ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 435–465

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

© 2021 г. В. Ф. Бутузов, Р. Е. Симаков

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет три непересекающихся корня, причём один из них – двукратный, а два других – простые (однократные). Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом от двукратного корня вырожденного уравнения к простому корню в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения являются простыми. В частности, разложение проводится не по целым, а по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, а переходный слой оказывается шестизонным.

DOI: 10.31857/S0374064121040014

1. Постановка задачи и схема её решения. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2} = F(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon\frac{d^2v}{dx^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{du}{dx}(1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ – искомые скалярные функции.

Такая задача при условии, что вырожденное уравнение

$$F(u,v,x,0) = 0 \tag{3}$$

имеет три простых корня $u=\varphi_i(v,x)$, $i=1,2,3$, исследовалась в работе [1], в которой было доказано существование решения с внутренним переходным слоем и с помощью классического метода Васильевой [2, с. 38] построено его полное асимптотическое разложение.

Сформулируем условия, при которых в работе будет рассматриваться задача (1), (2). Пусть I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v.

Условие A1. Функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon) = (u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x))(u-\varphi_3(v,x)) - \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где $\varphi_i(v,x)\in I_u$ при $(v,x)\in I_v\times[0,1]$, $i=1,2,3$, причём

$$\varphi_1(v,x)<\varphi_2(v,x)<\varphi_3(v,x), \quad (v,x)\in I_v\times[0,1]. \tag{4}$$

Из условия A1 следует, что корень $u=\varphi_1(v,x)$ уравнения (3) является двукратным, а $u=\varphi_2(v,x)$ и $u=\varphi_3(v,x)$ – простые корни этого уравнения.

Условие A2. Уравнения $g_i(v,x) := f(\varphi_i(v,x),v,x,0) = 0$ при $i=1,3$ имеют простые корни $v=v_i(x)\in I_v$, $x\in[0,1]$.

Условие A3. Функции $\varphi_i(v,x)$, $i=1,2,3$, $F_1(u,v,x,\varepsilon)$, $f(u,v,x,\varepsilon)$, $v_1(x)$ и $v_3(x)$ являются достаточно гладкими при $(u,v,x,\varepsilon)\in I_u\times I_v\times[0,1]\times[0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

Условие А4. Система уравнений

$$I(v_0, x_0) := \int\limits_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_3(v_0,x_0)} F(u, v_0, x_0, 0)\, du = 0, \tag{5}$$

$$J(v_0, x_0) := \int\limits_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v, x_0)\, dv + \int\limits_{v_0}^{v_3(x_0)} g_3(v, x_0)\, dv = 0 \tag{6}$$

имеет решение $v_0 = \bar{v}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$ такое, что $0 < \bar{x}_0 < 1$,

$$v_1(\bar{x}_0) < \bar{v}_0 < v_3(\bar{x}_0), \tag{7}$$

и, кроме того, выполняется неравенство

$$\frac{D(I, J)}{D(v_0, x_0)}\bigg|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}} \neq 0. \tag{8}$$

Поставим вопрос о существовании и асимптотике по параметру ε решения $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $\bar{x}_0$, удовлетворяющего предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(v_1(x), x), & 0 \leqslant x < \bar{x}_0, \\ \varphi_3(v_3(x), x), & \bar{x}_0 < x \leqslant 1; \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon) = \begin{cases} v_1(x), & 0 \leqslant x < \bar{x}_0, \\ v_3(x), & \bar{x}_0 < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Такие решения называются *контрастными структурами типа ступеньки.*

Как будет видно из дальнейшего, асимптотика решения с внутренним переходным слоем задачи (1), (2) в рассматриваемом случае имеет качественно иной характер по сравнению с классическим случаем [1], т.е. когда все корни $u = \varphi_i(v, x)$ – простые, причём такое изменение касается всех слагаемых асимптотического разложения решения: регулярной части, погранслойной части и внутрислойной части, в частности, переходный слой становится многозонным. Отметим, что в более простом случае скалярной задачи (т.е. когда в системе (1) отсутствует второе уравнение, а в краевых условиях (2) – второе равенство, и функция F не зависит от v) многозонный переходный слой рассматривался в работе [3].

Определим точку x_* как точку, в которой u-компонента решения пересекается с корнем φ_2, т.е. $u(x_*, \varepsilon) = \varphi_2(v_*, x_*)$, где v_* – значение v-компоненты решения в этой точке: $v(x_*, \varepsilon) = v_*$. Забегая вперёд, отметим, что x_* и v_* имеют представления $x_* = \bar{x}_0 + O(\varepsilon^{1/4})$ и $v_* = \bar{v}_0 + O(\varepsilon^{1/4})$ и, значит, сколь угодно близки к $\bar{x}_0$ и $\bar{v}_0$ для достаточно малых ε. Точку x_* назовём *точкой перехода* и будем строить асимптотику искомого решения раздельно слева и справа от точки перехода, для чего поставим две вспомогательные краевые задачи на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$.

