УДК 517.962.2+517.925.51

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ В ДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЕ

© 2021 г. А. В. Ласунский

Аналог теоремы Четаева–Малкина–Массеры об устойчивости по первому приближению для дифференциальных систем распространяется на дискретные системы, в которых линейная система первого приближения подвергается линейному и нелинейному возмущениям. Полученный результат формулируется в терминах характеристических показателей и коэффициента неправильности Ляпунова линейной системы первого приближения.

DOI: 10.31857/S0374064121030122

Рассмотрим линейную дискретную (конечно-разностную) систему

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

Далее считаем, что $n \times n$ -матрица $A(t)$ является вещественнозначной и *вполне ограниченной*; последнее означает, что $A(t)$ невырождена при всех $t \in \mathbb{Z}_+$ и вместе со своей обратной равномерно ограничена на $\mathbb{Z}_+$. Понятие вполне ограниченной матрицы $A(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, введено в работе [1], в которой, в частности, показано, что любое нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с вполне ограниченной матрицей коэффициентов имеет конечный характеристический показатель $\lambda[x]$. Обозначим характеристические показатели системы (1) через $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$.

Отметим, что свойство конечности характеристических показателей системы (1) имеет место при более слабых, чем вполне ограниченность матрицы $A(t)$, предположениях. В работе [2] доказано, что при выполнении условий

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}_+} \|A(t)\| < +\infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{\mathbb{Z}_+ \ni t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left| \prod_{j=0}^{t-1} \det A(j) \right| > -\infty \quad (2)$$

характеристические показатели системы (1) конечны. Позднее в работе [3] было показано, что свойство конечности характеристических показателей системы (1) также будет справедливо, если в (2) первое из его неравенств заменить более слабым неравенством

$$\overline{\lim}_{\mathbb{Z}_+ \ni t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \prod_{j=0}^{t-1} \|A(j)\| < +\infty.$$

Для системы (1) через $\sigma_{\text{Л}}(A)$ обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова, т.е. величину, определяемую равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A) - \underline{\lim}_{\mathbb{Z}_+ \ni t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{m=0}^{t-1} \ln |\det A(m)|,$$

а через $X(t, k)$ – её матрицу Коши (по определению $X(t, k) = X(t)X^{-1}(k)$, $t, k \in \mathbb{Z}_+$, где $X(\cdot)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (1)).

Через $B^n(\rho)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ρ с центром в нуле. Для каждого фиксированного числа $p > 1$ введём важный в дальнейшем класс $\mathcal{F}_p^n$, состоящий из вектор-функций $f: \mathbb{Z}_+ \times D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$, где D_f – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ (зависящая от выбора f), для которых выполняется неравенство

$$\|f(t, y)\| \leq \psi_f(t) \|y\|^p, \quad (t, y) \in \mathbb{Z}_+ \times B^n(\rho_f), \quad (3)$$

где число $\rho_f > 0$ и функция $\psi_f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (свои для каждой f) таковы, что $B^n(\rho_f) \subset D_f$ и характеристический показатель функции ψ_f равен нулю. Через $\mathcal{F}_p^n(c)$ обозначим подкласс класса $\mathcal{F}_p^n$, состоящий из вектор-функций, для которых в неравенстве (3) функцию ψ_f можно взять тождественно постоянной.

Наряду с системой (1) рассмотрим действительную нелинейную дискретную систему

$$y(t+1) = A(t)y(t) + f(t, y(t)), \quad t \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

где $f \in \mathcal{F}_p^n$ для некоторого $p > 1$.

Дискретные аналоги теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению устанавливались многими авторами.

В случае правильной системы первого приближения (1) с вполне ограниченной матрицей $A(t)$ и нелинейностью f , принадлежащей классу $\bigcup_{p>1} \mathcal{F}_p^n$, в работе [1] получен достаточный признак асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), аналогичный критерию Ляпунова для дифференциальных уравнений [4, с. 136–137; 5, с. 238]. Заметим, что из условия (3) очевидно следует, что система (4) имеет нулевое решение $y(t) \equiv 0, t \in \mathbb{Z}_+$.

