ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 399–410

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.7+519.21+517.982.4

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДЁННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ

© 2021 г. **И. В. Мельникова, В. А. Бовкун, У. А. Алексеева**

Изучаются связи между стохастическими дифференциальными уравнениями, источниками случайностей в которых являются непрерывные и разрывные случайные процессы, и детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик решений этих стохастических уравнений. Для исследования применяются различные подходы, основанные на стохастической формуле замены переменной (формулы Ито), на анализе локальных инфинитезимальных характеристик процесса, на теории полугрупп операторов в сочетании с обобщённым преобразованием Фурье, что позволило получить прямые и обратные интегро-дифференциальные уравнения для различных вероятностных характеристик.

DOI: 10.31857/S0374064121030109

Введение. Широкий класс процессов, возникающих в различных областях естествознания, социальных явлений, экономики, математически можно описать с помощью дифференциальных уравнений со случайными возмущениями – стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ).

Наиболее изученным является класс СДУ, источником случайностей в которых служит винеровский процесс: решения таких уравнений (диффузионные процессы) в силу непрерывности траекторий винеровского процесса также обладают свойством непрерывности траекторий, поэтому моделирование в рамках уравнений диффузионного типа является наиболее подходящим для описания процессов, не имеющих скачков.

Классические диффузионные процессы обладают характерным свойством: дисперсия отклонения процесса за время Δt от начального положения пропорциональна Δt; такие процессы называют *нормальной диффузией*. Однако, например, для процессов диффузии в турбулентных средах или диффузии белка в молекуле ДНК по результатам наблюдений дисперсия отклонения пропорциональна Δt^{μ}, $\mu > 1$. Процессы с такими свойствами (их называют процессами *супердиффузии*), как и процессы со скачками, невозможно описать в рамках нормальной диффузии, но они моделируются при помощи процессов Леви и более общих марковских процессов – процессов типа Леви (см., например, [1]).

Как в приложениях, так и в фундаментальных исследованиях обычно интересуются не столько самим процессом, сколько различными его характеристиками, поэтому связь между стохастическими уравнениями и отвечающими им детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик этих стохастических процессов является одним из основных направлений стохастического анализа. Наиболее исследованной эта связь остаётся для диффузионных процессов и соответствующих им уравнений для характеристик, представляющих собой уравнения в частных производных параболического типа (см., например, [2, 3]).

В настоящей работе мы рассматриваем способы перехода от СДУ к уравнениям для вероятностных характеристик на примере класса уравнений, источником случайности в которых служат процессы Леви. Особенность рассматриваемых процессов, отличающая их от диффузионных процессов, состоит в том, что получаемые детерминированные уравнения являются интегро-дифференциальными (псевдодифференциальными). Мы обсуждаем следующие основные подходы.

1. Подход, основанный на стохастическом интеграле Ито (см., например, [4, 5]) – в нём рассматриваются характеристики типа усреднения борелевской функции от изучаемого процесса и на основе формулы Ито выводится интегро-дифференциальное уравнение, решением которого является выбранная характеристика. Имеет место и обратная связь: от уравнений для вероятностных характеристик к стохастическим уравнениям (см, например, [6, 7]).

2. Подход, позволяющий получить уравнения для вероятностных характеристик в предположении существования трёх пределов для изучаемого случайного процесса: пределов при $\Delta t \to 0$ для "первого и второго моментов" при условии близости значений процесса в моменты времени t и $t + \Delta t$ (см. условия (9), (10) ниже) и предела (11), отвечающего за свойства непрерывности процесса (см., например, [2, 8]).

3. Полугрупповой подход, устанавливающий связь между однородными марковскими процессами и переходными полугруппами этих процессов (марковскими, феллеровскими, Леви) (см., например, [9–12]).

4. Подход к изучению свойств стохастических процессов через поведение характеристической функции – преобразования Фурье (в общем случае обобщённого) переходной функции процесса. В этом подходе, примыкающем к предыдущему, формула Леви–Хинчина для безгранично делимых распределений позволяет получить представление Фурье-образа генератора переходной полугруппы в форме полинома второго порядка и некоторого интегрального слагаемого, отвечающего за поведение процесса при наличии разрывных случайных возмущений.

