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \quad t = \tau; & A_{1011} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad y = \eta; \\
A_{1101} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta; & A_{1110} &\equiv 0 \quad \text{при} \quad t = \tau.
\end{aligned} \quad (7)$$

Считая в тождестве (6) функцию $u(x, y, z, t)$ решением уравнения (1), меняя ролями переменные $(x, \xi), (y, \eta), (z, \zeta), (t, \tau)$ и вычисляя четырёхкратный интеграл по ξ, η, ζ, τ в пределах $x_0 < \xi < x, y_0 < \eta < y, z_0 < \zeta < z, t_0 < \tau < t$ с учётом тождеств (7), получаем формулу (4) из [9], которая даёт решение задачи Гурса.

Докажем теперь существование и единственность решения задачи Дарбу при помощи её редукции к задаче Гурса в области D : найти регулярное решение уравнения (1) в D по условиям на плоскостях $x = 0, y = 0, z = 0, t = t_1$. Для этого по данным задачи Дарбу надо однозначно определить недостающее условие задачи Гурса, т.е. функцию $u(x, y, z, t_1)$.

В [9, формула (4)] получена формула для функции $v(x, y, z, t)$. Положим в этой формуле $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $t_0 = t_1$, $t = x$. Тогда левая часть указанной формулы для $u(x, y, z, t)$ обращается в функцию $\psi(x, y, z)$, а сама эта формула примет вид

$$\begin{aligned} R(x, y, z, t_1, x, y, z, x)u(x, y, z, t_1) - \int_0^z (A_{0010}u)(x, y, \gamma, t_1) d\gamma - \int_0^y (A_{0100}u)(x, \beta, z, t_1) d\beta - \\ - \int_0^x (A_{1000}u)(\alpha, y, z, t_1) d\alpha + \int_0^y \int_0^z (A_{0110}u)(x, \beta, \gamma, t_1) d\gamma d\beta + \int_0^x \int_0^z (A_{1010}u)(\alpha, y, \gamma, t_1) d\gamma d\alpha + \\ + \int_0^x \int_0^y (A_{1010}u)(\alpha, \beta, z, t_1) d\beta d\alpha - \int_0^x \int_0^y \int_0^z (A_{1110}u)(\alpha, \beta, \gamma, t_1) d\gamma d\beta d\alpha = F, \end{aligned} \quad (8)$$

где правая часть F – известная функция, выражающаяся через функции $\varphi_1(y, z, t)$, $\varphi_2(x, z, t)$, $\varphi_3(x, y, t)$. Уравнение (8) – интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решение которого $u(x, y, z, t_1)$ существует и единственно. Действительно, из интегрального уравнения (4) для функции Римана следует, что

$$R(x, y, z, t, x, y, z, \tau) = \exp\left(\int_{\tau}^t a_{1110}(x, y, z, \delta) d\delta\right) > 0.$$

Таким образом, задача Дарбу однозначно редуцируется к задаче Гурса, т.е. решение задачи Дарбу существует и единственно.

2. Очевидно, что решение задачи Дарбу может быть построено в резольвентах интегральных уравнений (т.е. методом последовательных приближений). Перейдём вопросу о возможности построения формулы для решения задачи Дарбу в явном виде в терминах функции типа функции Римана–Адамара, аналогичной по своим свойствам функции Римана–Адамара для уравнения с двумя независимыми переменными [7]. Далее изложение ведётся, следуя схеме рассуждений статьи [8].

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Она определяет область D_P , ограниченную плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = x$. Очевидно, область D_P можно разбить на две части: область D^1 , которая ограничена плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = \xi$; и область D^2 , которая ограничена плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \xi$, $t = x$. В трёхмерном случае (см. [8, рис. 1]) области D^1 и D^2 представляют собой параллелепипед и призму соответственно. Аналогичные многогранники получаются и в четырёхмерном случае.

Функцию Римана–Адамара задачи Дарбу $H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$ определим равенством

$$H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \begin{cases} R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^1, \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^2. \end{cases} \quad (9)$$

Требуется определить функцию V . Этому посвящён нижеследующий текст п. 2.

Нам потребуются следующие обозначения: будем обозначать через A_{ijkl} конструкции (5), в которых R заменена на H , через A_{ijkl}^- конструкции (5), в которых R заменена на V , а те же конструкции с функцией R обозначим A_{ijkl}^+ .

