ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 387–398

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЁРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2021 г. С. Н. Асхабов

Для интегро-дифференциального уравнения типа свёртки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом, заданного на полуоси $[0,\infty)$, методом весовых метрик в конусе пространства $C^1(0,\infty)$, образованном положительными на $(0,\infty)$ и равными нулю в нуле функциями, доказывается глобальная теорема о существовании и единственности решения, принадлежащего указанному конусу. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа, установлена оценка скорости сходимости приближений. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064121030092

Введение. В работе [1] изучалось нелинейное интегральное уравнение типа свёртки вида

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>0, \tag{1}$$

возникающее в исследованиях различных физических процессов: при изучении инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду; при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом; при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе; в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [2–4]). Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x>0$ решения интегрального уравнения (1).

В данной работе в конусе Q, образованном неотрицательными непрерывными на полуоси $[0,\infty)$ вещественнозначными функциями, удовлетворяющими условию $u(0)=0$, изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>0, \tag{2}$$

тесно связанное, как будет показано ниже, с уравнением (1).

Исследование основывается на некоторой модификации принципа сжимающих отображений (аналог метода А. Белицкого [5, 6]), позволяющей при удачном выборе метрики доказывать глобальные теоремы существования и единственности решений без ограничений на их область определения (описание метода Белицкого и его преимуществ приведено, например, в монографии [7, гл. 3, п. 3.1.3]).

Отметим, что метод Белицкого неоднократно переоткрывался и в связи с этим была опубликована статья [8], в которой обоснован приоритет Белицкого в разработке данного метода.

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (2) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого, доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (2) как в пространстве P_b, так и во всём классе непрерывных положительных при $x>0$

функций. Показано, что решение уравнения (2) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. Приведены также простые примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

1. Свойства неотрицательных решений. Основным объектом исследования в данной работе является нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки (2), в котором ядро $k(x)$ и коэффициент $a(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$k \in C^2[0,\infty), \quad k'(x) \ \text{не убывает на} \ [0,\infty), \quad k(0)=0 \ \text{и} \ k'(0)>0, \tag{3}$$

$$a \in C^1[0,\infty), \quad a(x) \ \text{не убывает на} \ [0,\infty) \ \text{и} \ a(x)>0 \ \text{при} \ x>0, \tag{4}$$

где через $C^1[0,\infty)$ обозначено пространство всех непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ функций.

В связи с указанными во введении приложениями и тем, что нас интересуют нетривиальные решения, мы будем разыскивать решения уравнения (2) в конусе

$$Q_0^1 = \{u(x) \in C[0,\infty) \bigcap C^1(0,\infty) : u(0)=0 \ \text{и} \ u(x)>0 \ \text{при} \ x>0\}$$

пространства $C^1(0,\infty)$.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (2) будет рассматриваться также интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>0, \tag{5}$$

решения которого будем искать в конусе

$$Q_0 = \{u(x) \in C[0,\infty) : u(0)=0 \ \text{и} \ u(x)>0 \ \text{при} \ x>0\}$$

пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$.

Обозначим также через Q конус, образованный неотрицательными непрерывными на $[0,\infty)$ функциями, т.е. $Q=\{u(x)\in C[0,\infty) : u(x)\geqslant 0\}$.

В связи с тем, что нас интересуют условия, при которых уравнения (2) и (5) имеют нетривиальные решения, докажем следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть $\alpha>0$ и $a(x)$, $k(x)$ – неотрицательные непрерывные на полуоси $[0,\infty)$ функции. Для того чтобы интегро-дифференциальное уравнение (2) имело нетривиальное решение, принадлежащее конусу Q, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_0^\delta k(t)\,dt > 0 \quad \textit{для всех} \ \ \delta>0. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим противное: существует число $\delta>0$ такое, что $\int_0^\delta k(t)\,dt=0$ и тем не менее уравнение (2) имеет решение $u(x)\not\equiv 0$. Так как ядро $k(x)$ неотрицательно и непрерывно, то из последнего равенства следует, что $k(t)\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant\delta$. Но тогда из (2) в силу коммутативности свёртки имеем

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k(t)\,u'(x-t)\,dt = 0, \quad \text{если} \ \ 0\leqslant x\leqslant\delta.$$

Значит, $u(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\delta]$, поэтому и $u'(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\delta]$.