В случае $f \in \mathcal{F}_p^n(c)$ и выполнении более слабых, чем вполне ограниченность, требований (см. выше) к матрице $A(t)$ правильной системы первого приближения аналогичный результат получен в работе [3]. Дискретный аналог теоремы Четаева–Малкина–Массеры для неправильной системы первого приближения установлен в этой же работе.

Доказательства теорем подобного рода, как и в непрерывном случае, опираются на оценку матрицы Коши системы (1). Такую оценку можно получить с помощью старшего показателя $\lambda_n(A)$ и коэффициента неправильности $\sigma_{\text{Л}}(A)$ системы (1) [6, с. 9].

Наряду с исходной системой (1), старший показатель Ляпунова $\lambda_n(A)$ которой отрицателен, а матрица коэффициентов $A(t)$ вполне ограничена, рассмотрим возмущённую систему

$$y(t+1) = A(t)y(t) + Q(t)y(t) + f(t, y(t)), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где $f \in \mathcal{F}_p^n$ при некоторой фиксированной постоянной $p > 1$, а вещественнозначная $n \times n$ -матрица $Q(t)$ убывает на бесконечности к нулю экспоненциально.

В работе решается следующая задача: получить достаточные условия, которым должны удовлетворять система (1) и матрица $Q(t)$, чтобы нулевое решение системы (5) было асимптотически устойчивым при любом возмущении $f \in \mathcal{F}_p^n$.

Постановка задачи почти традиционна, однако в отличие о классической постановки, во-первых, добавлено линейное возмущение $Q(t)y(t)$ (ср. системы (4) и (5)), а во-вторых, нелинейное возмущение f предполагается принадлежащим более широкому классу $\mathcal{F}_p^n$. Если же $Q(t) \equiv 0$ и $f \in \mathcal{F}_p^n(c)$, то имеем классическую постановку задачи Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

В дальнейшем нам понадобится дискретный аналог [1] неравенства Бихари. Приведём формулировку этого утверждения.

Теорема 1. Пусть неотрицательная числовая последовательность $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ удовлетворяет условиям: $y_0 \leq C = \text{const} > 0$ и

$$y_m \leq C + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \varphi(y_k), \quad m \in \mathbb{N},$$

где $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ – неотрицательная числовая последовательность, а $\varphi(y): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывная монотонно возрастающая функция. Пусть, кроме того, выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k < \Phi(\infty), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\Phi(z) = \int_C^z dz_1 / \varphi(z_1)$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$y_m \leq \Phi^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k \right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Если $\Phi(\infty) = \infty$, то условие (6) излишне.

Лемма. Пусть для неотрицательных числовых последовательностей $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ и $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ и чисел $C > 0$, $a \geq 0$, $p > 1$ при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$u_m \leq C + \sum_{k=0}^{m-1} v_k(u_k + au_k^p). \quad (7)$$

Тогда, если справедливо неравенство

$$(C^{1-p} + a) \exp\left((1-p) \sum_{k=0}^{m-1} v_k\right) - a > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

имеет место оценка

$$u_m \leq \left((C^{1-p} + a) \exp\left((1-p) \sum_{k=0}^{m-1} v_k\right) - a \right)^{1/(1-p)}. \quad (9)$$

Замечание 2. При $a = 0$ имеем дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана.

Замечание 3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится, то неравенство (8) выполняется при любом достаточно малом C . Если же этот ряд расходится, то неравенство (8) может выполняться при всех $m \in \mathbb{N}$ только при $a = 0$.