Первая вспомогательная задача:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u^{(-)}}{dx^2} = F(u^{(-)}, v^{(-)}, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2 v^{(-)}}{dx^2} = f(u^{(-)}, v^{(-)}, x, \varepsilon), \quad 0 < x < x_*, \tag{10}$$

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dv^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon) = 0, \quad u^{(-)}(x_*, \varepsilon) = \varphi_2(v_*, x_*), \quad v^{(-)}(x_*, \varepsilon) = v_*. \tag{11}$$

Вторая вспомогательная задача:

$$\varepsilon^2\frac{d^2u^{(+)}}{dx^2}=F(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d^2v^{(+)}}{dx^2}=f(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\quad x_*<x<1, \tag{12}$$

$$u^{(+)}(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*),\quad v^{(+)}(x_*,\varepsilon)=v_*,\quad \frac{du^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0. \tag{13}$$

При решении этих задач будем считать, что v_* и x_* – некоторые фиксированные точки из достаточно малых окрестностей точек $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно. Тогда для них будут выполнены неравенства $0<x_*<1$, $v_1(x_*)<v_*<v_3(x_*)$, а условия A5–A11, которые формулируются ниже, сохранятся при замене в них $\bar v_0$ на v_* и $\bar x_0$ на x_*.

После того, как будет доказано существование погранслойных решений обеих вспомогательных задач, точки v_* и x_* будут выбраны так, что функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ u^{(+)}(x,\varepsilon), & x_*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\quad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ v^{(+)}(x,\varepsilon), & x_*\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

окажутся решением исходной задачи с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*.

2. Вторая вспомогательная задача. Начнём построение асимптотики со второй вспомогательной задачи, которая относится к числу исследованных ранее задач, так как в соответствии с первым равенством в (9) u-компонента её решения близка к простому корню $u=\varphi_3(v,x)$ вырожденного уравнения (3). Этот случай изучен ранее, например, в работе [1]. В связи с этим ограничимся кратким описанием построения асимптотики решения по методу Васильевой [2, с. 38].

Асимптотика решения строится в виде

$$U^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(+)}u(\tilde\xi,\varepsilon)+P^{(+)}u(\tilde\zeta,\varepsilon)+Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)+R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon), \tag{14}$$

$$V^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar v^{(+)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(+)}v(\tilde\xi,\varepsilon)+P^{(+)}v(\tilde\zeta,\varepsilon)+Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)+R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon), \tag{15}$$

где $\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)$, $\bar v^{(+)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(+)}u(\tilde\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\tilde\xi,\varepsilon)$ и $P^{(+)}u(\tilde\zeta,\varepsilon)$, $P^{(+)}v(\tilde\zeta,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x=1$; $Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в правой полуокрестности точки перехода x_*. Используются растянутые переменные $\tilde\xi=(1-x)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde\zeta=(1-x)/\varepsilon$, $\tau=(x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma=(x-x_*)/\varepsilon$, масштабы которых типичны для случая простых корней вырожденных уравнений.

2.1. Регулярная часть асимптотики. Регулярная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням ε:

$$\bar u^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\bar u_i^{(+)}(x),\quad \bar v^{(+)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\bar v_i^{(+)}(x).$$

Их главные члены $\bar u_0^{(+)}(x)=\varphi_3(v_3(x),x)$ и $\bar v_0^{(+)}(x)=v_3(x)$.

Введём обозначения

$$h^{(+)}(u,v,x):=(u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x)),\quad \bar g_{3v}(x):=\frac{\partial g_3}{\partial v}(v_3(x),x).$$

Регулярные функции более высоких порядков определяются из систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), разрешимость которых обеспечивается первым неравенством из условия A5.