Пусть теперь $x \in [\delta, 2\delta]$. Тогда $0 \leqslant x-\delta \leqslant \delta$ и из тождества (2), поскольку $u'(t) = k(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$, вытекает, что

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)\,u'(t)\,dt = a(x)\int\limits_{\delta}^x k(x-t)\,u'(t)\,dt = a(x)\int\limits_0^{x-\delta} k(t)\,u'(x-t)\,dt = 0,$$

так как $k(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant x-\delta \leqslant \delta$. Значит, $u(x) \equiv 0$ и при $x \in [\delta, 2\delta]$.

Итак, мы показали, что $u(x) \equiv 0$ при $x \in [0, 2\delta]$. Продолжая такие же рассуждения далее, заключаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество $u(x) \equiv 0$ при $x \in [0, n\delta]$, а значит, $u(x) \equiv 0$ на $[0, \infty)$, но это противоречит тому, что $u(x) \not\equiv 0$. Лемма доказана.

Заметим, что условие (6), необходимое для существования нетривиального неотрицательного непрерывного решения уравнения (2), выполняется для ядра $k(x)$, удовлетворяющего условию (3).

Прежде чем продолжить исследование уравнений (2), (5), заметим, что если функция $u(x) \in Q$ является нетривиальным решением уравнения (5) при $a(x) = 1$, то для любого $\delta > 0$ каждый из её сдвигов

$$u_{\delta}(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если } x > \delta, \\ 0, & \text{если } x \leqslant \delta, \end{cases}$$

также является решением уравнения (5), что проверяется непосредственной подстановкой функций $u_{\delta}(x)$ в это уравнение. Следовательно, уравнение (5) может иметь в конусе Q континуум нетривиальных решений. Поэтому, чтобы задачу отыскания нетривиальных решений уравнения (5) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной точки зрения интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения, будем разыскивать решения уравнения (5) в конусе Q_0.

Это замечание справедливо и для интегро-дифференциального уравнения (2).

Лемма 2. *Пусть* $\alpha > 0$ *и выполнены условия (3), (4). Если* $u(x) \in Q_0$ *– решение интегрального уравнения (5), то функция* $u(x)$ *является неубывающей и непрерывно дифференцируемой на* $(0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ – решение уравнения (5) и $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ – произвольные числа такие, что $x_1 < x_2$. Так как $k'(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и неотрицательна, то свёртка

$$(k' * u)(x) = \int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt$$

также не убывает, поскольку

$$(k' * u)(x_2) - (k' * u)(x_1) = \int\limits_0^{x_1} [k'(x_2-t) - k'(x_1-t)]u(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} k'(x_2-t)u(t)\,dt \geqslant 0.$$

Значит, функция $u^{\alpha}(x)$, являясь, согласно (5), произведением двух неубывающих неотрицательных функций, также не убывает на $[0, \infty)$. Следовательно, сама функция $u(x)$ не убывает и поэтому почти всюду дифференцируема на полуоси $[0, \infty)$.

Докажем теперь, что решение $u(x)$ является непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функцией. Так как по условию $k \in C^2[0, \infty)$, то правая часть тождества (5) дифференцируема и в силу свойства коммутативности свёртки [3, § 17] справедливо равенство

$$\left(\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)' = \int\limits_0^x k''(x-t)u(t)\,dt + k'(0)u(x) = \int\limits_0^x k''(t)u(x-t)\,dt + k'(0)u(x). \tag{7}$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, а функция $k''(x)$ локально ограничена на $[0,\infty)$, то в силу теоремы о непрерывности свёртки [3, теорема 17.9] производная (7) непрерывна на $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (5), что влечёт за собой существование и непрерывность первой производной $u'(x)$ при $x>0$, так как

$$u'(x)=\alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\Big[a'(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)dt+a(x)\Big(\int\limits_0^x k''(t)u(x-t)\,dt+k'(0)u(x)\Big)\Big].$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда интегральное уравнение (5) при $0<\alpha\leqslant 1$ имеет в конусе Q лишь тривиальное решение $u(x)\equiv 0$.*

Доказательство. При $\alpha=1$ утверждение леммы 3 очевидно, поэтому далее считаем, что $0<\alpha<1$. Допустим противное, т.е. что уравнение (5) имеет нетривиальное решение $u(x)\in Q$. Тогда найдётся $x_0>0$ такое, что $u(x_0)>0$. Очевидно, что $u(0)=0$. Положим

$$x_n=\inf\{x:0\leqslant x\leqslant x_0 \ \text{ и } \ u(x)=2^{-n}u(x_0)\}.$$

Тогда $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)$ и в силу леммы 2 справедливо неравенство $u(t)\leqslant u(x_n)$ при $t<x_n$.