Между всеми этими подходами существуют глубокие и не всегда очевидные связи, не все из которых изучены в желаемой полноте, несмотря на огромное количество работ, посвящённых исследованию указанных вопросов. Например, как мы увидим в настоящей работе, одна и та же функция в первом подходе определяет некоторую вероятностную характеристику процесса, во втором может служить в роли пробной функции при изучении уравнений в пространствах обобщённых функций, а в третьем – начальным условием при действии полугруппы.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 даны ответы на вопросы, что следует понимать под СДУ, источником случайности в котором служит процесс Леви, и каковы условия существования решения этого уравнения. В п. 2 на основе обобщения формулы Ито на случай разрывных процессов выведено обратное интегро-дифференциальное уравнение для вероятностной характеристики вида $g(t,x) := \mathsf{E}^{t,x}[h(X(T))]$, определяемой в общем случае борелевской функцией h от случайного процесса $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$. В п. 3 обсуждается подход, основывающийся на предположении о существовании трёх пределов. Рассмотренный здесь пример позволил продемонстрировать возможности обобщённого дифференцирования при трактовке уравнения для плотности переходной вероятности процесса X. В п. 4 показано, как методами преобразования Фурье может быть получен генератор переходной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ процесса X, который является псевдодифференциальным оператором. На основе этого записано уравнение для характеристик процесса вида $u(t,x) := S(t)h(x)$ и показана связь между свойствами гладкости характеристики $g(t,x)$ и определяющей её функции $h(x)$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы прояснить связи между свойствами случайных процессов, моделируемых стохастическими уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями для их характеристик, полугруппами операторов, обобщёнными решениями и преобразованием Фурье, поэтому для прозрачности все рассуждения проводятся для случая процессов со значениями в $\mathbb{R}$. Полученные результаты можно перенести на случай значений в $\mathbb{R}^n$. Исследования бесконечномерных задач, которым посвящены наши работы последнего времени, осложняются уже на этапе постановки задачи (см., например, [13–15]), поэтому они потребовали тщательного предварительного анализа в конечномерном случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = \alpha(X(t))\,dt + \beta(X(t))\,dL(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в котором источником случайности является процесс Леви $L = \{L(t) : t \geqslant 0\}$.

Определение 1 [16]. Случайный процесс $L = \{L(t) : t \geqslant 0\}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, называется *процессом Леви*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(L1) представляет собой процесс с независимыми приращениями, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $L(0)$, $L(t_1) - L(0)$, $L(t_2) - L(t_1)$, $\ldots$, $L(t_n) - L(t_{n-1})$ независимы;

(L2) стартует из нуля п.н., т.е. $L(0) = 0$ п.н.;

(L3) однороден по времени, т.е. закон распределения приращения $\mathcal{L}(L(s+t) - L(s))$, $s, t \geqslant 0$, не зависит от s;

(L4) стохастически непрерывен, т.е. $\mathbf{P}(|L(s+t)-L(s)|>\varepsilon)\to 0$ при $t\to 0$ для любых $s\geqslant 0$, $\varepsilon>0$;

(L5) его траектории непрерывны справа и имеют конечные пределы слева п.н.

Если для процесса L выполнены условия (L1)–(L4), то он называется *процессом Леви по распределению.*

При рассмотрении процессов Леви условие (L5) часто опускают. Это связано с тем, что у любого процесса Леви по распределению существует модификация, траектории которой п.н. непрерывны справа и имеют конечные пределы слева (см., например, [10]). В настоящей работе условие (L5) предполагается выполненным.

Следуя [4], введём величину

$$N(t,A)=\#\{0\leqslant s\leqslant t:\Delta L(s)\in A\},\quad t\geqslant 0,\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

равную количеству тех скачков процесса L за промежуток времени $[0,t]$, высота $\Delta L(s):=$ $:=L(s)-L(s-)$ которых принадлежит множеству A. При любых $\omega\in\Omega$ и $t\geqslant 0$ функция $N(t,\cdot)(\omega)$ представляет собой считающую меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, а $\nu(\cdot)=\mathsf{E}[N(1,\cdot)]$ – меру интенсивности, связанную с процессом L. Если множество A ограничено снизу*), то процесс $\{N(t,A):t\geqslant 0\}$ является пуассоновским с интенсивностью $\lambda=\nu(A)$, при этом мера $N(t,A)$ – пуассоновская случайная мера на пространстве $(\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\bigotimes\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$, а мера $\widetilde{N}(t,A):=N(t,A)-t\nu(A)$ – мартингально-значная пуассоновская случайная мера на этом пространстве.