Будем обозначать пересечение границы области D_P с плоскостью $x = \xi$ через $D_{P[x=\xi]}$, с плоскостями $x = \xi$, $y = \eta$ через $D_{P[x=\xi, y=\eta]}$ и т.д. Обозначим пересечение границы области D_P с плоскостью $x = t$ через T . Пусть

$$V|_T \equiv 0. \quad (10)$$

Далее, потребуем выполнения соотношения

$$[A_{1000}](x, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1000}^+(x, \eta, \zeta, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1000}^-(x, \eta, \zeta, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0, \quad (11)$$

где, как уже сказано выше, $A_{1000}^+ = R_x - a_{0111}R$, $A_{1000}^- = V_x - a_{0111}V$. Данное равенство вместе с очевидным условием (вытекающим из тождества (10))

$$V(\xi, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$$

приводит для определения функции V на отрезке $D_{P[y=\eta, z=\zeta, t=\xi]}$, где очевидно $0 \leq x \leq \xi$, к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} V_x - a_{0111}V &= g(x), \quad V(\xi, \eta, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) = 0, \\ g(x) &= (R_x - a_{0111}R)|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta, t=\xi]}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение задачи (12) имеет вид

$$V(x, \eta, \zeta, \xi) = \int_{\xi}^x g(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^x a_{0111}(\alpha_1, \eta, \zeta, \xi) d\alpha_1\right) d\alpha. \quad (13)$$

Потребуем, чтобы в плоской области $D_{P[y=\eta, z=\zeta]}$ функция V удовлетворяла уравнению

$$A_{1001}^- = V_{xt} - (a_{1110}V)_x - (a_{0111}V)_t + a_{0110}V = 0. \quad (14)$$

Тогда функция V в плоской области $D_{P[y=\eta, z=\zeta]}$ определена как решение задачи Дарбу для уравнения (14) с граничными условиями $V|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta, t=x]}} = 0$ (следствие (10)) и (13). Решение указанной двумерной задачи Дарбу существует и единственно [7].

Далее, потребуем, чтобы скачок функции A_{1100} на многообразии $D_{P[z=\zeta, t=\xi]}$ равнялся нулю, т.е. должно выполняться соотношение

$$[A_{1100}](x, y, \zeta, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1100}^+(x, y, \zeta, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1100}^-(x, y, \zeta, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0, \quad (15)$$

где $A_{1100}^+ = R_{xy} - (a_{1011}R)_x - (a_{0111}R)_y + a_{0011}R$, $A_{1100}^- = V_{xy} - (a_{1011}V)_x - (a_{0111}V)_y + a_{0011}V$. В результате для определения граничного значения функции V на плоскости $D_{P[z=\zeta, t=\xi]}$ получаем задачу Гурса для гиперболического уравнения второго порядка [1, гл. 1, § 4, п. 4°] с заданными условиями на характеристиках и известной правой частью (которая вычисляется по функции Римана R , которую считаем известной)

$$\begin{aligned} V_{xy} - (a_{1011}V)_x - (a_{0111}V)_y + a_{0011}V &= R_{xy} - (a_{1011}R)_x - (a_{0111}R)_y + a_{0011}R, \\ V|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta, t=\xi]}} &= \int_{\xi}^x g(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^x a_{0111}(\alpha_1, \eta, \zeta, \xi) d\alpha_1\right) d\alpha, \\ V|_{D_{P[z=\zeta, x=\xi, t=\xi]}} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь граничные значения являются следствиями соотношений (10), (13). Решение задачи (16) существует и единственно.

Аналогично потребуем, чтобы скачок функции A_{1010} на многообразии $D_{P[y=\eta, t=\xi]}$ равнялся нулю, т.е. должно выполняться соотношение

$$[A_{1010}](x, \eta, z, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1010}^+(x, \eta, z, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1010}^-(x, \eta, z, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0. \quad (17)$$

Снова получаем для определения граничного значения функции V на плоскости $D_{P[y=\eta, t=\xi]}$ задачу Гурса для гиперболического уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} V_{xz} - (a_{1101}V)_x - (a_{0111}V)_z + a_{0101}V &= R_{xz} - (a_{1101}R)_x - (a_{0111}R)_z + a_{0101}R, \\ V|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta, t=\xi]}} &= \int_{\xi}^x g(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^x a_{0111}(\alpha_1, \eta, \zeta, \xi) d\alpha_1\right) d\alpha, \\ V|_{D_{P[y=\eta, x=\xi, t=\xi]}} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение задачи (18) существует и единственно [1, гл. 1, § 4, п. 4°].