Условие A5. Справедливы неравенства:

$$\bar g_{3v}(x)>0\ \text{ при }\ x\in[\bar x_0,1]\quad \text{и}\quad \frac{\partial g_3}{\partial v}(v,\bar x_0)>0\ \text{ при }\ v\in[\bar v_0,v_3(\bar x_0)].$$

2.2. Погранслойная часть асимптотики. Погранслойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(+)}u(\tilde{\xi},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}u(\tilde{\xi}),\quad \Pi^{(+)}v(\tilde{\xi},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\Pi_i^{(+)}v(\tilde{\xi}),\tag{16}$$

$$P^{(+)}u(\tilde{\zeta},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}u(\tilde{\zeta}),\quad P^{(+)}v(\tilde{\zeta},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}P_i^{(+)}v(\tilde{\zeta}).\tag{17}$$

Условия Неймана в точке $x=1$ (см. (13)) приводят к тому, что ряды (16) на самом деле начинаются со слагаемых с номером $i=1,$ а ряды (17) – со слагаемых с номером $i=2.$

Все $\Pi^{(+)}$- и $P^{(+)}$-функции убывают экспоненциально при $\tilde{\xi}\to+\infty$ и $\tilde{\zeta}\to+\infty.$

2.3. Внутрислойная часть асимптотики. Внутрислойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}u(\tau),\quad Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}Q_i^{(+)}v(\tau),$$

$$R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}u(\sigma),\quad R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}R_i^{(+)}v(\sigma),$$

при этом оказывается, что

$$R_0^{(+)}v(\sigma)=R_1^{(+)}v(\sigma)=0.\tag{18}$$

Задачи для $Q_0^{(+)}v(\tau)$ и $R_0^{(+)}u(\sigma)$ сводятся к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}=\left(2\int\limits_0^{Q_0^{(+)}v}g_3(\bar{v}_0^{(+)}(x_*)+s,x_*)ds\right)^{1/2},\quad \tau\geqslant0,\tag{19}$$

$$\frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma}=\left(2\int\limits_0^{R_0^{(+)}u}h^{(+)}(\varphi_3(v_*,x_*)+s,v_*,x_*)s\,ds\right)^{1/2},\quad \sigma\geqslant0,\tag{20}$$

с начальными условиями

$$Q_0^{(+)}v(0)=v_*-v_3(x_*),\quad R_0^{(+)}u(0)=\varphi_2(v_*,x_*)-\varphi_3(v_*,x_*).\tag{21}$$

Уравнения (19) и (20) интегрируются в квадратурах, для их решений с начальными условиями (21) справедливы экспоненциальные оценки вида

$$|Q_0^{(+)}v(\tau)|\leqslant c\exp(-\kappa\tau),\quad \tau\geqslant0;\quad |R_0^{(+)}u(\sigma)|\leqslant c\exp(-\kappa\sigma),\quad \sigma\geqslant0,$$

здесь и далее c и κ – подходящие положительные числа, не зависящие от ε и, вообще говоря, различные в разных оценках.

Все остальные внутрислойные функции также убывают экспоненциально при $\tau\to+\infty$ и $\sigma\to+\infty.$ Экспоненциальные оценки означают, что внутренний слой в правой полуокрестности точки x_* является двухзонным. В первой зоне (определим её так: $x_*\leqslant x\leqslant x_*+\varepsilon^{3/4}$) происходит экспоненциальное убывание $R^{(+)}$-функций при почти не изменяющихся $Q^{(+)}$-функциях (так как в этой зоне $0\leqslant\tau\leqslant\varepsilon^{1/4}$), а вторая зона: $x_*+\varepsilon^{3/4}\leqslant x\leqslant x_*+\delta,$ где $\delta>0$ – любое не зависящее от ε фиксированное число, характеризуется экспоненциальным убыванием $Q^{(+)}$-функций, в то время как $R^{(+)}$-функции уже на границе двух зон (т.е. при $\sigma=\varepsilon^{-1/4}$) стали величинами порядка $O(\exp(-\kappa/\varepsilon^{1/4})),$ т.е. величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N>0.$

2.4. Обоснование асимптотики. Для обоснования асимптотики введём ещё одно условие, связанное с производными функций F и f. Чтобы его сформулировать, определим три кривые в пространстве переменных (u, v, x):

$$l_1 = \{(u,v,x)\colon \varphi_2(\bar v_0, \bar x_0) \leqslant u \leqslant \varphi_3(\bar v_0, \bar x_0), \quad v = \bar v_0, \quad x = \bar x_0\},$$

$$l_2 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_3(v, \bar x_0), \quad \bar v_0 \leqslant v \leqslant v_3(\bar x_0), \quad x = \bar x_0\},$$

$$l_3 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_3(v_3(x), x), \quad v = v_3(x), \quad \bar x_0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Условие А6. При $(u,v,x) \in l^{(+)} := l_1 \bigcup l_2 \bigcup l_3$ имеют место неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,x,0) < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) < 0.$$

Из условия А6 следует, что для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно, и достаточно малых ε неравенства $\partial F(u,v,x,0)/\partial v < 0$ и $\partial f(u,v,x,0)/\partial u < 0$ будут выполнены в некоторой окрестности кривой $l_*^{(+)}$, которая определяется так же, как кривая $l^{(+)}$, с заменой $\bar v_0$ на v_* и $\bar x_0$ на x_*. В таком случае говорят, что в этой окрестности функции F и f удовлетворяют *условию квазимонотонности.*