Во введённых обозначениях структура процесса Леви описывается разложением Леви–Ито (см., например, [4, с. 126]):

$$L(t)=at+bW(t)+\int\limits_{|q|\geqslant 1}qN(t,dq)+\int\limits_{|q|<1}q\widetilde{N}(t,dq),\tag{2}$$

где $\{W(t):t\geqslant 0\}$ – стандартный винеровский процесс, a, b – постоянные величины. Благодаря этому представлению становится возможным придать смысл дифференциалу $dL(t)$ в уравнении (1) и получить обобщающую это уравнение математическую модель процесса X в форме СДУ вида

$$X(t)-\xi=\int\limits_0^t a(X(s-))\,ds+\int\limits_0^t b(X(s-))\,dW(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}K(X(s-),q)N(ds,dq)+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\in[0,T],\tag{3}$$

где коэффициенты a, b, K, F удовлетворяют условиям существования интегралов. Второе слагаемое в правой части уравнения (3) представляет собой интеграл Ито по винеровскому процессу, а третье слагаемое, поскольку в силу условия (L5) процесс L не может иметь бесконечное число скачков за конечный промежуток времени, является конечной суммой:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}K(X(s-),q)N(ds,dq)=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}K(X(s-),\Delta L(s))\cdot\chi_A(\Delta L(s)),$$

где $A=\{q\in\mathbb{R}:|q|\geqslant 1\}$, $\chi_A(\cdot)$ – характеристическая функция множества A. Наконец, последнее слагаемое в (3) может быть записано следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq)=\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)N(ds,dq)-\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\nu(dq)\,ds.$$

---

*) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ и $0\notin\overline{A}$.

Процесс $X=\{X(t): t\geqslant 0\}$, определяемый уравнением (3), имеет более общую структуру, чем процесс (2), и называется *процессом типа Леви.* Известны достаточно общие условия его существования, которые даёт [4, с. 374, 388] следующая

Теорема 1. *Пусть отображение K является предсказуемым, а отображения a, b, F удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста: существуют положительные постоянные C_1 и C_2, при которых справедливы неравенства*

$$|a(y)-a(z)|+|b(y)-b(z)|+\int\limits_{|q|<1}|F(y,q)-F(z,q)|\nu(dq)\leqslant C_1|y-z|,\quad y,z\in\mathbb{R},$$

$$a^2(y)+b^2(y)+\int\limits_{|q|<1}F^2(y,q)\nu(dq)\leqslant C_2(1+y^2),\quad y\in\mathbb{R}.$$

*Тогда существует единственное сильное**) *решение задачи (3), которое является однородным марковским процессом.*

В настоящей работе выведены интегро-дифференциальные (псевдодифференциальные) уравнения для вероятностных характеристик процесса X, заданного уравнением (3). Для этого использован подход на основе формулы Ито, подход А.Н. Колмогорова, основанный на вычислении пределов, и полугрупповой подход в соединении с преобразованием Фурье.

2. Подход на основе формулы Ито. Формула Ито для разрывного процесса, каковым в общем случае является процесс типа Леви, имеет более сложную структуру, чем в случае непрерывных процессов.

Пусть $\{X(t): t\geqslant 0\}$ – процесс типа Леви, определяемый равенством

$$X(t)-\xi=\int\limits_0^t\mathfrak{a}(s)\,ds+\int\limits_0^t\mathfrak{b}(s)\,dW(s)+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}\mathfrak{K}(s,q)N(ds,dq)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}\mathfrak{F}(s,q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\in[0,T].\tag{4}$$

Тогда для любой функции $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$f(t,X(t))-f(0,X(0))=\int\limits_0^t\Big(f'_s(s,X(s-))+\mathfrak{a}(s)f'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}\mathfrak{b}^2(s)f''_{xx}(s,X(s-))\Big)\,ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}[f(s,X(s-)+\mathfrak{K}(s,q))-f(s,X(s-))]N(ds,dq)+$$
$$+\int\limits_0^t\mathfrak{b}(s)f'_x(s,X(s-))\,dW(s)+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}[f(s,X(s-)+\mathfrak{F}(s,q))-f(s,X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}[f(s,X(s-)+\mathfrak{F}(s,q))-f(s,X(s-))-\mathfrak{F}(s,q)f'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\,ds,\tag{5}$$

называемое *формулой Ито для процесса типа Леви* (4) (см., например, [17; 5, с. 278]).

*) Как принято в стохастическом анализе, *сильным* решением называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (3) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, порождённой случайными возмущениями, входящими в уравнение.

