ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 364–374

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:624.04

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЁТОМ ЕЁ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

© 2021 г. К. Б. Сабитов

Для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе исследуются задачи с начальными условиями и с различными граничными условиями на концах. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных четырёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления концов доказаны теоремы о существовании и об устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

DOI: 10.31857/S0374064121030079

1. Постановка задач. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [1, § 61; 2, с. 168–181; 3, с. 317–321]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - \beta^2 u_{xxtt} - \gamma^2 u_{xx} = F(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – смещение точек балки в момент времени t, $\alpha^2 = EJ/(\rho S)$, $\beta^2 = r^2$, $\gamma^2 = T_0/\rho$, $F(x,t)$ – непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу длины балки, E – модуль упругости материала, ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения балки, $J = r^2 S$ – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, r – радиус инерции относительно прямой, проходящей через ось и перпендикулярной к плоскости изгиба, T_0 – сила натяжения, приложенная к концам балки.

Отметим, что многие задачи о колебаниях стержней и балок имеют важное прикладное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов, вибрации кораблей и в других областях; эти задачи изучены в известных работах [4, гл. 7; 5, с. 141–143; 6, с. 387–390; 7, с. 127–129; 8, с. 45; 9, с. 18–53; 10, с. 149–189; 11, с. 22–69] и др.

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки длины l нужно задать граничные условия на её концах $x = 0$ и $x = l$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подпёрты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом случае граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В случае балки с защемлёнными концами выполняются условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Если оба конца свободны, то справедливы следующие граничные условия:

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(0,t) - \alpha^2 u_{xxx}(0,t) = 0,$$

$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Если один конец жёстко закреплён, а другой свободен, то тогда, согласно (3) и (4), имеем условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Возможны и другие многочисленные случаи задания граничных условий.

Начальные условия такие же, как и в случае уравнения колебаний струны:

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{6}$$

Уравнение (1) рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$, где l и T – заданные положительные числа, и поставим следующие задачи.

Начально-граничные задачи. Найти определённую в области D функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}), \tag{7}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{8}$$

которая удовлетворяет начальным условиям (6) и одному из граничных условий (2)–(5), где $F(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1, § 61; 2, с. 168–181; 3, с. 317–321] и других при помощи подбора частных решений найдены собственные частоты и форма собственных колебаний для уравнения (1) при $F(x,t) \equiv 0$ с граничными условиями (2) или (3). Но вопросы о построении решений в явной форме и обосновании корректности поставленных выше задач не изучены. В работах [12–14] нами изучены поставленные задачи для уравнения (1), когда $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

В настоящей работе для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе исследуются задачи с начальными условиями и с различными граничными условиями на концах. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных в работе четырёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления концов доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

2. Энергетическое неравенство. Единственность решения. Задачу с условиями (6)–(8) и (N), где N принимает одно из значений 2, 3, 4 и 5, назовём задачей $N-1$, т.е., например, задачу с условиями (6)–(8), (3) будем называть задачей 2.

Теорема 1. *При любом $t \in [0,T]$ для решения задач 1 и 2 справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant e^T \Bigg[\int\limits_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x) + \gamma^2 \varphi'^2(x) + \beta^2 \varphi'^2(x))\, dx + \iint\limits_D F^2(x,t)\, dx\, dt \Bigg], \tag{9}$$

а для решения задач 3 и 4 – неравенство (9) при $\gamma = 0$.

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l (\rho S u_t^2 + EJ u_{xx}^2 + TS u_x^2 + r^2 \rho u_{tx}^2)\, dx =$$

$$= \rho S \frac{1}{2} \int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2)\, dx = \rho S E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной балки при нулевых граничных условиях (2)–(5).