Потребуем выполнения на многообразии $D_{P[y=\eta]}$ условия

$$\begin{aligned} A_{1011}^- &= V_{xzt} - (a_{1110}V)_{xz} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{zt} + (a_{1100}V)_x + \\ &+ (a_{0110}V)_z + (a_{0101}V)_t - a_{0100}V = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для определения функции V получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с граничными условиями

$$V|_{D_{P[y=\eta, t=\xi]}} = \varphi_{24}(x, z), \quad V|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta]}} = \varphi_{23}(x, t), \quad V|_{D_{P[y=\eta, t=x]}} = 0; \quad (20)$$

первые два условия из (20) определяются из соотношений (18), (14) соответственно, а последнее является следствием тождества (10). Решение задачи Дарбу (19), (20) существует и единственно [8].

Аналогично потребуем, чтобы на многообразии $D_{P[z=\zeta]}$ выполнялось условие

$$\begin{aligned} A_{1101}^- &= V_{xyt} - (a_{1110}V)_{xy} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{yt} + (a_{1010}V)_x + \\ &+ (a_{0110}V)_y + (a_{0011}V)_t - a_{0010}V. \end{aligned} \quad (21)$$

Снова получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с граничными условиями

$$V|_{D_{P[z=\zeta, t=\xi]}} = \varphi_{34}(x, y), \quad V|_{D_{P[y=\eta, z=\zeta]}} = \varphi_{23}(x, t), \quad V|_{D_{P[z=\zeta, t=x]}} = 0; \quad (22)$$

первые два условия в (22) определяются из соотношений (16), (14) соответственно, а последнее является следствием тождества (10).

Наконец, потребуем, чтобы скачок функции A_{1110} на многообразии $D_{P[t=\xi]}$ равнялся нулю:

$$[A_{1110}](x, y, z, \xi, \xi, \eta, \zeta, \tau) := A_{1110}^+(x, y, z, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) - A_{1110}^-(x, y, z, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta, \tau) \equiv 0. \quad (23)$$

В результате для определения значения функции V на трёхмерном многообразии $D_{P[t=\xi]}$ (которое является параллелепипедом) получаем задачу Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с заданными условиями на характеристиках и известной правой частью (выраженной через функцию Римана R)

$$\begin{aligned} V_{xyz} - (a_{1101}V)_{xy} - (a_{1011}V)_{xz} - (a_{0111}V)_{yz} + (a_{1001}V)_x + (a_{0101}V)_y + (a_{0011}V)_z - a_{0001}V &= \\ = R_{xyz} - (a_{1101}R)_{xy} - (a_{1011}R)_{xz} - (a_{0111}R)_{yz} + (a_{1001}R)_x + (a_{0101}R)_y + (a_{0011}R)_z - a_{0001}R, \\ V|_{D_{P[x=\xi, t=\xi]}} &= \varphi_{14}(y, z), \quad V|_{D_{P[y=\eta, t=\xi]}} = \varphi_{24}(x, z), \quad V|_{D_{P[z=\zeta, t=\xi]}} = \varphi_{34}(x, y). \end{aligned} \quad (24)$$

Граничные условия в (24), очевидно, представляют собой значения функции V , получаемые из соотношений (14), (18), (16) соответственно. Решение задачи (24) существует и единственно [11, § 2, п. 1, с. 25–26].

Функцию Римана–Адамара в области D^2 определим как решение задачи Дарбу для сопряжённого к (1) уравнения

$$\begin{aligned} L^*(V) \equiv & V_{xyzt} - (a_{1110}V)_{xyz} - (a_{1101}V)_{xyt} - (a_{1011}V)_{xzt} - (a_{0111}V)_{yzt} + \\ & + (a_{1100}V)_{xy} + (a_{1010}V)_{xz} + (a_{1001}V)_{xt} + (a_{0110}V)_{yz} + (a_{0101}V)_{yt} + (a_{0011}V)_{zt} - \\ & - (a_{1000}V)_x - (a_{0100}V)_y - (a_{0010}V)_z - (a_{0001}V)_t + a_{0000}V = 0 \end{aligned}$$

с условиями на многообразиях $D^2_{P[y=\eta]}$, $D^2_{P[z=\zeta]}$, $D^2_{P[t=\xi]}$, $\bar{T} = D^2_{P[x=t]}$, которые вследствие изложенного выше считаем вполне определёнными.

Итак, функция Римана–Адамара определена, существует и единственна в $\bar{D}_P$.