Убедимся, что утверждение этой леммы вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим на промежутке $\mathbb{R}_+$ непрерывную монотонно возрастающую положительную функцию $\varphi(y) = y + ay^p$, $p > 1$. Так как $1/\varphi(y) = 1/y - ay^{p-2}/(1 + ay^{p-1})$, то

$$\Phi(z) = \int_C^z \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_C^z \frac{dy}{y + ay^p} = \ln\left(\frac{z}{C} \left(\frac{1 + aC^{p-1}}{1 + az^{p-1}}\right)^{1/(p-1)}\right).$$

Имеем

$$\Phi(\infty) = \ln\left(\frac{1 + aC^{p-1}}{aC^{p-1}}\right)^{1/(p-1)},$$

поэтому неравенство (6) теоремы 1 равносильно неравенству (8) леммы. Для обратной функции $\Phi^{-1}(t)$ имеем представление

$$\Phi^{-1}(t) = (-a + (C^{1-p} + a)e^{(1-p)t})^{1/(1-p)},$$

поэтому неравенство (9) леммы следует из основной оценки теоремы 1.

Теорема 2. Пусть в системе (5) нелинейное возмущение f принадлежит классу $\mathcal{F}_p^n$, где $p = \text{fix} > 1$, и выполнены следующие два неравенства:

$$\|Q(t)\| \leq C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad (10)$$

где C_Q – постоянная, и

$$\lambda_n(A)(p-1) + \sigma_{\text{Л}}(A) < 0. \quad (11)$$

Тогда нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Согласно методу вариации произвольных постоянных имеем

$$y(m) = X(m, 0)y(0) + \sum_{k=0}^{m-1} X(m, k+1)(Q(k)y(k) + f(k, y(k))). \quad (12)$$

Для матрицы Коши $X(m, k)$ системы (1) справедлива оценка [6, с. 9]

$$\|X(m, k)\| \leq C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)(m-k) + (\sigma_{\text{Л}}(A) + \varepsilon)k\}, \quad m \geq k \geq 0, \quad (13)$$

где число $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым, а C_ε – постоянная, зависящая, вообще говоря, от выбора ε . Из включения $f \in \mathcal{F}_p^n$ следует неравенство

$$\|f(m, y)\| \leq C_{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 m) \|y\|^p, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

где число $\varepsilon_1 > 0$ может быть взято сколь угодно малым, а C_{ε_1} – постоянная, зависящая, вообще говоря, от выбора ε_1 .

Из представления (12) и неравенств (13), (14) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|y(m)\| &\leq C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\} \|y(0)\| + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)(m - k) + (\sigma_{\text{Л}}(A) + \varepsilon)k\} (\|Q(k)\| \|y(k)\| + C_{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 k) \|y(k)\|^p), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\} &\leq C_\varepsilon \|y(0)\| + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} C_\varepsilon \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A) - \lambda_n(A) + \varepsilon_1)k\} (\|Q(k)\| \exp(-\varepsilon_1 k) \|y(k)\| + C_{\varepsilon_1} \|y(k)\|^p). \end{aligned}$$

Оценив величину $\exp(-\varepsilon_1 k)$ сверху единицей, будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\} &\leq C_\varepsilon \|y(0)\| + C_\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A) - \lambda_n(A) + \varepsilon_1)k\} \times \\ &\times \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)kp\} (\|Q(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)(p - 1)k\} \|y(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)k\} + \\ &+ C_{\varepsilon_1} (\|y(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)k\})^p). \end{aligned} \tag{15}$$

Из условия (10) вытекает оценка

$$\|Q(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)(p - 1)k\} \leq C_Q \exp\{-\varepsilon(p - 1)k\} \leq C_Q, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

учитывая которую в неравенстве (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\} &\leq C_\varepsilon \|y(0)\| + C_Q C_\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A) + \lambda_n(A)(p - 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon p)k\} \times \\ &\times (\|y(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)k\} + C_{\varepsilon_1} C_Q^{-1} (\|y(k)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)k\})^p). \end{aligned} \tag{16}$$