Обозначим через $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (14) и (15):

$$U_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar u_i^{(+)}(x) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \Pi_i^{(+)} u\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+2} \varepsilon^{i/2} P_i^{(+)} u\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} Q_i^{(+)} u\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} R_i^{(+)} u\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right), \tag{22}$$

$$V_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar v_i^{(+)}(x) + \sum_{i=0}^{2n+2} \varepsilon^{i/2} \Pi_i^{(+)} v\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+3} \varepsilon^{i/2} P_i^{(+)} v\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} Q_i^{(+)} v\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+3} \varepsilon^{i/2} R_i^{(+)} v\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right). \tag{23}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия А1–А6. Тогда при произвольных v_* и x_*, достаточно близких к $\bar v_0$ и $\bar x_0$ соответственно, и любом натуральном n для всех достаточно малых ε существует решение $(u^{(+)}(x,\varepsilon), v^{(+)}(x,\varepsilon))$ задачи (12), (13), для компонент которого при каждом $m = \overline{0,n}$ имеют место представления*

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = U_m^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad v^{(+)}(x,\varepsilon) = V_m^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad x \in [x_*, 1]. \tag{24}$$

Теорема доказывается с помощью метода дифференциальных неравенств.

Следствие 1.1. *Предельным положением при $\varepsilon \to 0$ кривой $l_\varepsilon^{(+)} = \{(u,v,x)\colon u = u^{(+)}(x,\varepsilon)$, $v = v^{(+)}(x,\varepsilon)$, $x_* \leqslant x \leqslant 1\}$ *) является кривая $l_*^{(+)}$.*

Стандартным способом (см. [3]) получается

Следствие 1.2. *Для производных решения задачи (12), (13) справедливы асимптотические представления*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \quad \frac{dv^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1/2}), \quad x \in [x_*, 1]. \tag{25}$$

*) Эту кривую можно назвать графиком решения задачи (12), (13).

3. Первая вспомогательная задача. Более подробно рассмотрим построение и обоснование асимптотики решения первой вспомогательной задачи, существенная особенность которой состоит в том, что при построении будет использоваться двукратный корень $u = \varphi_1(v, x)$ уравнения (3). Будем строить асимптотику в виде

$$U^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon) + R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon), \tag{26}$$

$$V^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon) + R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon), \tag{27}$$

где $\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 0$; $Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в левой полуокрестности точки перехода x_*. Используются растянутые переменные $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$, $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$, $\tau = (x - x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon$. Каждое слагаемое в правых частях представлений (26) и (27) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε.

3.1. Регулярная часть асимптотики. Регулярная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x), \quad \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x).$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(-)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(-)}(x)$ будем извлекать стандартным способом (см. [2, с. 29]) из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\bar{u}^{(-)}}{dx^2} = F(\bar{u}^{(-)}, \bar{v}^{(-)}, x, \varepsilon), \tag{28}$$

$$\varepsilon \frac{d^2\bar{v}^{(-)}}{dx^2} = f(\bar{u}^{(-)}, \bar{v}^{(-)}, x, \varepsilon). \tag{29}$$

В нулевом порядке имеем вырожденную систему уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0,$$

из которой в соответствии с (9) получаем $\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(v_1(x), x)$, $\bar{v}_0^{(-)}(x) = v_1(x)$.

Введём обозначения:

$$h^{(-)}(u,v,x) := (u - \varphi_2(v,x))(u - \varphi_3(v,x)), \quad \bar{h}(x) := h^{(-)}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x), \tag{30}$$

$$\bar{f}_u(x) := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0), \quad \bar{f}_v(x) := \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0), \tag{31}$$

$$\bar{\varphi}_{1v}(x) := \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(v_1(x), x), \quad \bar{g}_{1v}(x) := \frac{\partial g_1}{\partial v}(v_1(x), x) = \bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_{1v}(x) + \bar{f}_v(x). \tag{32}$$

Уравнение (28) не содержит членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. членов первого порядка. Во втором порядке получаем квадратное уравнение

$$\bar{h}(x)[\bar{u}_1^{(-)} - \bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_1^{(-)}]^2 = \bar{F}_1(x) := F_1(\bar{u}_0^{(-)}(x), \bar{v}_0^{(-)}(x), x, 0). \tag{33}$$

Условие А7. При $x \in [0, \bar{x}_0]$ имеет место неравенство $\bar{F}_1(x) > 0$.