3. Перейдём к построению формулы для решения задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара (9).

Запишем тождество (6) в дивергентной форме (здесь и всюду далее функция Римана заменяется на функцию Римана–Адамара $H = H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$):

$$HL(u) = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \frac{\partial W_4}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{1}{4}(Hu)_{yzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{yz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{yt} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{zt} + \\ & + \frac{1}{2}(A_{0011}u)_y + \frac{1}{2}(A_{0101}u)_z + \frac{1}{2}(A_{0110}u)_t - A_{0111}u, \\ W_2 = & \frac{1}{4}(Hu)_{xzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{zt} + \\ & + \frac{1}{2}(A_{0011}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}u)_z + \frac{1}{2}(A_{1010}u)_t - A_{1011}u, \\ W_3 = & \frac{1}{4}(Hu)_{xyt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{yz} + \\ & + \frac{1}{2}(A_{0101}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}u)_t - A_{1101}u, \\ W_4 = & \frac{1}{4}(Hu)_{xyz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{yz} + \\ & + \frac{1}{2}(A_{0110}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1010}u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}u)_z - A_{1110}u. \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения. Обозначим пересечение границы области D^2 с плоскостью $t = \xi$ через E , с плоскостью $x = 0$ через $D^2_{[x=0]}$, с плоскостью $y = 0$ через $D^2_{[y=0]}$, с плоскостями $t = x$, $y = \eta$ через $D^2_{[y=\eta, t=\xi]}$ и т.д.

Проинтегрируем тождество (25) по области D^2 . Применяя общую формулу Стокса [18, гл. 13, § 3, п. 4], получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{D^2} HL(u) dx dy dz dt = & \iiint_{D^2_{[x=0]}} W_1 dy \wedge dz \wedge dt - \iiint_{D^2_{[y=0]} + D^2_{[y=\eta]}} W_2 dx \wedge dz \wedge dt + \\ & + \iiint_{D^2_{[z=0]} + D^2_{[z=\zeta]}} W_3 dx \wedge dy \wedge dz + \iiint_{E^2} W_4 dx \wedge dy \wedge dz + \iiint_{\bar{T}} W_1 dy \wedge dz \wedge dt - \\ & - W_2 dx \wedge dz \wedge dt + W_3 dx \wedge dy \wedge dt - W_4 dx \wedge dz \wedge dz. \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, что вектором нормали к поверхности S является вектор $\vec{n} = (1, 0, 0, 1)$; следовательно, гиперплоскости (x, z, t) , (y, z, t) ортогональны к поверхности S . Поэтому

$$\iiint_{\bar{T}} W_2 dx \wedge dz \wedge dt = 0, \quad \iiint_{\bar{T}} W_3 dx \wedge dy \wedge dt = 0.$$

Интегралы по многообразиям $D_{[x=0]}^2$, $D_{[y=0]}^2$, $D_{[z=0]}^2$ представляют собой известные величины, полностью определяемые граничными значениями.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{\bar{T}} W_1 dy \wedge dz \wedge dt &= \iiint_{\bar{T}} \left(\frac{1}{4}(Vu)_{yzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}^- u)_{yz} - \frac{1}{3}(A_{0010}^- u)_{yt} - \frac{1}{3}(A_{0100}^- u)_{zt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(A_{0011}^- u)_y + \frac{1}{2}(A_{0101}^- u)_z + \frac{1}{2}(A_{0110}^- u)_t - A_{0111}^- u \right) dy \wedge dz \wedge dt. \end{aligned} \quad (27)$$

На поверхности $\bar{T}$ имеем

$$V \equiv 0, \quad A_{0010}^- = V_z - A_{1101}^- V \equiv 0, \quad A_{0100}^- = V_y - A_{1011}^- V \equiv 0,$$

$$A_{0110}^- = V_{yz} - (A_{1101}^- V)_y - (A_{1011}^- V)_z + A_{1001}^- V \equiv 0,$$

а величины u , u_y , u_z известны (дифференцирование по y и по z производится вдоль поверхности S). Следовательно, интеграл (27) вычисляется по известным граничным значениям.

