ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 375–386

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.73

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© 2021 г. Ш. А. Алимов, А. В. Юлдашева

Доказывается существование и единственность решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с перидинамической моделью механики твёрдого тела.

DOI: 10.31857/S0374064121030080

1. Введение. Постановка задачи. Формулировка результатов. 1°. В отличие от классической механики сплошных сред, в которой линеаризованная модель описывается дифференциальными уравнениями с частными производными, перидинамическая модель приводит к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} K(x,y)[u(x,t) - u(y,t)]\,dy = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с кусочно-гладкой границей (см. [1–3]). Здесь u – неизвестная функция, а ядро K, внешняя сила f и начальные условия φ, ψ – заданные функции.

Для этой задачи Коши в работах [4–7] изучались решения, допускающие разрывы первого рода по пространственной переменной, которые исключаются моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

В данной работе рассматривается симплифицированная модель, в которой предполагается, что $n \geqslant 3$ и все входящие в уравнения (1.1) функции являются вещественнозначными и скалярными, $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ и $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$.

Интегральный оператор в правой части уравнения (1.1) имеет специальное сильно сингулярное ядро $K(x,y)$, определение которого приводится ниже. Особенности этого ядра заключаются в том, что оно вблизи диагонали $x = y$ имеет вид

$$K(x,y) = \frac{c_n}{|x-y|^n} + \gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ – интегрируемая функция, а c_n – постоянная, зависящая только от размерности n, и что оно удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu = \nu_x$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $x \in \partial\Omega$.

Соответствующий интегральный оператор

$$Av(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)[v(x) - v(y)]\,dy \tag{1.4}$$

является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

2°. Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют соотношениям

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Решение спектральной задачи (1.5) мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$ (см. [8, гл. 2, § 3]).

Введём в рассмотрение функцию $L(x,y)$, разложение которой в ряд по собственным функциям задачи (1.5) имеет вид

$$L(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} v_k(x) v_k(y). \tag{1.6}$$

В п. 1 работы показано, что такая функция существует, бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$, а вблизи диагонали имеет представление

$$L(x,y) = \alpha \frac{\ln|x-y|}{|x-y|^{n-2}} + \eta(x,y), \tag{1.7}$$

где α – постоянная, зависящая только от размерности n, а функция $\eta(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega \times \Omega$.

Оператор Лапласа, применённый к функции $L(x,y)$ по одной из переменных x или y, имеет на диагонали неинтегрируемую особенность

$$\Delta L(x,y) = -\alpha \frac{n-2}{|x-y|^n} + \Delta \eta(x,y).$$

Определим вне диагонали $x = y$ ядро

$$K(x,y) = (-\Delta_y) L(x,y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega. \tag{1.8}$$

Формально можно считать, что разложение по собственным функциям ядра $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln \lambda_k) v_k(x) v_k(y). \tag{1.9}$$

3°. Для каждого числа $\beta \geqslant 0$ определим гильбертово пространство $H^\beta(\Omega) = D((I-\Delta)^{\beta/2})$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2. \tag{1.10}$$

Через $W_2^\alpha(\Omega)$, где $\alpha > 0$, будем обозначать классические пространства Соболева (дробного) порядка α. Для любых $T > 0$ и $m = 0, 1, \ldots$ и произвольного банахова пространства B обозначим через $C^m\{[0,T] \to B\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B.

В данной работе доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *При любом α из интервала $(0,1)$ и любом положительном числе $\beta < \alpha/n$ сингулярный интегральный оператор A непрерывно действует из $W_2^\alpha(\Omega)$ в $H^\beta(\Omega)$:*

$$\|Au\|_\beta \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{W_2^\alpha}.$$

Решением задачи (1.1), (1.2) из класса $H^\beta(\Omega)$ назовём функцию $u \in C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2).

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < \alpha/n$. *Для любого* $T > 0$ *и любых* $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$ *и* $f \in C\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\}$ *существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) из класса* $C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$.