Так как $\bar{h}(x) > 0$ (в силу (4)), то квадратное уравнение (33) имеет два корня, из которых выбираем положительный:

$$\bar{u}_1^{(-)} - \bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_1^{(-)} = a(x) := (\bar{h}^{-1}(x)\bar{F}_1(x))^{1/2}. \tag{34}$$

Положительность корня $a(x)$ играет в дальнейшем важную роль. Отметим, что случай, когда $\bar{F}_1(x)=0$ в каких-то точках, требует отдельного рассмотрения.

Второе уравнение для $\bar{u}_1^{(-)}$, $\bar{v}_1^{(-)}$ получаем из (29):

$$\bar{f}_u(x)\bar{u}_1^{(-)}+\bar{f}_v(x)\bar{v}_1^{(-)}=0. \tag{35}$$

Определитель СЛАУ (34), (35) равен $\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_{1v}(x)+\bar{f}_v(x)=\bar{g}_{1v}(x)$.

Условие A8. Справедливы неравенства

$$\bar{g}_{1v}(x)>0 \ \text{ при } \ x\in[0,\bar{x}_0] \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_1}{\partial v}(v,\bar{x}_0)>0 \ \text{ при } \ v\in[v_1(\bar{x}_0),\bar{v}_0].$$

В силу первого неравенства из условия A8 (второе неравенство понадобится в дальнейшем) СЛАУ (34), (35) однозначно разрешима:

$$\bar{u}_1^{(-)}(x)=\bar{f}_v(x)\bar{g}_{1v}^{-1}(x)a(x), \quad \bar{v}_1^{(-)}(x)=-\bar{f}_u(x)\bar{g}_{1v}^{-1}(x)a(x).$$

Для каждого $i=2,3,\ldots$ из равенств (28), (29) извлекается СЛАУ относительно $\bar{u}_i^{(-)}$, $\bar{v}_i^{(-)}$ такого же типа, как (34), (35):

$$\bar{u}_i^{(-)}-\bar{\varphi}_{1v}(x)\bar{v}_i^{(-)}=a_i^{(-)}(x), \quad \bar{f}_u(x)\bar{u}_i^{(-)}+\bar{f}_v(x)\bar{v}_i^{(-)}=b_i^{(-)}(x),$$

где $a_i^{(-)}(x)$, $b_i^{(-)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(-)}(x)$, $\bar{v}_j^{(-)}(x)$ с номерами $j<i$. Отсюда однозначно определяются функции $\bar{u}_i^{(-)}(x)$, $\bar{v}_i^{(-)}(x)$.

3.2. Погранслойная часть асимптотики. Погранслойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}u(\xi), \quad \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}v(\xi), \quad \xi=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\geqslant 0,$$

$$P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}u(\zeta), \quad P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}v(\zeta), \quad \zeta=\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\geqslant 0.$$

Заметим, что все погранслойные ряды начинаются с членов порядка ε в некоторой положительной степени. Это обусловлено тем, что в точке $x=0$ заданы граничные условия Неймана (см. (11)).

Уравнения для функций $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$ и $P_i^{(-)}u(\zeta)$, $P_i^{(-)}v(\zeta)$ будем извлекать стандартным способом из равенств, традиционных для метода пограничных функций [2, с. 28]:

$$\varepsilon\frac{d^2\Pi^{(-)}u}{d\xi^2}=\Pi F, \quad \frac{d^2\Pi^{(-)}v}{d\xi^2}=\Pi f, \tag{36}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{d^2P^{(-)}u}{d\zeta^2}=PF, \quad \frac{d^2P^{(-)}v}{d\zeta^2}=\sqrt{\varepsilon}Pf, \tag{37}$$

где

$$\Pi F:=[F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v,x,\varepsilon)-F(\bar{u}^{(-)},\bar{v}^{(-)},x,\varepsilon)]\Big|_{x=\sqrt{\varepsilon}\xi},$$

$$PF:=[F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u+P^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v+P^{(-)}v,x,\varepsilon)-$$
$$-F(\bar{u}^{(-)}+\Pi^{(-)}u,\bar{v}^{(-)}+\Pi^{(-)}v,x,\varepsilon)]\Big|_{x=\varepsilon^{3/4}\zeta,\,\xi=\varepsilon^{1/4}\zeta},$$

функции Πf и Pf имеют выражения, аналогичные выражениям для ΠF и PF.