Положим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=q$. Тогда возможны два случая: $q=0$ и $q>0$.

1) Пусть $q=0$. В этом случае из уравнения (5) следует, что

$$u^\alpha(x_n)=a(x_n)\int\limits_0^{x_n}k'(x_n-t)u(t)\,dt\leqslant a(x_n)u(x_n)\int\limits_0^{x_n}k'(x_n-t)\,dt=a(x_n)u(x_n)k(x_n),$$

или $(u(x_n))^{\alpha-1}\leqslant a(x_n)k(x_n)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учётом того, что $u(0)=0$, $k(0)=0$ и $\alpha-1<0$, приходим к противоречию: $\infty\leqslant 0$.

2) Пусть $q>0$. Из определения x_n следует, что $q\leqslant x_n$ при любом $n\in\mathbb{N}$ и $u(t)\equiv 0$ при $t\leqslant q$. В самом деле, переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)$, получаем $u(q)=0$. Так как функция $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и $u(0)=u(q)=0$, то $u(t)\equiv 0$ для всех $t\leqslant q$. Поэтому из (5) имеем

$$u^\alpha(x_n)=a(x_n)\int\limits_0^{q}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt+a(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt=a(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant a(x_n)u(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,dt=a(x_n)u(x_n)\int\limits_0^{x_n-q}k'(t)dt=a(x_n)u(x_n)k(x_n-q).$$

Следовательно,

$$(u(x_n))^{\alpha-1}\leqslant a(x_n)k(x_n-q).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учётом того, что $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)\to 0$, $k(0)=0$ и $\alpha-1<0$, снова получаем противоречие: $\infty\leqslant 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает, что уравнения (2) и (5) не имеет смысла исследовать при $0<\alpha\leqslant 1$, поэтому всюду далее без оговорок предполагается, что $\alpha>1$.

Следующая лемма устанавливает связь между интегро-дифференциальным уравнением (2) и интегральным уравнением (5).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если $u(x)\in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения (2), то $u(x)$ принадлежит конусу Q_0 и является решением интегрального уравнения (5). Обратно, если уравнение (5) имеет решение $u(x)\in Q_0$, то $u(x)$ принадлежит конусу Q_0^1 и является решением уравнения (2).*

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0^1$ является решением уравнения (2). Так как $Q_0^1 \subset Q_0$, то $u(x) \in Q_0$. Поскольку $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, то, вычисляя интеграл в уравнении (2) по частям, получаем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k(x-t)\, du(t) = a(x) \int\limits_0^x u(t) k'(x-t)\, dt,$$

т.е. функция $u(x)$ является решением уравнения (5).

Обратно, пусть $u(x) \in Q_0$ является решением уравнения (5). Тогда, согласно лемме 2, функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^1(0,\infty)$, а значит, $u(x) \in Q_0^1$. Используя свойство коммутативности свёртки, формулу интегрирования по частям и равенства $k(0) = u(0) = 0$, из уравнения (5) имеем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k'(t) u(x-t)\, dt = a(x) \int\limits_0^x k(t) u'(x-t)\, dt = a(x) \int\limits_0^x k(x-t) u'(t)\, dt,$$

т.е. функция $u(x)$ является решением уравнения (2). Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для доказательства существования в конусе Q_0^1 решения интегро-дифференциального уравнения (2) достаточно доказать существование в конусе Q_0 решения интегрального уравнения (5). Кроме того, из леммы 4 следует, что уравнения (2) и (5) имеют одно и то же множество решений.

Доказательство основных результатов данной статьи основывается на априорных оценках снизу и сверху решений уравнения (5). При доказательстве верхней априорной оценки решения уравнения (5) нам понадобится следующее интегральное неравенство Чебышёва (см., например, [3, лемма 17.1]):

$$\int\limits_0^x v(x-t)\, w(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^x v(t)\, w(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{8}$$

справедливое для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если функция $u(x) \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (5), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x), \tag{9}$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\, dt\right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t) k'(t)\, dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ – решение уравнения (5). Так как при $x = 0$ неравенства (9) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x > 0$.