Действительно, кинетическая энергия движущейся балки составляется из поступательного движения элементов dx параллельно смещению $u(x,t)$ и из вращения тех же элементов вокруг осей, проходящих через центры инерции этих элементов перпендикулярно к плоскости колебаний. Первая часть выражается интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho S u_t^2(x,t)\,dx.$$

Чтобы получить выражение для второй части, отметим, что угловое смещение элемента dx равно u_x, поэтому его угловая скорость равна u_{xt}. Квадрат этой величины надо умножить на половину момента инерции элемента dx, т.е. на $(1/2)\rho S r^2\,dx$, и проинтегрировать затем по отрезку $[0,l]$. Следовательно, кинетическая энергия колебаний балки в момент времени t находится по формуле

$$K(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (\rho S u_t^2+\rho S r^2 u_{xt}^2)\,dx.$$

Если поперечные колебания балки подвержены продольному натяжению T_0, то потенциальная энергия состоит из двух частей. Первая из них зависит от жёсткости, а вторая – от сопротивления растяжению и подобна потенциальной энергии струны, т.е. равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l ST_0u_x^2\,dx.$$

Первая часть на основании работы [13] определяется интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l ESu_{xx}^2\,dx.$$

Значит, потенциальная энергия колебаний балки в момент времени t находится по формуле

$$\Pi(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (ESu_{xx}^2+ST_0u_x^2)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t)=K(t)+\Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний балки.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$u_tLu=\frac{1}{2}(u_t^2+\alpha^2u_{xx}^2+\gamma^2u_x^2+\beta^2u_{xt}^2)'_t+(\alpha^2u_tu_{xxx}-\alpha^2u_{xt}u_{xx}-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt})'_x,$$

интегрируя которое по области $D_\tau=D\bigcap\{t<\tau\}$, где $0<\tau\leqslant T$, получаем

$$E(\tau)-E(0)+J_1+J_2=\iint\limits_{D_\tau}F(x,t)u_t\,dx\,dt, \tag{10}$$

здесь

$$J_1=\int_0^\tau[\alpha^2(u_tu_{xxx}-u_{xt}u_{xx})-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt}]|_{x=l}\,dt,$$

$$J_2=-\int_0^\tau[\alpha^2(u_tu_{xxx}-u_{xt}u_{xx})-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt}]|_{x=0}\,dt.$$

Пусть выполнены граничные условия (2), т.е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, поэтому интегралы J_1 и J_2 равны нулю.

Если имеют место граничные условия (3), т.е. $u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, то $u_t = u_{xt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда интегралы J_1 и J_2 также равны нулю.

Пусть выполнены условия (4), т.е. $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - \alpha^2 u_{xxx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. В этом случае справедливы равенства

$$J_1 = -\gamma^2 \int\limits_0^\tau u_x u_t|_{x=l}\, dt, \quad J_2 = \gamma^2 \int\limits_0^\tau u_x u_t|_{x=0}\, dt, \tag{11}$$

а значит, интегралы J_1 и J_2 равны нулю только в том случае, когда $\gamma = 0$.

Если имеют место граничные условия (5), т.е. $u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - \alpha^2 u_{xxx} = 0$ при $x = l$, то $J_2 = 0$, а интеграл J_1 выражается первым равенством в (11) и поэтому равен нулю только тогда, когда $\gamma = 0$.

Тогда из равенства (10) вытекает, что

$$E(\tau) \leqslant E(0) + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\tau} F^2(x,t)\, dx\, dt + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\tau} u_t^2\, dx\, dt = A + \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau dt \int\limits_0^t u_t^2\, dx \leqslant A + \int\limits_0^\tau E(t)\, dt. \tag{12}$$

Отсюда, следуя [15, с. 77], получаем неравенство

$$A + \int\limits_0^T E(t)\, dt \leqslant Ae^T,$$

из которого и неравенства (12) следует оценка (9). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть правая часть уравнения (1) равна нулю, т.е.* $F(x,t) \equiv 0$. *Тогда если задачи 1 или 2 имеют решение, то при любом* $t \in [0, T]$ *выполняется равенство*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l [\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x) + \gamma^2 \varphi'^2(x) + \beta^2 \psi'^2(x)]\, dx, \tag{13}$$

а если имеют решение задачи 3 или 4 – равенство (13) при $\gamma = 0$.

Другими словами, равенство (13) означает, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остаётся в течении всего процесса колебаний постоянной и равной её начальной энергии.

Справедливость равенства (13) непосредственно вытекает из соотношения (10).

Следствие 2 (теорема единственности). *Если существует функция* $u(x,t)$, *удовлетворяющая условиям (6)–(8) и одному из граничных условий (2)–(5), то она единственна. При этом в случае задач 3 и 4 коэффициент* $\gamma = 0$.