Чтобы найти граничные условия для погранслойных функций при $\xi = 0$ и $\zeta = 0$, подставим выражения (26) и (27) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ в первое и второе краевые условия из (11), используя представления для $\bar{u}^{(-)}$, $\Pi^{(-)}u$, $P^{(-)}u$ и $\bar{v}^{(-)}$, $\Pi^{(-)}v$, $P^{(-)}v$ в виде рядов и учитывая тот факт, что производные всех членов рядов для $Q^{(-)}u$, $R^{(-)}u$ и $Q^{(-)}v$, $R^{(-)}v$ равны нулю в точке $x = 0$ (см. замечание в конце п. 3.3). Получим равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \frac{d\Pi_i^{(-)}u}{d\xi}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \frac{dP_i^{(-)}u}{d\zeta}(0) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \frac{d\Pi_i^{(-)}v}{d\xi}(0) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \frac{dP_i^{(-)}v}{d\zeta}(0) = 0.$$

Из этих равенств стандартным способом получаем

$$\frac{dP_i^{(-)}u}{d\zeta}(0) = -\frac{d\bar{u}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\Pi_i^{(-)}u}{d\xi}(0), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

$$\frac{d\Pi_0^{(-)}v}{d\xi}(0) = -\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(0), \tag{39}$$

$$\frac{d\Pi_1^{(-)}v}{d\xi}(0) = 0, \quad \frac{d\Pi_i^{(-)}v}{d\xi}(0) = -\frac{d\bar{v}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0) - \frac{dP_{i-2}^{(-)}v}{d\zeta}(0), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{40}$$

где $d\bar{u}_{i/2}^{(-)}(0)/dx = d\bar{v}_{i/2}^{(-)}(0)/dx = 0$, если i – нечётное число.

К полученным граничным условиям добавим стандартные для погранслойных функций условия на бесконечности

$$\Pi_i^{(-)}v(\infty) = 0, \quad P_i^{(-)}u(\infty) = 0, \quad P_i^{(-)}v(\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

Уравнения (36), (37) и граничные условия (38)–(41) дают возможность определить последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ погранслойные функции в следующем порядке: $\Pi_i^{(-)}v \to \Pi_i^{(-)}u \to$ $\to P_i^{(-)}u \to P_i^{(-)}v$.

Для $\Pi_0^{(-)}u$, $\Pi_0^{(-)}v$ из равенств (36) следует система уравнений

$$\bar{h}(0)[\bar{u}_1^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u - \bar{\varphi}_{1v}(0)(\bar{v}_1^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v)]^2 - \bar{h}(0)[\bar{u}_1^{(-)}(0) - \bar{\varphi}_{1v}(0)\bar{v}_1^{(-)}(0)]^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\Pi_0^{(-)}v}{d\xi^2} = \bar{f}_u(0)\Pi_0^{(-)}u + \bar{f}_v(0)\Pi_0^{(-)}v, \quad \xi \geqslant 0.$$

Из её первого уравнения получаем равенство

$$\Pi_0^{(-)}u = \bar{\varphi}_{1v}(0)\Pi_0^{(-)}v, \tag{42}$$

в силу которого второе уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\Pi_0^{(-)}v}{d\xi^2} = \bar{g}_{1v}(0)\Pi_0^{(-)}v, \quad \xi \geqslant 0.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (39) и $\Pi_0^{(-)}v(\infty) = 0$ (см. (41)) находится в явном виде:

$$\Pi_0^{(-)}v(\xi) = \frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(0)(\bar{g}_{1v}(0))^{-1/2}\exp(-\sqrt{\bar{g}_{1v}(0)}\xi), \quad \xi \geqslant 0.$$

Так как $\bar{g}_{1v}(0) > 0$ в силу условия A8, то функция $\Pi_0^{(-)}v(\xi)$ имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0^{(-)}v(\xi)| \leqslant c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geqslant 0. \tag{43}$$

Функция $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ определяется теперь из равенства (42) и также имеет оценку вида (43). Кроме того, так как функция $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ найдена, то из условий (38) при $i = 0$ получаем граничное условие для $P_0^{(-)}u(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$:

$$\frac{dP_0^{(-)}u}{d\zeta}(0) = -\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\Pi_0^{(-)}u}{d\xi}(0) =: \gamma_0. \tag{44}$$

Уравнения для $P_0^{(-)}u$, $P_0^{(-)}v$ извлекаются из равенств (37) и имеют вид

$$\frac{d^2P_0^{(-)}u}{d\zeta^2} = 2\bar{h}(0)a(0)P_0^{(-)}u, \quad \zeta \geqslant 0, \tag{45}$$

$$\frac{d^2P_0^{(-)}v}{d\zeta^2} = \bar{f}_u(0)P_0^{(-)}u, \quad \zeta \geqslant 0, \tag{46}$$

где величина $a(0)$ определена в (34).