Докажем сначала левое неравенство в (9). Так как $a(x) \geqslant 0$ и $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то из тождества (5) имеем

$$u(x) \geqslant \Big(k'(0) a(x)\Big)^{1/\alpha} \left(\int\limits_0^x u(t)\, dt\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \tag{10}$$

или, что то же самое, поскольку $k'(0)>0$ и $u(x)>0$ при $x>0$,

$$u(t)\Bigg(\int\limits_0^t u(s)\,ds\Bigg)^{-1/\alpha} \geqslant \Big(k'(0)a(t)\Big)^{1/\alpha}, \quad t>0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получаем

$$\Bigg(\int\limits_0^x u(t)\,dt\Bigg)^{(\alpha-1)/\alpha} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}(k'(0))^{1/\alpha}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt, \quad x>0,$$

откуда

$$\Bigg(\int\limits_0^x u(t)\,dt\Bigg)^{1/\alpha} \geqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}(k'(0))^{1/[\alpha(\alpha-1)]}\Bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\Bigg)^{1/(\alpha-1)}, \quad x>0. \qquad (11)$$

Тогда левое неравенство в (9) непосредственно вытекает из неравенств (10) и (11).

Докажем теперь правое неравенство в (9). Так как в силу условия (3) и леммы 1 функции $k'(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то вследствие неравенства Чебышёва (8) из тождества (5) вытекает неравенство

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt, \quad x>0,$$

т.е.

$$u(x) \leqslant a^{1/\alpha}(x)\Bigg(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt\Bigg)^{1/\alpha}, \quad x>0. \qquad (12)$$

Из этого неравенства, поскольку $k'(t)>0$ и $u\in Q_0$, следует, что

$$k'(t)u(t)\Bigg(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds\Bigg)^{-1/\alpha} \leqslant k'(t)a^{1/\alpha}(t), \quad t>0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, будем иметь

$$\Bigg(\int\limits_0^x k'(s)u(s)\,ds\Bigg)^{(\alpha-1)/\alpha} \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k'(t)a^{1/\alpha}(t)\,dt, \quad x>0,$$

откуда

$$\Bigg(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt\Bigg)^{1/\alpha} \leqslant \Bigg(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k'(t)a^{1/\alpha}(t)\,dt\Bigg)^{1/(\alpha-1}, \quad x>0. \qquad (13)$$

Таким образом, правое неравенство в (9) – непосредственное следствие неравенств (12) и (13). Лемма доказана.

Из леммы 5 вытекает, что решения интегрального уравнения (5) естественно искать в классе

$$P=\{u\in C[0,\infty): F(x)\leqslant u(x)\leqslant G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 5, а функции $k(x)$ и $a(x)$ удовлетворяют условиям (3) и (4) соответственно.

В силу леммы 4 утверждения леммы 5 справедливы и для уравнения (2).

Пример. Непосредственно проверяется, что функция

$$u^*(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}p\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}$$

является решением интегрального уравнения (5) при $k(x) = px$, где $p > 0$ – любое число. Следовательно, если $k(x) = px$, то при всех $x \in [0,\infty)$ справедливы равенства $F(x) = u^*(x) = G(x)$, которые показывают, что априорные оценки решения интегрального уравнения (5), доказанные в лемме 5, являются в определённом смысле точными.

2. Теорема существования и единственности при $\alpha > 1$. Определим нелинейный интегральный оператор свёртки T равенством

$$(Tu)(x) = \left(a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T, т.е. $T : P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$, т.е. $Tu \in C[0,\infty)$ и $F(x) \leqslant (Tu)(x) \leqslant G(x)$.

1) Так как функции $k'(x)$, $a(x)$ неотрицательны и принадлежат пространству $C[0,\infty)$, а $1/\alpha > 0$, то очевидно, что оператор T на классе функций $u \in P$ определён корректно и $Tu \in C[0,\infty)$.