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ принадлежит классу (7), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в D, нулевым начальным условиям $u(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ и одному из граничных условий (2)–(5). Для такого решения в силу равенства (13) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{xt}^2)\, dx = 0$$

при любом $t \in [0, T]$. Но это равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_x \equiv 0$, $u_{xt} \equiv 0$ в области D. Первые два из этих тождеств означают, что $u(x,t) = a_1 x + a_2$, где a_1 и a_2 – произвольные постоянные. По условию функция $u(x,t)$ удовлетворяет одному из граничных условий (2)–(5) и нулевым начальным условиям. Из граничных условий (2), (3) и (5) следует, что $a_1 = a_2 = 0$. Функция $u(x,t) = a_1x + a_2$ удовлетворяет граничным условиям (4) при любых a_1 и a_2. Но из начального условия следует, что при любом $x \in [0,l]$ справедливо равенство $u(x,0) = a_1x + a_2 = 0$, которое возможно только при $a_1 = a_2 = 0$. Таким образом, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следствие доказано.

Для примера построим решение задачи 1, т.е. задачи (6)–(8), (2).

3. Собственные колебания балки, шарнирно опирающейся на концы. Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1) при $F(x,t) \equiv 0$, получаем относительно функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$X^{(4)}(x) - (a^2 + \lambda\beta^2)X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{14}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = 0, \tag{15}$$

где $a^2 = \gamma^2/\alpha^2$. Для построения решения этой спектральной задачи запишем для уравнения (14) его характеристическое уравнение

$$k^4 - (a^2 + \lambda\beta^2)k^2 + \lambda = 0, \tag{16}$$

которое имеет корни $k_1 = \sqrt{t_1}$, $k_2 = -\sqrt{t_1}$, $k_3 = \sqrt{t_2}$, $k_4 = -\sqrt{t_2}$, где

$$t_j = (a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{(a^2+\lambda\beta^2)^2 - 4\lambda})/2 \equiv (a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{D(\lambda)})/2, \quad j = 1,2.$$

Если $\lambda = 0$, то $k_1 = a$, $k_2 = -a$, $k_3 = k_4 = 0$ и общее решение уравнения (14) имеет вид

$$X(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3x + C_4, \tag{17}$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$, – произвольные постоянные. Удовлетворяя общее решение (17) граничным условиям (15), получаем $X(x) \equiv 0$.

Исследуем дискриминант $D(\lambda)$ на знак. Если $(a\beta)^2 > 1$, то $D(\lambda) > 0$ при любом $\lambda \in \in \mathbb{R}$. Когда $(a\beta)^2 = 1$ выражение $D(\lambda) > 0$ при всех λ, кроме значения $\lambda = 1/\beta^4$, где $D(1/\beta^4) = 0$. Если $(a\beta)^2 < 1$, то $D(\lambda)$ имеет вид $D(\lambda) = \beta^4(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, где

$$\lambda_j = (1 + (-1)^{j+1}\sqrt{1-(a\beta)^2})^2/\beta^4, \quad j = 1,2,$$

т.е. $D(\lambda) \geqslant 0$, если $\lambda \geqslant \lambda_1$ и $\lambda \leqslant \lambda_2$, и $D(\lambda) < 0$, если $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$. Тогда при $\lambda < 0$ (в этом случае $D(\lambda) > 0$ при любых $a > 0$ и $\beta > 0$) корни имеют разные знаки: $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Если $\lambda \in (0,\lambda_2]\bigcup[\lambda_1,+\infty)$ корни t_1 и t_2 положительны. При $\lambda \in (\lambda_2,\lambda_1)$ корни t_1 и t_2 являются комплексно сопряжёнными между собой числами.

В случае, когда числа t_1 и t_2 положительны, соответствующие корни характеристического уравнения (16) являются вещественными: $k_2 < k_4 < 0 < k_3 < k_1$. Тогда общее решение уравнения (14) определяется формулой

$$X(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x} + C_4e^{k_4x}.$$

Подставив это общее решение в граничные условия (15), получим линейную однородную систему относительно C_i, $i = \overline{1,4}$, с определителем, отличным от нуля. Отсюда следует, что все $C_i = 0$, поэтому в этом случае $X(x) \equiv 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \in (\lambda_2,\lambda_1)$, т.е. числа t_1 и t_2 комплексно сопряжены между собой:

$$t_j = (a^2 + (-1)^{j+1}\lambda\beta^2 + i\sqrt{|D(\lambda)|})/2 = c + (-1)^{j+1}id, \quad j = 1,2,$$

где $c = (a^2 + \lambda\beta^2)/2$, $d = \sqrt{|D(\lambda)|}/2 = \sqrt{4\lambda - (a^2+\lambda\beta^2)^2}/2 = \sqrt{\lambda - c^2}$.