Решение уравнения (45) с граничными условиями (44) и $P_0^{(-)}u(\infty) = 0$ (см. (41)) также находится в явном виде:

$$P_0^{(-)}u(\zeta) = -\gamma_0 k_0^{-1}\exp(-k_0\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

где $k_0 := \sqrt{2\bar{h}(0)a(0)} > 0$, и имеет, очевидно, экспоненциальную оценку

$$|P_0^{(-)}u(\zeta)| \leqslant c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \geqslant 0. \tag{47}$$

Зная $P_0^{(-)}u(\zeta)$, из уравнения (46) с условием $P_0^{(-)}v(\infty) = 0$ (см. (41)) находим функцию $P_0^{(-)}v(\zeta)$:

$$P_0^{(-)}v(\zeta) = \int\limits_{\infty}^{\zeta}\int\limits_{\infty}^{s} \bar{f}_u(0)P_0^{(-)}u(t)\,dt\,ds,$$

для неё также имеет место оценка вида (47).

При $i = 1, 2, \ldots$ для $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$ из равенств (36) вытекает линейная система уравнений

$$\Pi_i^{(-)}u - \bar{\varphi}_{1v}(0)\Pi_i^{(-)}v = \tilde{\pi}_i(\xi),$$

$$\frac{d^2\Pi_i^{(-)}v}{d\xi^2} = \bar{f}_u(0)\Pi_i^{(-)}u + \bar{f}_v(0)\Pi_i^{(-)}v + \pi_i(\xi), \quad \xi \geqslant 0,$$

а для $P_i^{(-)}u$, $P_i^{(-)}v$ из равенств (37) – линейная система уравнений

$$\frac{d^2P_i^{(-)}u}{d\zeta^2} = k_0^2P_i^{(-)}u + p_i(\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

$$\frac{d^2P_i^{(-)}v}{d\zeta^2} = \bar{f}_u(0)P_i^{(-)}u + \tilde{p}_i(\zeta), \quad \zeta \geqslant 0,$$

где неоднородности $\tilde{\pi}_i(\xi)$, $\pi_i(\xi)$ и $p_i(\zeta)$, $\tilde{p}_i(\zeta)$ выражаются рекуррентно через функции $\Pi_j^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_j^{(-)}v(\xi)$ и $P_j^{(-)}u(\zeta)$, $P_j^{(-)}v(\zeta)$ с номерами $j < i$ и имеют экспоненциальные оценки вида (43) и (47), если такие же оценки имеют погранслойные функции с номерами $j < i$. Эти уравнения с граничными условиями (40), (38), (41) решаются в той же последовательности, как и уравнения для погранслойных функций при $i = 0$, при этом решения находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки вида (43) и (47).

Итак, погранслойные ряды построены.

3.3. Внутрислойная часть асимптотики. Внутрислойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}u(\tau), \quad Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}v(\tau), \tag{48}$$

$$R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)}u(\sigma), \quad R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)}v(\sigma). \tag{49}$$

Стандартным способом (см. [2, с. 28]) для функций $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ получаем систему уравнений

$$\varepsilon\frac{d^2Q^{(-)}u}{d\tau^2} = QF, \quad \frac{d^2Q^{(-)}v}{d\tau^2} = Qf, \tag{50}$$

где

$$QF := [F(\bar{u}^{(-)} + Q^{(-)}u, \bar{v}^{(-)} + Q^{(-)}v, x, \varepsilon) - F(\bar{u}^{(-)}, \bar{v}^{(-)}, x, \varepsilon)]\Big|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функция Qf имеет аналогичное выражение. Из этой системы также стандартным способом будем последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ извлекать уравнения для функций $Q_i^{(-)}u$, $Q_i^{(-)}v$.

Для $Q_0^{(-)}u$, $Q_0^{(-)}v$ получаем систему уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*, 0) = 0,$$

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}v}{d\tau^2} = f(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*, 0), \quad \tau \leqslant 0.$$

Из первого уравнения следует равенство

$$\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u = \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*), \tag{51}$$

в силу которого второе уравнение, используя вид функции $g_1(v,x)$ (см. условие A2), запишем в виде

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}v}{d\tau^2} = g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*), \quad \tau \leqslant 0. \tag{52}$$

К этому уравнению нужно добавить граничные условия. Чтобы получить граничное условие при $\tau = 0$, подставим выражение (27) для $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ в четвёртое краевое условие из (11), используя представления $\bar{v}^{(-)}$, $Q^{(-)}v$, $R^{(-)}v$ в виде рядов и учитывая тот факт, что все члены рядов $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}v$ равны нулю при $x = x_*$ (см. замечание в конце этого пункта). В результате получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}v(0) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)}v(0) = v_*. \tag{53}$$

Отсюда находим $\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(0) = v_*$, и, следовательно, граничное условие для $Q_0^{(-)}v(\tau)$ при $\tau = 0$ имеет вид

$$Q_0^{(-)}v(0) = v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*). \tag{54}$$

Отметим, что $v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*) = v_* - v_1(x_*) > 0$ (см. (7)).