При доказательстве теорем 1 и 2 важную роль играет следующее утверждение, доказательство которого приводится в заключительном пункте работы.

Теорема 3. *При любом* α *из интервала* $(0,1)$ *и любом положительном числе* $\beta < \alpha/n$ *тождественный оператор непрерывно действует из* $W_2^\alpha(\Omega)$ *в* $H^\beta(\Omega)$:

$$\|u\|_\beta \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{W_2^\alpha}.$$

Доказательство теоремы 3 проводится методом, предложенным В.А. Ильиным (см. [9, гл. 1]).

Отметим, что доказательство всех утверждений в п. 5 не опирается на результаты предыдущих параграфов и проводится независимо от них.

2. Ядро специального вида. Зафиксируем какую-либо невозрастающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ r \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } \ r \geqslant 1. \end{cases}$$

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$ и для каждой точки $x \in \Omega$ положим

$$R = R(x) = \min\{\delta,\, \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)\},$$

где через $\mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega)$ обозначено расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ области Ω. Обозначив $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega) > \delta\}$, имеем очевидное равенство $R(x) = \delta$, если $x \in \Omega_\delta$.

Введём в рассмотрение следующую функцию (напомним, что $n \geqslant 3$):

$$L_0(x,y) = \alpha|x-y|^{2-n} \ln \frac{1}{|x-y|}\chi\biggl(\frac{|x-y|}{R(x)}\biggr), \tag{2.1}$$

где $\alpha = \Gamma(n/2-1)/(2\pi^{n/2})$.

Заметим, что функцию (2.1) при каждом фиксированном $x \in \Omega$ можно рассматривать как регулярное распределение, принадлежащее классу Соболева $W_2^{-l}(\Omega)$ при $l > (n-4)/2$ (см. [8, гл. 1, § 3]).

Считая x параметром, найдём коэффициенты Фурье функции $L_0(x,y)$ по системе $\{v_k\}$:

$$a_k(x) = \int\limits_\Omega L_0(x,y) v_k(y)\, dy = \alpha \int\limits_{|x-y|\leqslant R} |x-y|^{2-n} \ln\biggl(\frac{1}{|x-y|}\biggr)\chi\biggl(\frac{|x-y|}{R}\biggr) v_k(y)\, dy.$$

Перейдя к сферическим координатам с центром в точке x, получим

$$a_k(x) = \alpha \int\limits_0^R r^{n-1}\, dr \int\limits_{S^{n-1}} r^{2-n}\biggl(\ln\frac{1}{r}\biggr)\chi(r/R) v_k(x+r\theta)\, d\theta =$$

$$= \alpha \int\limits_0^R \biggl(\ln\frac{1}{r}\biggr)\chi(r/R) r\, dr \int\limits_{S^{n-1}} v_k(x+r\theta)\, d\theta. \tag{2.2}$$

Далее применим формулу среднего значения (см. [9, формула (1.1.2)]):

$$\int\limits_{S^{n-1}} v(x+r\theta)\, d\theta = v_k(x)(2\pi)^{n/2}(r\sqrt{\lambda_k})^{1-n/2} J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda_k}).$$

Учитывая эту формулу в представлении (2.2), будем иметь

$$a_k(x) = v_k(x)(2\pi)^{n/2}\alpha\sqrt{\lambda_k}^{\,1-n/2}\int\limits_0^R \left(\ln\frac{1}{r}\right) J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda_k})\chi(r/R)r^{2-n/2}\,dr.$$

Сделав замену $t = r\sqrt{\lambda_k}$, получим

$$a_k(x) = v_k(x)\alpha\frac{(2\pi)^{n/2}}{\lambda_k}\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}}\left(\ln\frac{\sqrt{\lambda_k}}{t}\right)\chi\left(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}}\right)J_{n/2-1}(t)t^{2-n/2}\,dt. \tag{2.3}$$

Далее воспользуемся тем, что для интеграла

$$b(\mu) = \int\limits_0^{R\mu}\left(\ln\frac{\mu}{t}\right)\chi\left(\frac{t}{R\mu}\right)J_{n/2-1}(t)t^{2-n/2}\,dt$$

имеет место следующее асимптотическое представление:

$$b(\mu) = \frac{\ln\mu}{2^{n/2-2}\Gamma(n/2-1)} + \beta + O_R(\mu^{-N}) \quad \text{при} \quad \mu\to+\infty,$$

справедливое для любого натурального числа N (см. [7, предложение 3.1]). В этом соотношении β – некоторая постоянная, зависящая только от размерности n.