Совершенно аналогично вычисляется интеграл

$$\iiint_{\bar{T}} W_4 dx \wedge dy \wedge dz.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{[y=\eta]}^2} W_2 dx \wedge dz \wedge dt &= \iiint_{D_{[y=\eta]}^2} \left(\frac{1}{4}(Vu)_{xzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}^- u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{0010}^- u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}^- u)_{zt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(A_{0011}^- u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}^- u)_z + \frac{1}{2}(A_{1010}^- u)_t - A_{1011}^- u \right) dx \wedge dz \wedge dt = \\ &= \iint_{D_{[y=\eta, t=x]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{zt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_z - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{0011}^- u \right) dz \wedge dt - \\ &\quad - \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt + \\ &\quad + \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dx \wedge dz + \\ &\quad + \iint_{D_{[y=\eta, x=0]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{zt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_z - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{0011}^- u \right) dz \wedge dt - \\ &\quad - \iint_{D_{[y=\eta, z=0]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{D^2_{[y=\eta, t=\xi]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dx \wedge dz - \\
 & - \iint_{D^2_{[y=\eta, z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Здесь $A_{1011}^- \equiv 0$ при $y = \eta$ в силу условия (19) (по определению функции Римана–Адамара), интегралы по многообразиям $D^2_{[y=\eta, t=x]}$, $D^2_{[y=\eta, x=0]}$, $D^2_{[y=\eta, z=0]}$ вычисляются по данным задачи Дарбу.

Рассмотрим оставшиеся два последних слагаемых в (28). Первое из них представляет собой интеграл по прямоугольнику

$$\begin{aligned}
 & \iint_{D^2_{[y=\eta, t=\xi]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dx \wedge dz = \\
 & = \frac{1}{12}(Vu)(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}(Ru)(\xi, \eta, 0, \xi) - \frac{1}{12}(Vu)(0, \eta, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}(Ru)(0, \eta, 0, \xi) - \\
 & \quad - \frac{1}{6} \int_0^\zeta (A_{0010}^- u(\xi, \eta, z, \xi) - A_{0010}^- u(0, \eta, z, \xi)) dz - \\
 & \quad - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u(x, \eta, \zeta, \xi) - A_{1000}^- u(x, \eta, 0, \xi)) dx + \frac{1}{2} \iint_{D^2_{[y=\eta, t=\xi]}} A_{1010}^- u dx \wedge dz.
 \end{aligned}$$

В последнем слагаемом из (28) верно тождество $A_{1001}^- \equiv 0$ при $y = \eta$ и $z = \zeta$ в силу (14) (по определению функции Римана–Адамара), а интеграл в плоскости (x, t) вычисляется по треугольнику OAB (см. рисунок, AB – отрезок прямой $t = \xi$, OA – отрезок прямой $t = x$). Обозначим положительно ориентированный контур треугольника OAB через L . Применяя формулу Грина, получаем

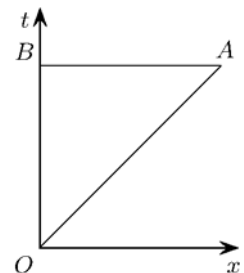


Рисунок. Область вычисления интеграла.

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{D^2_{[y=\eta, z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt = \\
 & = -\frac{1}{12} \int_L (Vu)_t dt - \frac{1}{6} \int_L A_{0001}^- u dt + \frac{1}{6} \int_L A_{1000}^- u dx = -\frac{1}{12} \int_{OA} (V_t u + V u_t) dt - \frac{1}{12} \int_{BO} (V_t u + V u_t) dt - \\
 & \quad - \frac{1}{6} \int_{OA} A_{0001}^- u dt - \frac{1}{6} \int_{BO} A_{0001}^- u dt + \frac{1}{6} \int_{OA} A_{1000}^- u dx + \frac{1}{6} \int_{AB} A_{1000}^- u dx. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Здесь в первом криволинейном интеграле в правой части равенства верно тождество $V \equiv 0$ на OA ; следовательно, все интегралы, кроме последнего, вычисляются по данным задачи Дарбу.

Совершенно аналогично преобразуется интеграл

$$\iiint_{D^2_{[z=\zeta]}} W_3 dx \wedge dy \wedge dt = \iiint_{D^2_{[z=\zeta]}} \left(\frac{1}{4}(Vu)_{xyt} - \frac{1}{3}(A_{0001}^- u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}^- u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}^- u)_{yt} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(A_{0101}^- u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}^- u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}^- u)_t - A_{1101}^- u \Big) dx \wedge dy \wedge dt = \\
& = \iint_{D_{[z=\zeta, t=x]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{yt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{0101}^- u \right) dy \wedge dt - \\
& \quad - \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt + \\
& \quad + \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy + \\
& + \iint_{D_{[z=\zeta, x=0]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{yt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{0101}^- u \right) dy \wedge dt - \\
& \quad - \iint_{D_{[z=\zeta, y=0]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt + \\
& + \iint_{D_{[z=\zeta, t=\xi]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy - \\
& \quad - \iint_{D_{[y=\eta, z=\zeta]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt} - \frac{1}{6}(A_{0001}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_t + \frac{1}{2}A_{1001}^- u \right) dx \wedge dt. \tag{30}
\end{aligned}$$