Рассмотрим процесс $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ – сильное решение задачи (3). Поскольку X является марковским, ему соответствует функция переходной вероятности $P(t, x; T, A)$ – вероятность перехода процесса X из положения x, в котором он находился в момент времени t, в одно из состояний борелевского множества A за время $T - t$. Важными характеристиками текущего положения процесса, $X(t) = x$, являются функции вида

$$g(t,x) := \mathsf{E}^{t,x}[h(X(T))] = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ограниченная борелевская функция. В следующей теореме на основе формулы Ито выведено интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $g(t, x)$. Это уравнение является обратным и для него ставится обратная задача Коши с условием $g(T, x) = h(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ *– сильное решение задачи (3) с начальным условием* $\xi \in \mathbb{R}$. *Если функция* $g(t, x)$, *определяемая равенством (6), имеет непрерывные частные производные* g'_t, g'_x, g''_{xx}, *то она является решением задачи Коши*

$$-g'_t(t,x) = a(x)g'_x(t,x) + \frac{1}{2}b^2(x)g''_{xx}(t,x) + \int\limits_{|q|\geqslant 1} [g(t,x+K(x,q)) - g(t,x)]\nu(dq) +$$

$$+ \int\limits_{|q|<1} [g(t,x+F(x,q)) - g(t,x) - F(x,q)g'_x(t,x)]\nu(dq),$$

$$g(T,x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Доказательство. Применив формулу Ито (5) к функции g и процессу X, получим

$$g(t,X(t)) - g(0,X(0)) =$$

$$= \int\limits_0^t \left(g'_s(s,X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s,X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-)) \right) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geqslant 1} [g(s,X(s-)+K(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]N(ds,dq) + \int\limits_0^t b(X(s-))g'_x(s,X(s-))\,dW(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-)) - F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\,ds. \tag{8}$$

В силу определения функции g и марковского свойства процесса X имеем

$$\mathsf{E}[g(t,X(t))] = \mathsf{E}[\mathsf{E}^{t,X(t)}[h(X(T))]] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy)P(0,\xi;t,dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(0,\xi;T,dy) = \mathsf{E}[g(0,X(0))],$$

следовательно, математическое ожидание правой части представления (8) равно нулю. Тогда, согласно стохастической теореме Фубини, справедливо равенство

$$\int\limits_0^t \mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-))+a(X(s-))g'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))\Big]ds+$$

$$+\,\mathsf{E}\Big[\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant1}[g(s,X(s-)+K(X(s-),q))-g(s,X(s-))]N(ds,dq)\Big]+$$

$$+\,\mathsf{E}\Big[\int\limits_0^t b(X(s-))g'_x(s,X(s-))\,dW(s)\Big]+$$

$$+\,\mathsf{E}\Big[\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq)\Big]+$$

$$+\int\limits_0^t\mathsf{E}\Big[\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big]ds=0.$$

В силу мартингальности винеровского процесса и меры $\widetilde{N}$ третье и четвёртое слагаемые в этом равенстве нулевые. Воспользовавшись следующим свойством пуассоновской случайной меры N:

$$\mathsf{E}\Big[\int\limits_A f(q)N(ds,dq)\Big]=ds\int\limits_A f(q)\nu(dq),\quad f\in L_1(A),$$

получим

$$\int\limits_0^t\mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-))+a(X(s-))g'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))+$$

$$+\int\limits_{|q|\geqslant1}[g(s,X(s-)+K(X(s-),q))-g(s,X(s-))]\nu(dq)+$$

$$+\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big]ds=0.$$

В силу произвольности $t\in[0,T]$ отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю при любом $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$:

$$\mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-))+a(X(s-))g'_x(s,X(s-))+\frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))+$$

$$+\int\limits_{|q|\geqslant1}[g(s,X(s-)+K(X(s-),q))-g(s,X(s-))]\nu(dq)+$$

$$+\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q))-g(s,X(s-))-F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big]=0.$$

Если эволюция процесса началась в момент времени $t\in[0,T]$ из точки $X(t)=x\in\mathbb{R}$, то последнее равенство переходит в искомое обратное уравнение (7). Теорема доказана.

3. Подход через предельные соотношения. Этот подход восходит к идеям А.Н. Колмогорова [18] для диффузионных процессов и в нём используются три предельные величины [8, с. 56].