2) Покажем, что $(Tu)(x) \geqslant F(x)$. Поскольку $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны, $k'(x)$ не убывает и $u(x) \geqslant F(x)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \geqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)F(t)\,dt \geqslant k'(0)a(x)\int\limits_0^x F(t)\,dt =$$

$$= k'(0)a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\left(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt = [F(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geqslant F(x)$.

3) Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leqslant G(x)$. Так как $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны и $u(x) \leqslant G(x)$, а функции $k'(x)$ и $G(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то в силу неравенства Чебышёва (8) получаем

$$[(Tu)(x)]^\alpha = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)\,u(t)\,dt \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)\,G(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)\,G(t)\,dt = a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)\left(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)k'(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(s)k'(s)\,ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = [G(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \leqslant G_(x)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Используя монотонность оператора T (т.е. $(Tu)(x) \leqslant (Tv)(x)$, если $u(x) \leqslant v(x)$) нетрудно (ср. [9, теорема 3.1]) проверить, что последовательность $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $u_0(x) = F(x)$, сходится (как монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху функцией $G(x)$) к решению уравнения (5), причём [9, теорема 4.1] это решение единственно в классе Q_0.

Наша цель – найти нижнюю и верхнюю границы решения интегро-дифференциального уравнения (2), показать, что это решение можно найти методом последовательных приближений, и установить оценку погрешности и скорости сходимости приближений к этому решению в терминах метрики вводимого ниже полного метрического пространства.

Исследование интегрального уравнения (5) будет основано на принципе сжимающих отображений, и для его применения нам нужно построить соответствующее полное метрическое пространство. Введём в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x) \in C[0,b] : F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 5, а $b > 0$ – произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. *Если выполнены условия (3) и (4), то класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T.*

Зафиксируем какое-либо число $\beta \geqslant 0$ и зададим на прямом произведении $P_b \times P_b$ функцию ρ_b формулой

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)}, \quad \beta \geqslant 0. \tag{14}$$

Поскольку $e^{\beta x} \geqslant 1$ и $|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant G(x)-F(x)$ для любых $u_1, u_2 \in P_b$, то с учётом того, что функция $k'(x)$ не убывает, для любого $x \in (0,b]$ получаем

$$\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \frac{G(x)-F(x)}{a^{1/\alpha}(x)} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{a^{1/\alpha}(x)}{a^{1/\alpha}(x)} \left[\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}\right] \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} [(k'(x))^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)}].$$

Следовательно, для любых $u_1, u_2 \in P_b$ величина $\rho_b(u_1,u_2)$ конечна:

$$\rho_b(u_1,u_2) \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} [(k'(b))^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)}] \equiv c_b < \infty,$$

т.е. ρ_b – функция из $P_b \times P_b$ в $[0, c_b]$. Несложно убедиться в том, что ρ_b представляет собой метрику на множестве P_b.

Лемма 6. *Множество P_b с метрикой ρ_b является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ – фундаментальная последовательность из P_b. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех $m, n \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m,u_n) < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} < \varepsilon \tag{15}$$

для всех $m, n \geqslant N$ и любого $x \in (0, b]$. Так как

$$a^{1/\alpha}(x)\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \leqslant a^{1/\alpha}(b)\biggl(\int\limits_0^b a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta b} \equiv M,$$

то

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{-1/(\alpha-1)} \geqslant \frac{1}{M}|u_m(x)-u_n(x)|.$$

Поэтому вследствие неравенства (15) имеем: $|u_m(x)-u_n(x)| \leqslant M\varepsilon$ для всех $m, n \geqslant N$ и любого $x \in [0, b]$ (здесь мы учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$), т.е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0, b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0, b]$ существует функция $u \in C[0, b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{16}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \subset P_b$, то для всех n и любого $x \in [0, b]$ выполняется двойное неравенство

$$F(x) \leqslant u_n(x) \leqslant G(x).$$

Переходя в нём к пределу при $n \to \infty$, с учётом равенства (16) получаем: $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, т.е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к функции $u(x)$ по метрике ρ_b. Переходя в неравенстве (15) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\frac{|u(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{-1/(\alpha-1)} < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$ и любого $x \in (0, b]$, т.е. $\rho_b(u_n, u) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, что и требовалось. Лемма доказана.