Здесь снова $A_{1101}^- \equiv 0$ при $z = \zeta$ в силу условия (21) (по определению функции Римана–Адамара), интегралы по многообразиям $D_{[z=\zeta, t=x]}^2$, $D_{[z=\zeta, x=0]}^2$, $D_{[z=\zeta, y=0]}^2$ вычисляются по данным задачи Дарбу.

Рассмотрим оставшиеся два последних слагаемых в (30). Первое из них представляет собой интеграл по прямоугольнику

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_{[z=\zeta, t=\xi]}^2} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy = \\
& = \frac{1}{12}(Vu)(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}(Vu)(0, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}(Vu)(\xi, 0, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}(Vu)(0, 0, \zeta, \xi) - \\
& \quad - \frac{1}{6} \int_0^\eta (A_{0100}^- u(\xi, y, \zeta, \xi) - A_{0100}^- u(0, y, \zeta, \xi)) dy - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u(x, \eta, \zeta, \xi) - \\
& \quad - A_{1000}^- u(x, 0, \zeta, \xi)) dx + \frac{1}{2} \iint_{D_{[z=\zeta, t=\xi]}^2} A_{1100}^- u dx \wedge dz.
\end{aligned}$$

Второе оставшееся слагаемое из (30) совпадает с последним слагаемым из (28) и вычисляется так же, в результате получаем (29).

Далее вычисляем интеграл

$$\iiint_E W_4 dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_E \left(\frac{1}{4}(Vu)_{xyz} - \frac{1}{3}(A_{0010}^- u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}^- u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{1000}^- u)_{yz} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(A_{0110}^- u)_x + \frac{1}{2}(A_{1010}^- u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}^- u)_z - A_{1110}^- u \Big) dx \wedge dy \wedge dz = \\
& = \iint_{E_{[x=\xi]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{yz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{0110}^- u \right) dy \wedge dz - \\
& - \iint_{E_{[y=\eta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dx \wedge dz + \\
& + \iint_{E_{[z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy + \\
& + \iint_{E_{[x=0]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{yz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{0110}^- u \right) dy \wedge dz - \\
& - \iint_{E_{[y=0]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dx \wedge dz + \\
& + \iint_{E_{[z=0]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Первое, четвёртое, пятое и шестое слагаемые в правой части этого равенства вычисляются по известным данным Дарбу. Второе и третье слагаемые дают

$$\begin{aligned}
& \iint_{E_{[y=\eta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^- u \right) dz \wedge dx + \\
& + \iint_{E_{[z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^- u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^- u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^- u \right) dx \wedge dy = \\
& = \frac{1}{12}Vu(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, 0, \xi) - \frac{1}{12}Vu(0, \eta, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}Ru(0, \eta, 0, \xi) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\zeta ((A_{0010}^- u)(\xi, \eta, z, \xi) - (A_{0010}^- u)(0, \eta, z, \xi)) dz - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u)(x, \eta, 0, \xi) dx - \\
& - \frac{1}{12}Vu(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Vu(0, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Vu(\xi, 0, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}Vu(0, 0, \zeta, \xi) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\eta ((A_{0100}^- u)(\xi, y, \zeta, \xi) - (A_{0100}^- u)(0, y, \zeta, \xi)) dy + \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u)(x, 0, \zeta, \xi) dx - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u)(x, \eta, \zeta, \xi) dx + \frac{1}{2} \iint_{E_{[y=\eta]}^1} A_{1010}^- u dz \wedge dx - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^- u)(x, \eta, \zeta, \xi) dx + \frac{1}{2} \iint_{E_{[z=\zeta]}} A_{1100}^- u dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Здесь известны все слагаемые, кроме четырёх последних интегралов.