Подставляя это асимптотическое представление в (2.3), получаем следующее равенство:

$$a_k(x) = v_k(x)\left[\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} + \frac{\gamma}{\lambda_k} + O_x(\lambda_k^{-N})\right].$$

Отсюда и из равенства (2.3) вытекает

Лемма 2.1. *Разложение функции (2.1) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1.5) имеет вид*

$$L_0(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)v_k(y) + \gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty}d_k(x)v_k(x)v_k(y),$$

где коэффициенты $d_k(x)$ при любом натуральном N удовлетворяют условию

$$|d_k(x)| \leqslant \frac{C_N(x)}{(1+\lambda_k)^N}, \tag{2.4}$$

а величины $C_N(x)$ ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области Ω.

Замечание 2.1. *Если $x\in\Omega_\delta$ и $\xi\in\Omega_\delta$, то $R(x) = R(\xi) = \delta$ и $c_k(x) = c_k(\xi)$.*

Обозначим через $G(x,y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (1.5):

$$G(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k}.$$

Далее положим

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}d_k(x)v_k(x)v_k(y).$$

Из оценки (2.4) вытекает, что функция $R(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega_\delta\times\Omega$. Введём функцию

$$L(x,y) = L_0(x,y) - \gamma G(x,y) - R(x,y), \quad (x,y)\in\Omega\times\Omega. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *Ряд Фурье функции* $L(x,y)$, *определённой равенством (2.5), имеет вид*

$$L(x,y)=\sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)v_k(y). \tag{2.6}$$

Функция $L(x,y)$ *бесконечно дифференцируема по* y *вне диагонали* $y=x$ *и равномерно на каждом компакте* $K\subset\Omega$ *её производные удовлетворяют условию*

$$|D_y^\alpha L(x,y)|\leqslant \text{const}\,\frac{|\ln|x-y||}{|x-y|^{n-2+\alpha}},\quad x\in K,\quad y\in\Omega.$$

Доказательство следует из определений (2.1), (2.5) и свойств обобщённой функции Грина $G(x,y)$ (см. [9, гл. 1, § 2]).

Замечание 2.2. *Лемма 2.2 означает, что функция* $L(x,y)$ *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\int\limits_\Omega L(x,y)v_k(y)\,dy=\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x),\quad k=1,2,\ldots \tag{2.7}$$

Из результатов работы [10] следует, что ряд (2.6) расходится на множестве положительной меры. Тем не менее, согласно теореме 3 работы [11], он суммируется средними Рисса порядка $s>n-5/2$ равномерно по y на каждом компактном подмножестве области Ω, не содержащем точки x.

Обратим внимание на то, что правая часть равенства (2.5), которая определяет функцию $L(x,y)$, содержит функции, зависящие от параметра δ. Однако из равенства (2.7) и из полноты системы собственных функций (1.5) вытекает, что функция $L(x,y)$ от δ не зависит.

Замечание 2.3. Отметим, что функция $f(y)=\Delta_y L_0(x,y)$ не является локально интегрируемой в области Ω и представляет собой сингулярное распределение из класса $W_2^{-l}(\Omega)$ при $l>n/2$. Из леммы 2.2 и из теоремы 3 работы [11] следует, что разложение (1.9) суммируется средними Рисса порядка $s>n-1/2$ равномерно на каждом компактном подмножестве Ω, не содержащем точку x.

3. Преобразование основного уравнения. Напомним, что сингулярный интегральный оператор A задан равенством (1.4), в котором ядро $K(x,y)$ в свою очередь определяется равенствами (1.6) и (1.8).