Пусть $p(t,x;T,y)$ – плотность переходной вероятности*) процесса $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ и пусть при любом $\varepsilon > 0$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = A(t,x)+O(\varepsilon), \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = B(t,x)+O(\varepsilon), \tag{10}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t} = G(t,x;z) \quad \text{при условии} \quad |z-x|>\varepsilon. \tag{11}$$

Тогда плотность $p(t,x;T,y)$ удовлетворяет обратному уравнению:

$$-p'_t(t,x;T,y) = A(t,x)p'_x(t,x;T,y)+\frac{1}{2}B(t,x)p''_{xx}(t,x;T,y)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}}(p(t,z;T,y)-p(t,x;T,y))G(t,x;z)\,dz, \quad t\in(0,T). \tag{12}$$

Сходимость в равенствах (9), (10) предполагается равномерной по x и t, а в равенстве (11) – по x, z и t. Отметим, что в случае диффузионных процессов предел (11) равен нулю – этот предел служит характеристикой непрерывности/разрывности процесса.

В качестве примера, иллюстрирующего этот подход, получим обратное уравнение для плотности переходной вероятности процесса

$$X(t) = at + bW(t) + c\mathbf{N}(t), \quad t\geqslant 0, \tag{13}$$

где $W=\{W(t) : t\geqslant 0\}$ – стандартный винеровский процесс, $\{\mathbf{N}(t) : t\geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а величины a, b, c – константы. Будем считать, что винеровский и пуассоновский процессы заданы независимо друг от друга, и найдём плотность распределения вероятностей процесса (13) как свёртку плотностей распределения каждого слагаемого. Плотность вырожденного распределения является δ-функцией:

$$p_{a\tau}(z) = \delta(z-a\tau),$$

плотность распределения вероятностей случайной величины $bW(\tau)$ имеет вид

$$p_{bW(\tau)}(z) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi\tau}}e^{-z^2/(2\tau b^2)},$$

а плотность распределения случайной величины $c\mathbf{N}(\tau)$ – вид

$$p_{c\mathbf{N}(\tau)}(z) = \sum_{k=0}^{[z/c]}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\delta(z-ck)e^{-\lambda\tau}.$$

Поэтому для плотности распределения вероятностей случайной величины $X(\tau)$ получаем

$$p_{X(\tau)}(z) = p_{a\tau}*p_{bW(\tau)}*p_{c\mathbf{N}(\tau)}(z) = \frac{e^{-\lambda\tau}}{b\sqrt{2\pi\tau}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-(z-ck-a\tau)^2/(2\tau b^2)}.$$

*) Далее для краткости вместо “плотность функции переходной вероятности” будем писать “плотность” везде, где это не вносит двусмысленности.

Пользуясь тем, что рассматриваемые процессы и, как следствие, процесс (13) однородны во времени и пространстве: $p(t,x;T,y) = p(0,0;T-t,y-x)$, а функция $p(0,0;T-t,y-x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей $p_{X(T-t)}(y-x)$, будем иметь

$$p(t,x;T,y) = \frac{e^{-\lambda(T-t)}}{b\sqrt{2\pi(T-t)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(T-t))^k}{k!}e^{-(y-x-ck-a(T-t))^2/(2b^2(T-t))}.$$

Вычисляя для процесса X его локальные моменты (9) и (10) и функцию $G(t,x;z)$, приходим к формулам

$$A(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = \begin{cases} a, & \varepsilon \leqslant c,\\ a+c\lambda, & \varepsilon > c,\end{cases}$$

$$B(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = \begin{cases} b^2, & \varepsilon \leqslant c,\\ b^2+c^2\lambda, & \varepsilon > c,\end{cases}$$

$$G(t,x;z) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t} = \begin{cases} \lambda\delta(z-x-c), & \varepsilon \leqslant c,\\ 0, & \varepsilon > c.\end{cases}$$

Найденные предельные величины позволяют записать обратное уравнение (12) для функции $p(t,x;T,y)$ – плотности процесса (13):

$$-p'_t(t,x;T,y) = ap'_x(t,x;T,y) + \frac{b^2}{2}p''_{xx}(t,x;T,y) + \lambda(p(t,x+c;T,y) - p(t,x;T,y)). \qquad (14)$$

В рассмотренном примере плотность процесса X является дифференцируемой только в смысле обобщённых функций. Поскольку в этом случае при малых ε $(\varepsilon \leqslant c)$ функции $A(t,x)$ и $B(t,x)$ постоянны, а $G(t,x;\cdot)$ является δ-функцией, то и само уравнение (14) допускает формализацию в обобщённом смысле; при этом в качестве основных функций достаточно рассмотреть дважды непрерывно дифференцируемые функции переменного x с компактным носителем. Формализовать уравнение (12) в общем случае сложнее, в частности, из-за поведения функций $A(t,x)$ и $B(t,x)$, которые не являются мультипликаторами в этом пространстве основных функций.