Теперь интегрируем тождество (25) по области D^1 , где $H = R$ – функция Римана (решение интегрального уравнения (4) в этой области):

$$\begin{aligned} \iiint_{D_1} HL(u) dx dy dz dt = & \iiint_{D^1_{[x=0]} + D^1_{[x=\xi]}} W_1 dy \wedge dz \wedge dt - \iiint_{D^1_{[y=0]} + D^1_{[y=\eta]}} W_2 dx \wedge dz \wedge dt + \\ & + \iiint_{D^1_{[z=0]} + D^1_{[z=\zeta]}} W_3 dx \wedge dy \wedge dz + \iiint_E W_4 dx \wedge dy \wedge dz + \iiint_{D^1_{[t=\tau]}} W_4 dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь интегралы по многообразиям $D^1_{[x=0]}$, $D^1_{[y=0]}$, $D^1_{[z=0]}$ представляют собой известные величины, полностью определяемые граничными значениями.

Преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{D^1_{[x=\xi]}} W_1 dy \wedge dz \wedge dt = & \iiint_{D^1_{[x=\xi]}} \left(\frac{1}{4}(Ru)_{yz} - \frac{1}{3}(A^+_{0001}u)_{yz} - \frac{1}{3}(A^+_{0010}u)_{yt} - \frac{1}{3}(A^+_{0100}u)_{zt} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(A^+_{0011}u)_y + \frac{1}{2}(A^+_{0101}u)_z + \frac{1}{2}(A^+_{0110}u)_t - A^+_{0111}u \right) dy \wedge dz \wedge dt = \\ = & \iint_{D^1_{[x=\xi, y=\eta]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u \right) dz \wedge dt - \\ & - \iint_{D^1_{[x=\xi, z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u \right) dy \wedge dt + \\ & + \iint_{D^1_{[x=\xi, t=\tau]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z + \frac{1}{2}A^+_{0110}u \right) dy \wedge dz + \\ & + \iint_{D^1_{[x=\xi, y=0]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u \right) dz \wedge dt - \\ & - \iint_{D^1_{[x=\xi, z=0]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u \right) dy \wedge dt - \\ & - \iint_{D^1_{[x=\xi, t=\xi]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z + \frac{1}{2}A^+_{0110}u \right) dy \wedge dz. \end{aligned} \quad (32)$$

Последние три слагаемых вычисляются по известным данным Дарбу. Первые три слагаемых дают

$$\begin{aligned} & \iint_{D^1_{[x=\xi, y=\eta]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u \right) dz \wedge dt - \\ & - \iint_{D^1_{[x=\xi, z=\zeta]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u \right) dy \wedge dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{D^1_{[x=\xi, t=\tau]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{0110}^+ u \right) dy \wedge dz = \\
& = \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, \tau) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, 0, \tau) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, 0) + \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, 0, 0) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\tau ((A_{0001}^+ u)(\xi, \eta, \zeta, t) - (A_{0001}^+ u)(\xi, \eta, 0, t)) dt - \frac{1}{6} \int_0^\zeta ((A_{0010}^+ u)(\xi, \eta, z, \tau) - (A_{0010}^+ u)(\xi, \eta, z, 0)) dz + \\
& + \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, \tau) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, 0) - \frac{1}{12}Ru(\xi, 0, \zeta, \tau) + \frac{1}{12}Ru(\xi, 0, \zeta, 0) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\tau ((A_{0001}^+ u)(\xi, \eta, \zeta, t) - (A_{0001}^+ u)(\xi, 0, \zeta, t)) dt - \frac{1}{6} \int_0^\eta ((A_{0100}^+ u)(\xi, y, \zeta, \tau) - (A_{0100}^+ u)(\xi, y, \zeta, 0)) dy + \\
& + \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, \tau) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, 0, \tau) - \frac{1}{12}Ru(\xi, 0, \zeta, \tau) + \frac{1}{12}Ru(\xi, 0, 0, \tau) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\zeta ((A_{0010}^+ u)(\xi, \eta, z, \tau) - (A_{0010}^+ u)(\xi, 0, z, \tau)) dz - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\eta ((A_{0100}^+ u)(\xi, y, \zeta, \tau) - (A_{0100}^+ u)(\xi, y, 0, \tau)) dy.
\end{aligned}$$

Здесь первые слагаемые под знаками определённых интегралов обращаются в нуль согласно (7), оставшиеся слагаемые представляют собой сумму известных в силу условий задачи Дарбу величин и слагаемого $Ru(\xi, \eta, \zeta, \tau)/4$.

Интегралы

$$\iint_{D^1_{[y=\eta]}} W_2 dx \wedge dz \wedge dt, \quad \iint_{D^1_{[z=\zeta]}} W_3 dx \wedge dy \wedge dt, \quad \iint_{D^1_{[t=\tau]}} W_4 dx \wedge dy \wedge dz$$

вычисляются по той же схеме, что и интеграл (32). Результат вычислений может быть записан с помощью очевидной перестановки переменных в соответствующих формулах. Поэтому на вычислении этих трёх интегралов мы не останавливаемся.