Лемма 3.1. *Для любой функции* $u\in C_0^\infty(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$Au(x)=-\sum_{k=1}^\infty(\ln\lambda_k)(u,v_k)v_k(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.1}$$

Доказательство. Заметим, что для любой гладкой функции $u(x)$ несобственный интеграл

$$\int\limits_\Omega\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^n}\,dy=-\frac{1}{n-2}\int\limits_\Omega\biggl(\Delta_y\frac{\ln|x-y|}{|x-y|^{n-2}}\biggr)[u(x)-u(y)]\,dy,\quad x\in\Omega,$$

является сходящимся. Следовательно, согласно определению (1.8), для любой функции $u\in$ $\in C_0^\infty(\Omega)$ сходится интеграл

$$\int\limits_\Omega K(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy=\int\limits_\Omega(-\Delta_y)L(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy,\quad x\in\Omega.$$

Положим $B(\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<\varepsilon\}$. Тогда для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ и любой точки $x\in\Omega$, удовлетворяющей условию (1.3), при достаточно малых $\varepsilon>0$ по формуле Грина получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(\varepsilon)}\Delta_y L(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy=\int\limits_{\Omega\setminus B(\varepsilon)}L(x,y)\Delta_y[u(x)-u(y)]\,dy+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left([u(x)-u(y)]\frac{\partial L(x,y)}{\partial\nu_y}-L(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}[u(x)-u(y)]\right)d\sigma(y)+$$

$$+\int\limits_{\partial B(\varepsilon)}\left([u(x)-u(y)]\frac{\partial L(x,y)}{\partial\nu_y}-L(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}[u(x)-u(y)]\right)d\sigma(y).$$

Из финитности функции u и из условия (1.3) следует, что интеграл по поверхности $\partial\Omega$ равен нулю.

Согласно (1.7), для любой гладкой функции u поверхностный интеграл по границе шара $B(\varepsilon)$ есть величина $O(\varepsilon\ln 1/\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$\int\limits_{\Omega}K(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy=\int\limits_{\Omega}L(x,y)(-\Delta u(y))\,dy. \tag{3.2}$$

Далее воспользуемся тем, что для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства $u(y)=\sum_{k=1}^\infty(u,v_k)v_k(y)$ и $-\Delta u(y)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k(u,v_k)v_k(y)$, причём оба ряда сходятся в метрике $L_2(\Omega)$. В таком случае справедливо равенство

$$L(x,y)(-\Delta u(y))=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k L(x,y)(u,v_k)v_k(y),\quad x\in\Omega,\quad y\in\Omega,$$

которое можно проинтегрировать почленно. В результате, согласно соотношениям (2.7), получаем

$$\int\limits_{\Omega}L(x,y)(-\Delta u(y))\,dy=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k\int\limits_{\Omega}L(x,y)(u,v_k)v_k(y)\,dy=\sum_{k=1}^\infty\ln\lambda_k(u,v_k)v_k(x),\quad x\in\Omega.$$

Отсюда и из (3.2) следует требуемое равенство (3.1). Лемма доказана.

Следствие. *Для любой функции* $u\in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\|Au\|_\beta^2=\sum_{k=1}^\infty|(u,v_k)|^2\lambda_k^\beta\ln^2\lambda_k. \tag{3.3}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства воспользуемся теоремой 3, доказанной в п. 5.

Пусть $u\in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0<\alpha<1$, и пусть $0<\beta<\alpha/n$. Согласно теореме 3 для любого положительного $\beta_1<\alpha/n$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{\beta_1}\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{W_2^\alpha}. \tag{3.4}$$

Выберем произвольно число $\beta_1\in(\beta,\alpha/n)$ и применим очевидную оценку $|\ln\lambda_k|\leqslant\mathrm{const}\times\times\lambda_k^{\beta_1-\beta}$, $\lambda_k\geqslant\lambda_1>0$. Тогда из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\|Au\|_\beta^2\leqslant\mathrm{const}\sum_{k=1}^\infty|(u,v_k)|^2\lambda_k^{\beta_1}\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{\beta_1}^2\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{W_2^\alpha}^2.$$