Замечание. Обсуждаемый в этом пункте подход позволяет получить, наряду с обратным, и прямое уравнение для плотности переходной вероятности. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по x и t существуют пределы (9), (10) и равномерно по x, z и t предел (11). Тогда плотность $p(t,x;T,y)$ удовлетворяет прямому уравнению [8, с. 50]

$$p'_T(t,x;T,y) = -\frac{\partial}{\partial y}(A(T,y)p(t,x;T,y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B(T,y)p(t,x;T,y)) +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}}(G(T,z;y)p(t,x;T,z) - G(T,y;z)p(t,x;T,y))\,dz, \quad 0 \leqslant t < T.$$

Это уравнение допускает формализацию в обобщённом смысле на тех же основных функциях, что и уравнение (14), так как $A(T,y)$ и $B(T,y)$ являются мультипликаторами в пространстве непрерывных функций с компактным носителем.

4. Полугрупповой подход. Обсудим ещё один подход к получению детерминированного уравнения, порождённого стохастическим уравнением (3). Этот подход связан с теорией полугрупп операторов и преобразованием Фурье.

Обозначим через $B_b(\mathbb{R}^n)$ пространство функций, ограниченных и измеримых по Борелю на $\mathbb{R}^n$, через $C_0(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Пусть $\mathcal{D}$ – пространство Л. Шварца на $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{F}[f](\sigma) = \widehat{f}(\sigma)$ и $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x)$ – прямое и обратное преобразования Фурье соответственно. Введём несколько понятий.

Определение 2 [10, с. 2]. Однопараметрическое семейство $S = \{S(t) : t \geqslant 0\}$ линейных операторов в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих для любых $t, s \geqslant 0$ и $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$ условиям:

(S1) $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ (полугрупповое свойство) и $S(0) = \mathrm{id}$;

(S2) если $f \geqslant 0$, т.е. $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $S(t)f \geqslant 0$ (сохранение положительности);

(S3) если $f \leqslant 1$, т.е. $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $S(t)f \leqslant 1$ (субмарковское свойство);

(S4) $S(t)1 = 1$ (свойство консервативности),

называется *марковской полугруппой.* Семейство S, удовлетворяющее условиям (S1)–(S3), называется *субмарковской полугруппой.*

Если $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ – однородный марковский процесс в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(s, x; t, A)$, то семейство операторов

$$S(t)f(x) := \mathsf{E}^{0,x}[f(X(t))] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0, x; t, dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

образует полугруппу в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, называемую *переходной полугруппой процесса* X, которая является марковской. В частности, это верно для процесса X, являющегося решением задачи (3).

Переходная полугруппа даёт различные характеристики текущего положения процесса $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ при известном начальном положении $X(0) = x$. Напомним, что функция $g(t, x)$, определённая равенством (6), является характеристикой положения процесса $X(t) = x$ при известном конечном положении $X(T)$. Из сравнения функции (6) и семейства (15) становится понятным, почему интегро-дифференциальное уравнение для функции $g(t, x)$, описывающей историю развития процесса до момента времени T, является обратным и задача Коши для него естественным образом получается обратной, в то время как эволюционное уравнение, которое будет получено далее для функции $u(t, x) := S(t)f(x)$, является прямым с начальным условием $f(x)$.

Подклассом введённых полугрупп являются *феллеровские полугруппы* – субмарковские полугруппы, отображающие $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и сильно непрерывные в нуле: $\|S(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$ для любой $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Соответствующие им однородные во времени марковские случайные процессы называются *феллеровскими.*

Особое место среди переходных полугрупп занимают полугруппы, которые удаётся представить в виде операторов свёртки:

$$S(t)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_t(x - dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

Такой вид операторов открывает возможности для эффективного применения преобразования Фурье. Возможность представления (16) определяется структурой функции переходной вероятности, а именно, её инвариантностью относительно сдвигов фазового пространства, что соответствует свойству полугруппы быть инвариантной относительно пространственных сдвигов. Следующая цепочка утверждений:

1) непрерывный линейный оператор S, действующий из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$, является оператором свёртки (с ядром $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно сдвигов: $\tau_y(Sf) = S(\tau_y f)$, где $\tau_y f(x) := f(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ [19, с. 184];

2) (феллеровская) переходная полугруппа процесса X инвариантна относительно сдвигов тогда и только тогда, когда X – процесс Леви [10, с. 35];