Извлекая корень квадратный из чисел t_1 и t_2, будем иметь

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{c+id} = \pm(\nu + i\omega) \quad \text{и} \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{c-id} = \pm(\nu - i\omega),$$

где

$$\nu = \sqrt{(\sqrt{c^2+d^2}+c)/2}, \quad \omega = \sqrt{(\sqrt{c^2+d^2}-c)/2}.$$

Тогда общее решение уравнения (14) находится по формуле

$$X(x) = C_1e^{\nu x}\cos(\omega x) + C_2e^{\nu x}\sin(\omega x) + C_3e^{-\nu x}\cos(\omega x) + C_4e^{-\nu x}\sin(\omega x). \tag{18}$$

Удовлетворяя общее решение (18) граничным условиям $X(0) = X''(0) = 0$ из (15), получаем, что $C_3 = -C_1$ и $C_4 = C_2$. Тогда функция (18) принимает вид

$$X(x) = 2C_1\,\mathrm{sh}(\nu x)\cos(\omega x) + 2C_2\,\mathrm{ch}(\nu x)\sin(\omega x).$$

Подчинив эту функцию граничным условиям $X(l) = X''(l) = 0$, получаем следующую систему относительно C_1 и C_2:

$$C_1\,\mathrm{sh}(\nu l)\cos(\omega l) + C_2\,\mathrm{ch}(\nu l)\sin(\omega l) = 0,$$

$$C_1[(\nu^2-\omega^2)\,\mathrm{sh}(\nu l)\cos(\omega l) - 2\nu\omega\,\mathrm{ch}(\nu l)\sin(\omega l)] + C_2[(\nu^2-\omega^2)\,\mathrm{ch}(\nu l)\sin(\omega l) + 2\nu\omega\,\mathrm{sh}(\nu l)\cos(\omega l)] = 0.$$

Определитель этой системы равен $-2\nu\omega(\sin^2(\omega l) + \mathrm{sh}^2(\nu l))$ и, значит, отличен от нуля; следовательно, она имеет только нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому, как и в предыдущем случае, $X(x) \equiv 0$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\lambda < 0$. В этом случае $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Тогда $k_1 = \sqrt{t_1} > 0$, $k_2 = -\sqrt{t_1} < 0$, $k_3 = i\sqrt{|t_2|} = i\delta$, $k_4 = -i\delta$, и общее решение уравнения (14) определяется по формуле

$$X(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3\cos(\delta x) + C_4\sin(\delta x). \tag{19}$$

Тогда, исходя из граничных условий (15), получаем систему

$$\begin{gathered} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1k_1^2 + C_2k_2^2 - \delta^2C_3 = 0, \\ C_1e^{k_1l} + C_2e^{k_2l} + C_3\cos\delta l + C_4\sin\delta l = 0, \\ C_1k_1^2e^{k_1l} + C_2k_2^2e^{k_2l} - \delta^2C_3\cos\delta l - \delta^2C_4\sin\delta l = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 & 0 \\ e^{k_1l} & e^{k_2l} & \cos\delta l & \sin\delta l \\ k_1^2e^{k_1l} & k_2^2e^{k_2l} & -\delta^2\cos\delta l & -\delta^2\sin\delta l \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin\delta l\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ k_1^2e^{k_1l} & k_2^2e^{k_2l} & -\delta^2\cos\delta l \end{vmatrix} - \delta^2\sin\delta l\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ e^{k_1l} & e^{k_2l} & \cos\delta l \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\delta l(e^{k_1l} - e^{k_2l})[k_1^2k_2^2 + (k_1^2+k_2^2)\delta^2 + \delta^4].$$

Отсюда очевидно, что $\Delta = 0$ только тогда, когда $\sin(\delta l) = 0$, т.е. $\delta l = \sqrt{|t_2|}l = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. С учётом значения t_2 найдём собственные значения

$$\lambda_k = -\frac{(\mu_k^2a)^2 + \mu_k^4}{1 + (\mu_k\beta)^2}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}. \tag{21}$$