4. Разрешимость основного уравнения. Будем искать решение уравнения (1.1) в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (1.5):

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^\infty c_k(t)v_k(x),\quad x\in\Omega,\quad t\geqslant 0.$$

Тогда, согласно лемме 3.1, имеем

$$Au(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)(\ln\lambda_k)v_k(x).$$

В таком случае из уравнения (1.1) получаем

$$c_0''(t) = f_0(t), \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)v_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty}(\ln\lambda_k)c_k(t)v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x),$$

где $f_k(t) = (f, v_k)$. Следовательно, при $k \geqslant 1$ имеет место уравнение

$$c_k''(t) - (\ln\lambda_k)c_k(t) = f_k(t).$$

Положим

$$\mu_k = \sqrt{\ln\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

В этих обозначениях уравнение для функции c_k запишется в виде

$$c_k''(t) - \mu_k^2 c_k(t) = f_k(t). \tag{4.3}$$

Из уравнений (4.1) и (4.3) находим соответственно

$$c_0(t) = a_0 + b_0 t + \int\limits_0^t (t-s)f_0(s)\,ds$$

и

$$c_k(t) = a_k \operatorname{ch}(\mu_k t) + b_k\frac{\operatorname{sh}(\mu_k t)}{\mu_k} + \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^t \operatorname{sh}(\mu_k(t-s))f_k(s)\,ds.$$

Принимая во внимание начальные условия (1.2), приходим к следующим соотношениям для коэффициентов Фурье искомого решения задачи (1.5):

$$c_0(t) = (\varphi, v_0) + (\psi, v_0)t + \int\limits_0^t (t-s)(f, v_0)(s)\,ds,$$

$$c_k(t) = (\varphi, v_k)\operatorname{ch}(\mu_k t) + (\psi, v_k)\frac{\operatorname{sh}(\mu_k t)}{\mu_k} + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(\mu_k(t-s))f_k(s)\,ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из уравнений (4.1) и (4.3) следует, что вторая производная по переменной t, входящая в уравнение (1.1), формально разлагается в следующий ряд Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = (f, v_0)(t)v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 c_k(t)v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f, v_k)(t)v_k(x). \tag{4.4}$$

Для доказательства существования решения достаточно убедиться в сходимости в метрике пространства $H^\beta(\Omega)$ рядов (4.4).

Лемма 4.1. *Пусть* $\rho_k \geqslant 0$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$ *сходится. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *и любом* $T > 0$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{\lambda_k^{\varepsilon}} e^{\mu_k t}$$

сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Заметим, что, согласно обозначениям (4.2),

$$(e^{\mu_k})^{\mu_k} = e^{\mu_k^2} = e^{\ln \lambda_k} = \lambda_k.$$

Отсюда получаем $e^{\mu_k} = \lambda_k^{1/\mu_k}$. Следовательно, для любого $T > 0$ верно равенство

$$e^{\mu_k T} = \lambda_k^{T/\mu_k}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем номер $N = N(\varepsilon, T)$ таким, чтобы при $k \geqslant N$ выполнялось неравенство $\mu_k \geqslant T/\varepsilon$, т.е. $T/\mu_k \leqslant \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant N$ будет справедливо неравенство

$$e^{\mu_k T} \leqslant \lambda_k^{\varepsilon}.$$

Следовательно, для всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\frac{\rho_k}{\lambda_k^{\varepsilon}} e^{\mu_k t} \leqslant \rho_k, \quad k \geqslant N, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда, мажорируемого сходящимся числовым рядом.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняется условие $0 < \alpha < 1$ и пусть начальные данные (1.2) и правая часть уравнения (1.1) принадлежат следующим классам:

$$\varphi \in W_2^{\alpha}(\Omega), \quad \psi \in W_2^{\alpha}(\Omega), \quad f \in C\{[0, T] \to W_2^{\alpha}(\Omega)\}.$$