3) класс однородных марковских процессов, переходная функция которых инвариантна относительно сдвигов фазового пространства (свойство пространственной аддитивности:

$$P(s, x; t, dy) = P(s, 0; t, dy - x)),$$

совпадает с классом однородных процессов с независимыми приращениями [20, с. 263], приводит нас к рассмотрению однородных (по времени и пространству) марковских процессов с независимыми приращениями – к процессам Леви, для которых ядро оператора (16) определяется равенством

$$\eta_t(x-dy) := P(0,x;t,dy) = P(0,0;t,dy-x).$$

Обозначив $\mu_t := \mathcal{L}(X(t)),\ \ t \geqslant 0,$ закон распределения для процесса, стартовавшего из нуля п.н., получим более удобное для дальнейших рассуждений представление

$$\eta_t(-dy) = \mu_t(dy) = P(0,0;t,dy). \tag{17}$$

Известно, что закон распределения μ_t стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями, стартующего из нуля п.н. (т.е. процесса со свойствами (L1), (L2), (L4)), является безгранично делимым [16, с. 4]: $\mu_t = (\mu_{t/n})^{*n}$ или, в терминах преобразования Фурье, $\widehat{\mu_t} = (\widehat{\mu_{t/n}})^n$.

Характеристическая функция безгранично делимого распределения μ, согласно формуле Леви–Хинчина, имеет вид

$$2\pi\check{\mu}(\sigma) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\mu] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\sigma,y\rangle}\mu(dy) = e^{\psi(\sigma)}, \quad \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где

$$\psi(\sigma) = i\langle a,\sigma\rangle - \frac{1}{2}\langle\sigma,B\sigma\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(e^{i\langle\sigma,y\rangle} - 1 - i\langle\sigma,y\rangle\cdot\chi_{|y|\leqslant 1}(y))\nu(dy), \tag{19}$$

$a\in\mathbb{R}^n,\ \ B$ – симметричная неотрицательно определённая $n\times n$-матрица, ν – мера на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям $\nu(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n}(|y|^2\wedge 1)\nu(dy) < \infty$. Тройка (a,B,ν) определяется мерой μ однозначно. Верно и обратное: для любой тройки (a,B,ν), удовлетворяющей приведённым условиям, существует безгранично делимая мера μ с характеристической функцией (18), (19).

Таким образом, если X – стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, стартующий из нуля п.н., то его закон распределения μ_t в каждый момент времени характеризуется тройкой $(a(t),B(t),\nu_t)$, и, тем самым, процесс определяется набором троек $\{(a(t),B(t),\nu_t) : t\geqslant 0\}$. Если при этом процесс X является однородным во времени (свойство (L3)), то тройка также однородна: $(a(t),B(t),\nu_t) = (ta,tB,t\nu)$, и характеристическая функция принимает вид

$$2\pi\check{\mu}_t(\sigma) = \mathsf{E}[e^{i\langle\sigma,X(t)\rangle}] = e^{t\psi(\sigma)},$$

где функция $\psi(\sigma)$ определена равенством (19), т.е. процесс Леви полностью характеризуется тройкой (a,B,ν).

Вернёмся к полугруппам, соответствующим процессам Леви, и выведем эволюционное уравнение для характеристики вида $u(t,x) = S(t)f(x)$. Для этого найдём инфинитезимальный генератор переходной полугруппы

$$Af(x) := \lim_{t\to 0}\frac{S(t)f(x) - f(x)}{t}$$

с помощью преобразования Фурье, следуя [11, с. 59]. Чтобы обеспечить существование прямого и обратного преобразований Фурье, сначала для упрощения будем считать, что $f\in\mathcal{D}$. Из представления (16) следует, что

$$\mathcal{F}[S(t)f(x)] = \mathcal{F}[f*\eta_t] = \widehat{f}(\sigma)\widehat{\eta}_t(\sigma),$$

где в силу равенства (17)

$$\widehat{\eta}_t(\sigma) = \mathsf{E}[e^{-i\langle\sigma, X(t)-x\rangle}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\sigma,y\rangle}\eta_t(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\sigma,z\rangle}\mu_t(dz) = 2\pi\check{\mu}_t(\sigma).$$

Тогда

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\lim_{t\to 0}\frac{\check{\mu}_t(\sigma)-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\psi(\sigma)}-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\right] = \mathcal{F}^{-1}[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)].$$