Поскольку $\sin(\delta l)=0,$ то $\cos(\delta l)=\pm 1$ и система (20) принимает вид

$$C_1+C_2+C_3=0,$$
$$C_1k_1^2+C_2k_2^2-\delta^2C_3=0,$$
$$C_1e^{k_1l}+C_2e^{k_2l}\pm C_3=0,$$
$$C_1k_1^2e^{k_1l}+C_2k_2^2e^{k_2l}\pm\delta^2C_3=0.$$

Из первого её уравнения найдём значение $C_3=-C_1-C_2,$ подставив которое в остальные уравнения, приходим к системе

$$C_1(k_1^2+\delta^2)+C_2(k_2^2+\delta^2)=0,$$
$$C_1(e^{k_1l}\mp 1)+C_2(e^{k_2l}\mp 1)=0,$$
$$C_1(k_1^2e^{k_1l}\mp\delta^2)+C_2(k_2^2e^{k_2l}\mp\delta^2)=0.$$

Так как $k_1^2=k_2^2=t_1,$ то из первого уравнения полученной системы вытекает равенство $C_1+C_2=0,$ т.е. $C_2=-C_1.$ Тогда из второго её уравнения следует, что $C_1(e^{k_1l}-e^{k_2l})=0,$ а это равенство возможно только при $C_1=0.$ Поэтому $C_1=C_2=C_3=0,$ и тогда из (19) при условии $C_4\neq 0$ находим соответствующую систему собственных функций

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\delta x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\sqrt{|t_2|}x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\mu_kx),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Система функций (22) ортонормирована и полна в $L_2[0,l].$ Введём функции

$$u_k(t)=\int\limits_0^l u(x,t)X_k(x)\,dx,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Дифференцируя тождество (23) дважды по $t\in(0,T)$ и учитывая уравнение (1), получаем

$$u_k''(t)=\int\limits_0^l F(x,t)X_k(x)\,dx+\gamma^2\int\limits_0^l u_{xx}X_k(x)\,dx-\alpha^2\int\limits_0^l u_{xxxx}X_k(x)\,dx+\beta^2\int\limits_0^l u_{xxtt}X_k(x)\,dx. \tag{24}$$

Интегрируя по частям четыре раза с учётом граничных условий (2) и (15), будем иметь

$$\int\limits_0^l u_{xx}X_k(x)\,dx=-\mu_k^2u_k(t),\quad \int\limits_0^l u_{xxxx}X_k(x)\,dx=\mu_k^4u_k(t),\quad \int\limits_0^l (u_{tt})_{xx}X_k(x)\,dx=-\mu_k^2u_k''(t).$$

Подставляя значения этих интегралов в равенство (24), получаем уравнение

$$u_k''(t)+\frac{\gamma^2\mu_k^2+\alpha^2\mu_k^4}{1+\beta^2\mu_k^2}u_k(t)=\frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2}$$

или с учётом равенств (21) – уравнение

$$u_k''(t)-\lambda_k^2\alpha^2u_k(t)=G_k(t), \tag{25}$$

здесь

$$G_k(t)=\frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2},\quad F_k(t)=\int\limits_0^l F(x,t)X_k(x)\,dx. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (25) находится по формуле

$$u_k(t) = a_k \cos(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + b_k \sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\widetilde{F}_k(t)}{(1+\beta^2\mu_k^2)\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}, \tag{27}$$

где

$$\widetilde{F}_k(t) = \int\limits_0^t F_k(s)\sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}(t-s))\,ds,$$

a_k и b_k – произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_k и b_k воспользуемся начальными условиями (6) и формулой (23):

$$u_k(0) = \int\limits_0^l u(x,0)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)\,dx = \varphi_k, \tag{28}$$

$$u_k'(0) = \int\limits_0^l u_t(x,0)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)\,dx = \psi_k. \tag{29}$$

Удовлетворяя функции (27) граничным условиям (28) и (29), находим соответственно, что

$$a_k = \varphi_k \quad \text{и} \quad b_k = \psi_k/(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}).$$