Согласно теореме 3 (см. ниже п. 5) отсюда следует, что для любого положительного $\beta_1 < \alpha/n$ сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|(\varphi, v_k)|^2 + |(\psi, v_k)|^2 + |f_k(t)|^2) \lambda_k^{\beta_1} < \infty. \tag{4.5}$$

Покажем, что в этом случае для любого положительного $\beta < \alpha/n$ ряды (4.4) сходятся в метрике пространства $H^{\beta}(\Omega)$. Согласно определению нормы в пространстве $H^{\beta}(\Omega)$ (см. (1.10)) для этого требуется доказать, что сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)|^2 \mu_k^4 \lambda_k^{\beta} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, v_k)(t)|^2 \lambda_k^{\beta} < \infty. \tag{4.6}$$

Отметим, что выполнение условия (4.5) обеспечивает сходимость второго ряда в (4.6), причём принадлежность функции f классу $C\{[0, T] \to W_2^{\alpha}(\Omega)\}$ гарантирует его равномерную по $t \in [0, T]$ сходимость.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остаётся доказать равномерную по $t \in [0, T]$ сходимость первого ряда в (4.6). Для этого воспользуемся леммой 4.1. Из этой леммы и условия (4.5) следует, что первый ряд в (4.6) мажоририруется сходящимся числовым рядом, что и означает равномерную его сходимость.

5. Доказательство теоремы 3. Напомним, что для любого $h > 0$ символом Ω_h мы обозначили множество $\Omega_h = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h\}$. Будем говорить, что область Ω принадлежит *классу* B^{τ}, где $0 < \tau \leqslant 1$, и писать $\Omega \in B^{\tau}$, если выполняется условие

$$|\Omega \setminus \Omega_h| \leqslant \operatorname{const} h^{\tau}, \quad 0 < h < 1. \tag{5.1}$$

Далее, будем говорить, что функция f принадлежит *классу* $W_p^\alpha(\Omega)$, если она является следом некоторой функции из $W_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$, которую будем обозначать тем же символом f.

Всюду ниже в данном параграфе предполагается, что $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0 < \alpha < 1$.

Для каждого $h > 0$ через χ_h обозначим характеристическую функцию множества Ω_h, т.е.

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in \Omega_h, \\ 0, & \text{если } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Введём функции

$$P(x,h) = f(x)\chi_{3h}(x), \quad Q(x,h) = f(x)[\chi(x) - \chi_{3h}(x)], \tag{5.2}$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция области Ω. Очевидно, что носитель функции $P(x,h)$ содержится в области Ω_{3h}, а носитель функции $Q(x,h)$– в дополнении $\Omega \setminus \Omega_{3h}$. Очевидно также, что выполняется равенство

$$f(x) = P(x,h) + Q(x,h), \quad x \in \Omega.$$

Лемма 5.1. *Для любого вектора* $u \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $|u| \leqslant h$, *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |P(x+u,h) - P(x,h)|^2\, dx \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n} \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Очевидно, что интегрирование в (5.3) ведётся фактически по области Ω_h. Подынтегральную функцию можно представить в следующем виде:

$$P(x+u,h) - P(x,h) = f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)] + \chi_{3h}(x)[f(x+u) - f(x)].$$

Поэтому

$$\|P(x+u,h) - P(x,h)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ \|\chi_{3h}(x)[f(x+u) - f(x)]\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.4}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (5.4) заметим, что, согласно теоремам вложения (см. [12, гл. 9, § 9.6]), функция f принадлежит классу $L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, где $p_1 = 2n/(n-2\alpha)$. Положим $p = p_1/2$. Тогда $1/p = 1 - 2\alpha/n$, т.е.