Итак, доказано, что если во множестве P_b функций ввести метрику (14), то оно превращается в полное метрическое пространство. Кроме того, мы показали (см. следствие выше), что нелинейный оператор свёртки T действует из P_b в P_b.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$k'(c) < \alpha k'(0). \tag{17}$$

Очевидно, что такое число c существует, так как $k'(0) > 0$, $k'(x)$ непрерывна и $\alpha > 1$.

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x)-k'(0)}{x}. \tag{18}$$

Справедлива следующее утверждение (ср. [10]).

Лемма 7. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство*

$$k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{19}$$

где числа c и β определяются условием (17) и формулой (18) соответственно.

Доказательство. Если $k'(x) \equiv \mathrm{const}$, то $\beta = 0$ и неравенство (19) обращается в тождество. Пусть $k'(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $\beta > 0$ в силу условия (3). Рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $0 \leqslant x \leqslant c$. Тогда, учитывая, что производная $k'(x)$ не убывает и $\beta > 0$, имеем $k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(x) \leqslant k'(c)$, что и требовалось.

2) Пусть $c \leqslant x \leqslant b$. В этом случае

$$k'(x) = k'(0) + k'(0)x\frac{1}{k'(0)}\frac{k'(x)-k'(0)}{x} \leqslant k'(0)[1 + x\beta] \leqslant k'(0)e^{\beta\, x}.$$

Следовательно, $k'(x) \leqslant k'(0)e^{\beta x} \leqslant k'(c)e^{\beta x}$, откуда получаем, что $k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c)$ для любого $x \in [c, b]$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, при этом для любых $u_1, u_2 \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\rho_b(u_2, u_1), \tag{20}$$

где число c определяется условием (17).

Доказательство. То, что оператор T действует из P_b в P_b, установлено в следствии выше. Докажем неравенство (20), т.е. что оператор T является в силу неравенства (17) сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0, b]$. По теореме Лагранжа для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Theta^{1/\alpha - 1}(z_1 - z_2),$$

где Θ – некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит,

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Используя это неравенство и то, что $(Tu_1)(x) \geqslant F(x)$ и $(Tu_2)(x) \geqslant F(x)$, для всех $x \in (0, b]$ имеем

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| =$$

$$= \left|\left(a(x)\int_0^x k'(x-t)u_2(t)\,dt\right)^{1/\alpha} - \left(a(x)\int_0^x k'(x-t)u_1(t)\,dt\right)^{1/\alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}(F^\alpha(x))^{(1-\alpha)/\alpha}\left|a(x)\int_0^x k'(x-t)[u_2(t) - u_1(t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{-1} a^{(1-\alpha)/\alpha}(x)\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1} a(x)\int_0^x k'(x-t)|u_2(t) - u_1(t)|\,dt.$$

Итак,

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leqslant \frac{a^{1/\alpha}(x)}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\int_0^x k'(x-t)|u_2(t) - u_1(t)|\,dt. \tag{21}$$

Поскольку для любого $x > 0$ выполняется неравенство

$$|u_2(x) - u_1(x)| = a^{1/\alpha}(x)\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}\frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant$$

$$\leqslant a^{1/\alpha}(x)\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}\rho_b(u_2, u_1),$$

то вследствие оценки (21) с учётом леммы 5 получаем

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2, u_1)}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\int_0^x k'(x-t)a^{1/\alpha}(t)\left(\int_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta t}\,dt =$$

$$= \frac{a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\int_0^x k'(x-t)e^{-\beta(x-t)}a^{1/\alpha}(t)\left(\int_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k'(c)a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}\rho_b(u_2,u_1).$$

Следовательно, для всех $x \in (0,b]$ имеет место неравенство

$$\frac{|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\rho_b(u_2,u_1),$$

которое равносильно неравенству (20). Поскольку в силу неравенства (17) коэффициент $k'(c)/[\alpha\, k'(0)]$ в неравенстве (20) меньше единицы, то оператор T является сжимающим. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если выполнены условия (3), (4), то интегральное уравнение (5) имеет в конусе Q_0 (и в классе P_b при любом $b>0$) единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (14) при любом $b<\infty$.*

Доказательство. Запишем уравнение (5) в операторном виде: $u = Tu$. Из леммы 6 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (5) имеет единственное решение в метрическом пространстве P_b при любом $b>0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (14) при любом $b<\infty$.