Это представление показывает, что генератор переходной полугруппы процесса Леви является псевдодифференциальным оператором с символом $\psi(\sigma)$, определённым в (19). Отсюда, пользуясь свойствами преобразования Фурье, находим генератор полугруппы:

$$Af(x) = \langle a, \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{div} B\nabla f(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x+y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y\chi_{|y|\leqslant 1}(|y|)\rangle)\nu(dy).$$

Доказано [9, с. 208], что $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{Dom}(A)$ и полученное представление имеет место для любого $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Если процесс X не является процессом Леви, но является однородным марковским (в частности, процессом типа Леви), то при некоторых дополнительных условиях генератор соответствующей полугруппы операторов $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ также может быть найден из формулы Леви–Хинчина при помощи обратного преобразования Фурье. Именно [10, с. 47], если A – генератор феллеровской полугруппы и $\mathcal{D} \subset \operatorname{Dom}(A)$, то

$$Af(x) = \langle c(x), f(x)\rangle + \langle a(x), \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{div} B(x)\nabla f(x) +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x+y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y\chi_{|y|\leqslant 1}(|y|)\rangle)\nu(x, dy). \tag{20}$$

Таким образом, для вероятностной характеристики

$$u(t,x) = S(t)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,0;t,dy-x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

процесса X имеет место

Предложение 1. *Пусть X – феллеровский процесс и $\mathcal{D} \subset \operatorname{Dom}(A)$, тогда для любой $f \in \operatorname{Dom}(A)$ функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши*

$$u_t'(t,x) = Au(t,x), \quad u(0,x) = f(x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с оператором A, определённым равенством (20).

В заключение, используя полугрупповую технику, докажем

Предложение 2. *Пусть функция $g = g(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, определена равенством (6). Если процесс X является феллеровским, то для любого $h \in \operatorname{Dom}(A)\bigcap C_0(\mathbb{R}^n)$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по x.*

Доказательство. В силу однородности процесса по времени функцию g можно представить как действие полугруппы:

$$g(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)P(t,x;T,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)P(0,x;T-t,dy) = S(T-t)h(x), \quad h \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Из коммутируемости полугруппы со своим генератором на его области определения следует, что $g \in \mathrm{Dom}\,(A)$ при $h \in \mathrm{Dom}\,(A):$ $Ag(t,x) = AS(T-t)h(x) = S(T-t)Ah(x)$. Осталось заметить, что функции, входящие в область определения A, дважды непрерывно дифференцируемы. Предложение доказано.

Таким образом, в работе

на основании формулы Ито выведено интегро-дифференциальное уравнение для функции g, определяемой формулой (6);

основываясь на подходе, использующем предельные соотношения (9)–(11), получены прямое и обратное уравнения для плотности переходной вероятности, которые по сути являются обобщёнными;

на основе полугруппового подхода получена прямая задача Коши для вероятностных характеристик типа $S(t)f(x)$;

с использованием полугрупповой техники показано, что условие дифференцируемости по x функции $g(t,x)$ можно перенести на функцию $h(x)$ и, следовательно, не требовать дифференцируемости функции переходной вероятности $P(t,x;T,dy)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V.* Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. V. 18. № 9. P. 2649–2672.
2. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.
4. *Applebaum D.* Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge, 2009.
5. *Protter P.E.* Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin; Heidelberg, 2005.
6. *Белопольская Я.И.* Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики. М., 2018.
7. *Björk T.* Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford, 2009.
8. *Gardiner C.* Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences. Berlin; Heidelberg, 2009.
9. *Sato K.-I.* Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge, 1999.
10. *Böttcher B., Schilling R., Wang J.* Lévy Matters III. Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties. Heidelberg; New York, 2013.
11. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. II. М., 1963.
12. *Kolokoltsov V.N.* Markov Processes, Semigroups and Generators. Berlin; New York, 2011.
13. *Melnikova I.V.* Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions. London; New York, 2016.
14. *Мельникова И.В., Бовкун В.А., Алексеева У.А.* Решение квазилинейных стохастических задач в абстрактных алгебрах Коломбо // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1653–1663.
15. *Мельникова И.В., Алексеева У.А., Бовкун В.А.* Связь бесконечномерных стохастических задач с задачами для вероятностных характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 191–205.
16. *Sato K.-I.* Basic Results on Levy Processes // Levy Processes Theory and Applications / Eds. O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick. New York, 2001.
17. *Kunita H.* Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications // Stoch. Proc. and Appl. 2010. V. 120. № 5. P. 622–652.
18. *Колмогоров А.А.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. № 5. С. 5–41.
19. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
20. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1987.

Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 24.07.2019 г.
После доработки 12.01.2021 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.