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{2\alpha}{n}.$$

В таком случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)|^{2p}\, dx\bigg)^{1/p} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)|^{2q}\, dx\bigg)^{1/q}. \tag{5.5}$$

Согласно оценке (5.1) отсюда получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]|^2\, dx \leqslant \operatorname{const}|u|^{\tau/q} \|f\|^2_{W_2^\alpha} \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n} \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.6}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi_{3h}(x)[f(x+u)-f(x)]|^2\,dx \leqslant \mathrm{const}|u|^{2\alpha}\|f\|^2_{W_2^\alpha} \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.7}$$

Поскольку $\tau < n$, из неравенств (5.6) и (5.7) вытекает требуемая оценка (5.3).

Лемма 5.2. *Для любого $h > 0$ выполняется оценка*

$$\int\limits_{\Omega} |Q(x,h)|^2\,dx \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Воспользовавшись определением (5.2) и оценкой (5.5), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)[\chi(x)-\chi_{3h}(x)]|^2\,dx \leqslant \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{2p}\,dx\biggr)^{1/p}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\chi(x)-\chi_{3h}(x)|^{2q}\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant \mathrm{const}\,h^{\tau/q}\|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Так как $1/q = 2\alpha/n$, то отсюда следует требуемая оценка (5.8). Лемма доказана.

Обозначим через $P_k(h)$ коэффициенты Фурье функции $P(x,h)$ и, соответственно, через $Q_k(h)$ коэффициенты Фурье функции $Q(x,h)$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\Omega \in B^\tau$, где $0 < \tau \leqslant 1$.

Лемма 5.3. *Пусть $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда при любом $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Введём функцию

$$E(x,h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x+h\theta,h)\,d\theta.$$

Очевидно, что её носитель содержится в области Ω_{2h}. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$E_k(h) = \int\limits_{\Omega} E(x,h)v_k(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^{n-1}} P(x+h\theta,h)v_k(x)\,d\theta\,dx.$$

Проведя замену переменных и меняя порядок интегрирования, получаем

$$E_k(h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^{n-1}} P(x,h)v_k(x+h\theta)\,d\theta\,dx.$$

Далее применим формулу среднего значения (см. [9, формула (1.1.2)]):

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} v_k(x+h\theta)\,d\theta = \phi(h\sqrt{\lambda_k})v_k(x),$$

где

$$\phi(t) = 2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)t^{(2-n)/2}J_{(n-2)/2}(t). \tag{5.10}$$

Следовательно, коэффициенты Фурье функции $E(x,h)$ связаны с коэффициентами Фурье $P_k(h)$ функции $P(x,h)$ равенством $E_k(h) = P_k(h)\phi(h\sqrt{\lambda_k})$. Поэтому коэффициенты Фурье функции

$$E(x,h) - P(x,h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} [P(x+h\theta,h)-P(x,h)]\,d\theta$$

равны $P_k(h)[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]$. Тогда, применяя к функции $E(x,h)-P(x,h)$ равенство Парсеваля, будем иметь

$$\|E(x,h)-P(x,h)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2. \tag{5.11}$$

Из леммы 5.1 следует оценка

$$\|E(x,h)-P(x,h)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathrm{const}\, h^{\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha},$$

из которой и равенства (5.11) вытекает требуемое неравенство (5.9).

Лемма 5.4. *Пусть* $f\in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $h>0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Для коэффициентов Фурье $Q_k(h)$ функции $Q(x,h)$ в силу оценки (5.8) и равенства Парсеваля получаем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(h)|^2 \leqslant \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}. \tag{5.13}$$

Поскольку функция $\phi(t)$, определённая равенством (5.10), равномерно ограничена, выполняется оценка $|\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1|\leqslant \mathrm{const}$, из которой и неравенства (5.13) следует требуемая оценка (5.12).

Лемма 5.5. *Пусть* $\Omega\in B^\tau$, *где* $0<\tau\leqslant 1$, *и* $f\in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $\mu\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2\mu} |f_k|^2 \leqslant \mathrm{const}\, \mu^{-2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}, \tag{5.14}$$

где f_k – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Так как $f=P+Q$, то из лемм 5.3 и 5.4 следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.15}$$

Нетрудно видеть, что существуют числа $a>0$ и $b>0$, для которых $|\phi(t)-1|\geqslant b$, $a\leqslant t\leqslant 2a$. Отсюда и из неравенства (5.15) получаем

$$\sum_{a\leqslant h\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2a} |f_k|^2 \leqslant \frac{1}{b^2}\sum_{a\leqslant h\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2a} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \frac{1}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \mathrm{const}\, h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Для любого $\mu>0$, положив $h=a/\mu$, получим неравенство (5.14).