Подставив найденные значения a_k и b_k в формулу (27), получим явный вид функций $u_k(t)$:

$$u_k(t) = \varphi_k \cos(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\psi_k}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}\sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\widetilde{F}_k(t)}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}(1+\beta^2\mu_k^2)}. \tag{30}$$

На основании частных решений (30) и (22) решение задачи (6)–(8), (2) можно задать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \tag{31}$$

Лемма 1. *При любом* $t \in [0,T]$ *справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant C_1\bigg(|\varphi_k| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{1}{k^3}|\widetilde{F}_k(t)|\bigg), \tag{32}$$

$$|u_k''(t)| \leqslant C_3\bigg(k^2|\varphi_k| + k|\psi_k| + \frac{1}{k}|\widetilde{F}_k(t)| + \frac{|F_k(t)|}{k^2}\bigg), \tag{33}$$

здесь и далее C_i *– положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от коэффициентов уравнения (1) и числа* l.

Справедливость оценок (32) и (33) вытекает непосредственно из формулы (30).

Формально из ряда (31) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)X_k(x), \tag{34}$$

$$u_{xxtt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)X_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_k''(t)X_k(x), \tag{35}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k^{(4)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k(t)X_k(x). \tag{36}$$

Ряды (31), (34)–(36) при любых $(x,t)\in\overline{D}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3\sum_{k=1}^{\infty}(k^4|\varphi_k|+k^3|\psi_k|+kF_k(t_0)), \tag{37}$$

так как $|\widetilde{F}_k(t)|\leqslant TF_k(t_0)$, где $F_k(t_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|F_k(t)|$, а t_0 – некоторая точка из отрезка $[0,T]$.

Лемма 2. *Если* $\varphi(x)\in C^5[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$; $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $\psi^{(j)}(0)=\psi^{(j)}(l)=0$, $j=0,2$; $F(x,t)\in C(\overline{D})\bigcap C_x^2(\overline{D})$, $F(0,t)=F(l,t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, *то справедливы представления*

$$\varphi_k=\frac{1}{\mu_k^5}\varphi_k^{(5)},\quad \psi_k=\frac{1}{\mu_k^4}\psi_k^{(4)},\quad F_k(t)=-\frac{1}{\mu_k^2}F_k^{(2)}(t), \tag{38}$$

где

$$\varphi_k^{(5)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi^{(5)}(x)\cos(\mu_k x)\,dx,\quad \psi_k^{(4)}=\int\limits_0^l\psi^{(4)}(x)X_k(x)\,dx,\quad F_k^{(2)}(t)=\int\limits_0^l F_{xx}(x,t)X_k(x)\,dx,$$

причём следующие ряды сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(5)}|^2\leqslant\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(4)}|^2\leqslant\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F_k^{(2)}(t)|^2\leqslant\|F_{xx}(x,t)\|_{L_2[0,l]},\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{39}$$

Доказательство. Вычисляя по частям интегралы в равенствах (28), (29) и (26) соответственно пять, четыре и два раза с учётом условий леммы, получаем представления (38). Неравенства (39) – это неравенства Бесселя для коэффициентов разложений в ряд Фурье функций $\varphi^{(5)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$ и $F_{xx}(x,t)$ по системе косинусов и синусов на промежутке $[0,l]$. Лемма доказана.

При выполнении условий леммы 2 на основании представлений (38) ряд (37) оценивается сверху сходящимся рядом

$$C_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{(5)}|+|\psi_k^{(4)}|+|F_k^{(2)}(t_0)|).$$

Тогда ряды (31), (34)–(36) сходятся на $\overline{D}$ равномерно, следовательно, сумма ряда (31) удовлетворяет условиям (6)–(8) и (2).

Итак, доказана

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $F(x,t)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи (6)–(8), (2); это решение может быть представлено суммой ряда (31).*

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи при возмущении начальных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и правой части $F(x,t)$.