Наконец, преобразуем интеграл

$$\begin{aligned}
\iiint_E W_4 dx \wedge dy \wedge dz & = \iiint_E \left(\frac{1}{4}(Ru)_{xyz} - \frac{1}{3}(A_{0010}^+ u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}^+ u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{1000}^+ u)_{yz} + \right. \\
& + \frac{1}{2}(A_{0110}^+ u)_x + \frac{1}{2}(A_{1010}^+ u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}^+ u)_z - A_{1110}^+ u \Big) dx \wedge dy \wedge dz = \\
& = \iint_{E_{[x=\xi]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{0110}^+ u \right) dy \wedge dz - \\
& - \iint_{E_{[y=\eta]}} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^+ u \right) dx \wedge dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{E[z=\zeta]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^+ u \right) dx \wedge dy + \\
& + \iint_{E[x=0]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_y - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{0110}^+ u \right) dy \wedge dz - \\
& - \iint_{E[y=0]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^+ u \right) dx \wedge dz + \\
& + \iint_{E[z=0]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^+ u \right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Первое, четвёртое, пятое и шестое слагаемые в правой части вычисляются по известным данным Дарбу. Второе и третье слагаемые дают

$$\begin{aligned}
& \iint_{E[y=\eta]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz} - \frac{1}{6}(A_{0010}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_z + \frac{1}{2}A_{1010}^+ u \right) dz \wedge dx + \\
& + \iint_{E[z=\zeta]} \left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy} - \frac{1}{6}(A_{0100}^+ u)_x - \frac{1}{6}(A_{1000}^+ u)_y + \frac{1}{2}A_{1100}^+ u \right) dx \wedge dy = \\
& = \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, 0, \xi) - \frac{1}{12}Ru(0, \eta, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}Ru(0, \eta, 0, \xi) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\zeta ((A_{0010}^+ u)(\xi, \eta, z, \xi) - (A_{0010}^+ u)(0, \eta, z, \xi)) dz - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^+ u)(x, \eta, 0, \xi) dx - \\
& - \frac{1}{12}Ru(\xi, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Ru(0, \eta, \zeta, \xi) - \frac{1}{12}Ru(\xi, 0, \zeta, \xi) + \frac{1}{12}Ru(0, 0, \zeta, \xi) - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\eta ((A_{0100}^+ u)(\xi, y, \zeta, \xi) - (A_{0100}^+ u)(0, y, \zeta, \xi)) dy - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^+ u)(x, 0, \zeta, \xi) dx - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^+ u)(x, \eta, \zeta, \xi) dx + \frac{1}{2} \iint_{E[y=\eta]} A_{1010}^+ u dz \wedge dx - \\
& - \frac{1}{6} \int_0^\xi (A_{1000}^+ u)(x, \eta, \zeta, \xi) dx + \frac{1}{2} \iint_{E[z=\zeta]} A_{1100}^+ u dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Здесь известны все слагаемые, кроме четырёх последних интегралов.

Почленно сложим равенства (26) и (31) с учётом всех сделанных преобразований. Учитывая соотношения (11), (15), (17), (23), а также тождество $R(\xi, \eta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 1$, получаем

$$u(P) = F(P) + \iiint_{D^1+D^2} H f dx dy dz dt, \quad (33)$$

где функция $F(P)$ полностью определена граничными данными задачи Дарбу. Другими словами, все не определяемые через данные задачи Дарбу слагаемые взаимно уничтожаются в

силу равенства нулю скачков, определяемых соотношениями (11), (15), (17), (23). Таким образом, равенство (33) даёт искомое представление решения задачи Дарбу $u(P)$ в терминах функции Римана–Адамара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Моисеев Е.И. Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу // Мат. заметки. 1982. Т. 32. Вып. 2. С. 175–186.
3. Моисеев Е.И. О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 73–87.
4. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
5. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
6. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
7. Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С. Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
8. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
9. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1429–1430.
10. Севастьянов В.А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1706–1707.
11. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
12. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань, 2014.
13. Миронов А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1698–1701.
14. Миронов А.Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. Вып. 3. С. 584–594.
15. Коцеева О.А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n -мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 40–46.
16. Миронов А.Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1144–1149.
17. Миронов А.Н. О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1572–1581.
18. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. М., 1984.

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 28.10.2020 г.
После доработки 28.10.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.