Лемма 5.6. *Пусть* $\Omega\in B^\tau$, *где* $0<\tau\leqslant 1$, *и* $f\in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $\beta<\alpha\tau/n$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\lambda_k^\beta \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Оценим сумму в левой части оценки (5.16) с помощью двоичного разбиения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\lambda_k^\beta = \sum_{0\leqslant\sqrt{\lambda_k}<1} |f_k|^2\lambda_k^\beta + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{2^m\leqslant\sqrt{\lambda_k}<2^{m+1}} |f_k|^2\lambda_k^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \mathrm{const}\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta}\sum_{2^m\leqslant\sqrt{\lambda_k}<2^{m+1}} |f_k|^2.$$

Применяя к каждой внутренней сумме лемму 5.5 с $\mu = 2^{2m}$, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta} \sum_{2^m \leqslant \sqrt{\lambda_k} < 2^{m+1}} |f_k|^2 \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|^2_{W_2^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta} 2^{-2m\alpha\tau/n} = \mathrm{const}\, \|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Доказательство теоремы 3. По условию область Ω имеет кусочно-гладкую границу и поэтому принадлежит классу B^τ при $\tau = 1$. Поэтому справедливость теоремы 3 вытекает из леммы 5.6, в которой следует положить $\tau = 1$.

Замечание 5.1. Теорема 3 фактически утверждает, что для любого α из интервала $(0, 1)$ классы Соболева $W_2^\alpha(\Omega)$ при любом положительном $\beta < \alpha/n$ содержатся в области определения дробной степени оператора Лапласа: $W_2^\alpha(\Omega) \subset D((-\Delta)^{\beta/2})$.

При этом от функций из соответствующих классов Соболева не требуется выполнения каких-либо граничных условий.

Замечание 5.2. Приведённое выше доказательство теоремы 3 не использует тот факт, что собственные функции оператора Лапласа удовлетворяют краевым условиям (1.5). Следовательно, теорема справедлива для спектральных разложений, отвечающих произвольному самосопряжённому расширению оператора Лапласа с дискретным спектром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Silling S.A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. № 1. P. 175–209.
2. *Silling S.A., Zimmermann M., Abeyaratne R.* Deformation of a peridynamic bar // J. of Elasticity. 2003. V. 73. P. 173–190.
3. *Seleson P., Parks M.L., Gunzburger M., Lehoucq R.B.* Peridynamics as an upscaling of molecular dynamics // Multiscale Model. Simul. 2009. V. 8. № 1. P. 204–227.
4. *Du Q., Kamm J.R., Lehoucq R.B., Parks M.L.* A new approach for a nonlocal, nonlinear conservation law // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72. № 1. P. 464–487.
5. *Emmrich E., Lehoucq R., Puhst D.* A nonlocal continuum theory // Lect. Not. in Comput. Sci. and Engineering. 2013. V. 89. P. 45–65.
6. *Alimov S.A., Cao Y., Ilhan O.A.* On the problems of peridynamics with special convolution kernels // J. of Integral Equat. and Appl. 2014. V. 26. № 3. P. 301–321.
7. *Alimov S.A., Sheraliev S.* On the solvability of the singular equation of peridynamics // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 873–887.
8. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
9. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М., 1991.
10. *Ильин В.А., Алимов Ш.А.* О расходимости на множестве положительной меры средних Рисса ядер дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 2. С. 372–373.
11. *Алимов Ш.А., Рахимов А.А.* О локализации спектральных разложений распределений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 792–796.
12. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент,
Ташкентский филиал Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова, Узбекистан

Поступила в редакцию 09.11.2020 г.
После доработки 09.11.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.