Теорема 3. *Для решения* $u(x,t)$ *задачи (6)–(8), (2) имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leqslant C_5(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|F(x,t)\|_{L_2[0,l]}), \tag{40}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leqslant C_6(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\|F(x,t)\|_{C(\overline{D})}). \tag{41}$$

Доказательство. Поскольку система функций (22) ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из представления (31) с учётом оценки (32) получаем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leqslant 3C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2 + |F_k(t_0)|^2) \leqslant$$

$$\leqslant C_5^2(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|F(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}).$$

Отсюда следует оценка (40).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда из (31) на основании оценки (32) имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{|F_k(t_0)|}{k^3} \right). \tag{42}$$

Величину φ_k можно представить в виде

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos(\mu_k x)\, dx.$$

Тогда из оценки (42) в силу неравенства Коши–Буняковского получаем

$$|u(x,t)| \leqslant \widetilde{C}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}|\varphi_k^{(1)}| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{1}{k}|F_k(t_0)| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |F_k(t_0)|^2 \right)^{1/2} \right] =$$

$$= \widetilde{C}_1 \frac{\pi}{\sqrt{6}} (\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|F(x,t)\|_{C[0,l]}) \leqslant$$

$$\leqslant C_6(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi(x)\|_{C[0,l]} + \|F(x,t)\|_{L_2[0,l]}),$$

что и доказывает справедливость оценки (41). Теорема доказана.

Таким образом, нами установлена корректность постановки задачи 1. При этом отметим, что в формулировке теоремы 2, дающей достаточные условия существования решения задачи, на начальные условия (6) наложены сильные предположения об их гладкости. Если ввести понятие обобщённого решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

Определение 1. Решение задачи (6)–(8), (2) из класса $C^{4,2}_{x,t}(\overline{D})$ назовём *классическим*, или *регулярным*, решением этой задачи.

Определение 2. Функцию $u(x,t)$ будем называть *обобщённым решением* задачи (6)–(8), (2), если существует последовательность $u_n(x,t)$, $n \in \mathbb{N}$, регулярных решений задачи (6)–(8), (2) с начальными данными $u_n(x,t) = \varphi_n(x)$, $u_{nt}(x,0) = \psi_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и правыми частями $F_n(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D}$, равномерно сходящаяся при $n \to \infty$ к функции $u(x,t)$ на $\overline{D}$. При этом функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, и эти последовательности сходятся равномерно на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$, а последовательность $\varphi'_n(x)$ сходится равномерно на $[0,l]$ к функции $\varphi(x)$.

Теорема 4. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C[0,l]$, $F(x,t) \in C(\overline{D})$, *то существует единственное и устойчивое обобщённое решение задачи (6)–(8), (2), которое определяется суммой ряда (29) и является непрерывным на* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда существуют такие последовательности функций $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, которые равномерно сходятся на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$. По функциям $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ на основании теоремы 2 построим последовательность $u_n(x,t)$ регулярных решений задачи (6)–(8), (2). В силу линейности изучаемой задачи разность $u_n(x,t)-u_m(x,t)$ является решением задачи (6)–(8), (2) с начальными функциями $\varphi_n(x)-\varphi_m(x)$, $\psi_n(x)-\psi_m(x)$ и правой частью $F_n(x,t)-F_m(x,t)$. Тогда в силу оценки (41) при любых $n,m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\|u_n-u_m\|_{C(\overline{D})}\leqslant C_6(\|\varphi_n'-\varphi_m'\|_{C[0,l]}+\|\psi_n-\psi_m\|_{C[0,l]}+\|F_n(x,t_0)-F_m(x,t_0)\|_{C[0,l]}). \qquad (43)$$

Согласно выбору последовательностей $\varphi_n'(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ они сходятся равномерно на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$. Следовательно, для них справедлив критерий Коши о равномерной сходимости. Поэтому из оценки (43) следует справедливость критерия Коши и для последовательности $u_n(x,t)$. Тогда она сходится равномерно на $\overline{D}$ к единственной функции $u(x,t)$, определяемой рядом (31), удовлетворяющей условиям (2) и непрерывной на $\overline{D}$. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что для обобщённого решения задачи (6)–(8), (2) справедлива оценка (41), что и означает устойчивость такого решения. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klebsch A.* Theorie der Elasticital faster Körper. Leipzig, 1862.
2. *Donkin W.F.* Acoustics. Oxford, 1870.
3. *Рэлей Л.* Теория звука. Т. 1. М., 1955.
4. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
6. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М., 1967.
7. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях: введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М., 1970.
8. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., 1965.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М., 1968.
10. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М., 1980.
11. *Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О.* Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск, 2010.
12. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
13. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
14. *Сабитов К.Б* Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
15. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М., 2013.

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан,
Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 08.04.2020 г.
После доработки 22.05.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.