Из условия (11) следует, что при достаточно малых положительных ε_1 и ε выполняется неравенство $\sigma_{\text{Л}}(A) + \lambda_n(A)(p - 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon p < 0$. Зафиксируем такие ε_1 и ε и положим

$$u_m = \|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\}, \quad v_m = C_Q C_\varepsilon \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A) + \lambda_n(A)(p - 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon p)m\}.$$

В этих обозначениях неравенство (16) примет вид (7), в котором $C = C_\varepsilon \|y(0)\|$ и $a = C_{\varepsilon_1} C_Q^{-1}$. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится, то неравенство (8) леммы выполняется, если $\|y(0)\|$ достаточно мала. Поэтому, согласно лемме работы, имеет место оценка (9), т.е. после очевидных равносильных преобразований оценка

$$\begin{aligned} \|y(m)\| &\leq \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)m\} C_\varepsilon \|y(0)\| \left[(1 + C_{\varepsilon_1} C_Q^{-1} (C_\varepsilon \|y(0)\|)^{p-1}) \times \right. \\ &\times \left. \exp\left((1 - p) \sum_{k=0}^{m-1} v_k \right) - C_{\varepsilon_1} C_Q^{-1} (C_\varepsilon \|y(0)\|)^{p-1} \right]^{1/(1-p)}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства очевидно следует, что тривиальное решение системы (5) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

В заключение отметим непрерывный аналог теоремы 2.

Рассмотрим действительную нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + Q(t)x + f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (17)$$

где $n \times n$ -матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$, а $f(t, x)$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки $x = 0$ условию

$$\|f(t, x)\| \leq \text{const} \|x\|^p, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (18)$$

где $p > 1$ – фиксированное число. Пусть $\lambda_n(A)$ – наибольший показатель Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (19)$$

а $\sigma_{\text{Л}}(A)$ – её коэффициент неправильности Ляпунова; он определяется равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp} A(u) du.$$

Теорема 3. Пусть для системы (17) выполнены условие (18), неравенства $\lambda_n(A) < 0$, $\lambda_n(A)(p-1) + \sigma_{\text{Л}}(A) < 0$ и при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оценка $\|Q(t)\| \leq C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}$. Тогда её нулевое решение асимптотически устойчиво.

Действительно, из условий теоремы следует, что характеристический показатель $\lambda[Q]$ матрицы $Q(t)$ линейного возмущения удовлетворяет оценке $\lambda[Q] < -\sigma_{\text{Л}}(A)$. По теореме Богданова–Гробмана [8, гл. IV, § 5] показатели систем (19) и системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (20)$$

совпадают между собой. Так как $\lambda_n(A) < 0$, то $\|Q(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а значит, матрица $Q(t)$ имеет нулевое интегральное среднее, поэтому $\sigma_{\text{Л}}(A) = \sigma_{\text{Л}}(A + Q)$. Тогда утверждение теоремы 3 следует из теоремы Четаева–Малкина–Массеры [7, с. 63] для системы (20).

Замечание 4. Из условий $\lambda_n(A) < 0$ и $\|Q(t)\| \leq C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, следует, что $\|Q(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Хорошо известно, что убывающие к нулю на бесконечности линейные возмущения линейной дифференциальной системы могут вызвать, как показано ещё О. Перроном [8, с. 118–119], скачкообразное изменение её характеристических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Устойчивость по первому приближению дискретных систем // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1. № 1. С. 28–35.
3. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Критерии устойчивости по первому приближению нелинейных дискретных систем // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2005. Вып. 2. С. 55–63.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
5. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
6. Кузнецов Н.В. Устойчивость дискретных систем. Автореф. дис. . . канд. физ.-мат. наук. СПб, 2004.
7. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
8. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб, 1992.

Новгородский государственный университет
им. Ярослава Мудрого

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.
После доработки 24.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.