Покажем, что уравнение (5) имеет единственное решение в конусе Q_0. Из единственности и непрерывности решения уравнения (5) в каждом классе P_b вытекает, что для любых $b_2 > b_1$ решение $u_{b_2} \in P_{b_2}$ является непрерывным продолжением решения $u_{b_1} \in P_{b_1}$. Следовательно, если обозначить через $u_n(x)$ решение уравнения (5) в классе P_n, то функция $u(x) = u_n(x)$ при $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, будет решением уравнения (5) в конусе Q_0. Таким образом, существование в конусе Q_0 решения уравнения (5) установлено. Осталось доказать его единственность. Предположим, что в конусе существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (5). Поскольку для этих решений справедливы априорные оценки (9), т.е. $F(x) \leqslant u_i(x) \leqslant G(x)$, $x \in [0,\infty)$, $i = 1,2$, то сужение каждого из этих решений на любой отрезок $[0,b]$ является решением уравнения (5) в классе P_b. Поэтому, если бы $u_1(x) \neq u_2(x)$, то нашлось бы $b > 0$, при котором в классе P_b уравнение (5) имело бы два решения, что невозможно. Теорема доказана.

Таким образом, на основании теоремы 3, используя связь между решениями уравнений (5) и (2), установленную в лемме 4, мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 4. *Если выполнены условия (3), (4), то интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью (2) имеет в конусе Q_0^1 (и в классе P_b при любом $b>0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам (9), и его можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (14), в которой числа c и β определяются условием (17) и формулой (18). При этом справедлива следующая оценка погрешности:*

$$\rho_b(u_n,u^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho_b(Tu_0,u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q = k'(c)/(\alpha k'(0)) < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ – начальное приближение (произвольная функция).

Приведём теперь несколько простых примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

1. Если $k(x) = px$, $p > 0$, $a(x) = 1$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} px\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

2. Если $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = 1$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = (e^{[(\alpha-1)/\alpha]x} - 1)^{1/(\alpha-1)}$.

3. Если $\alpha = 2$, $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = e^{2x}$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = 2e^{3x/2}(e^{x/2} - 1)$.

4. Если $\alpha = 2$, $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = x^2$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = (2e^{x/2} - x - 2)x$.

В приведённых примерах ядра $k(x)$ и коэффициенты $a(x)$ удовлетворяют всем требованиям условий (3), (4).

В тех случаях, когда условия теоремы 4 не выполняются, интегро-дифференциальное уравнение (2) может либо не иметь нетривиальных решений, либо иметь континуум нетривиальных решений. Например, если $\alpha = 1$ и $k(x) = x$, то уравнение (2) при $a(x) = 1$ не имеет в конусе Q_0^1 решений. Если $\alpha = 1$ и $k(x) = 1$, то уравнение (2) при $a(x) = 1$ имеет в конусе Q_0^1 континуум решений $u(x) = Ax^q$, где A и q – любые положительные числа. Если же $k(x) = 1$, $a(x) = e^x$, то уравнение (2) имеет лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

В заключение отметим, что, следуя работе [11], можно обобщить результаты данной статьи на случай уравнения вида (2) с неоднородностью $f(x)$ в линейной части.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.* A-priori estimates for the solutions of a class of nonlinear convolution equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1991. V. 10. № 2. P. 201–204.
2. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
3. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М., 2009.
4. *Brunner H.* Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge, 2017.
5. *Белицкий А.* Заметка о применении метода Банаха–Каччиополи–Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюлл. Польской АН. Отд. 3. 1956. Т. 4. № 5. С. 255–258.
6. *Белицкий А.* Заметка о применении метода Банаха–Каччиополи–Тихонова в теории уравнения $s = f(x, y, z, p, q)$ // Бюлл. Польской АН. Отд. 3. 1956. Т. 4. № 5. С. 259–262.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., 1969.
8. *Corduneanu C.* Bielecki's method in the theory of integral equations // Ann. UMCS. Sec. A. Math. 1984. V. 38. P. 49–65.
9. *Okrasinski W.* On a nonlinear Volterra equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1986. V. 8. № 3. P. 345–350.
10. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math. 1979. V. 36. № 1. P. 61–72.
11. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.

Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный,
Чеченский государственный университет г. Грозный

Поступила в редакцию 28.07.2020 г.
После доработки 28.07.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.