В качестве второго граничного условия для функции $Q_0^{(-)}v(\tau)$ и также для остальных функций $Q_i^{(-)}v(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots$, возьмём стандартное условие на бесконечности:

$$Q_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{55}$$

Для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, в силу второго неравенства из условия A8 справедливо неравенство $\partial g_1(v, x_*)/\partial v > 0$ при $v \in [\bar{v}_0^{(-)}(x_*), v_*]$. Поэтому задача (52), (54), (55) для функции $Q_0^{(-)}v(\tau)$ сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau} = \left(2\int\limits_0^{Q_0^{(-)}v} g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + s, x_*)ds\right)^{1/2}, \quad \tau \leqslant 0, \tag{56}$$

с начальным условием (54).

Уравнение (56) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (54) является возрастающей функцией (от нуля при $\tau = -\infty$ до $(v_* - \bar{v}_0^{(-)}(x_*))$ при $\tau = 0$) и имеет экспоненциальную оценку

$$|Q_0^{(-)}v(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0. \tag{57}$$

Теперь из равенства (51) находим $Q_0^{(-)}u(\tau)$:

$$Q_0^{(-)}u(\tau) = \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*) - \bar{u}_0^{(-)}(x_*) =$$
$$= \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*), x_*). \tag{58}$$

Отсюда следует, что $Q_0^{(-)}u(\tau)$ и её производные также имеют экспоненциальные оценки вида (57).

Несложные вычисления показывают, что справедливы равенства

$$Q_1^{(-)}v(\tau) = 0, \quad Q_1^{(-)}u(\tau) = 0, \quad \tau \leqslant 0, \tag{59}$$

а для функций $Q_2^{(-)}u$, $Q_2^{(-)}v$ вследствие (50) получаем систему уравнений

$$\hat{h}(x_*, \tau)(Q_2^{(-)}u - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)Q_2^{(-)}v + \psi_2(\tau))^2 = B(\tau), \tag{60}$$

$$\frac{d^2Q_2^{(-)}v}{d\tau^2} = \hat{f}_u(x_*, \tau)Q_2^{(-)}u + \hat{f}_v(x_*, \tau)Q_2^{(-)}v + \chi_2(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{61}$$

где $\hat{h}(x, \tau) := h^{(-)}(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)$ (см. (30)),

$$\psi_2(\tau) := \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_{1x}(\tau)\right)\tau + \bar{u}_1^{(-)}(x_*) - \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)\bar{v}_1^{(-)}(x_*),$$

$$\hat{\varphi}_{1v}(x, \tau) := \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x), \tag{62}$$

$$\hat{\varphi}_{1x}(\tau) := \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*),$$

$$B(\tau) := \frac{d^2 Q_0^{(-)} u}{d\tau^2}(\tau) + \hat{F}_1(\tau), \tag{63}$$

$$\hat{F}_1(\tau) := F_1(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*), \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*, 0),$$

$$\chi_2(\tau) := (\hat{f}_u(x_*, \tau) - \bar{f}_u(x_*))\left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right) +$$

$$+ (\hat{f}_v(x_*, \tau) - \bar{f}_v(x_*))\left(\frac{d\bar{v}_0^{(-)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{v}_1^{(-)}(x_*)\right) + (\hat{f}_x(x_*, \tau) - \bar{f}_x(x_*))\tau,$$

$$\hat{f}_u(x, \tau) := \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)} v(\tau), x), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)} v(\tau), x, 0); \tag{64}$$

обозначения $\hat{f}_v(x,\tau)$ и $\hat{f}_x(x,\tau)$ имеют аналогичный смысл, $\bar{f}_u(x)$ и $\bar{f}_v(x)$ определены в (31).

Дифференцируя дважды выражение (58) для функции $Q_0^{(-)} u(\tau)$ и используя равенства (52) и (56), приходим к равенству

$$\frac{d^2 Q_0^{(-)} u}{d\tau^2}(\tau) = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau) g_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau), x_*) + 2\hat{\varphi}_{1vv}(x_*, \tau) \int\limits_{\bar{v}_0^{(-)}(x_*)}^{\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)} g_1(s, x_*)\, ds.$$

Поэтому выражение (63) для $B(\tau)$ можно записать в виде

$$B(\tau) = [G(v, x_*) + F_1(\varphi_1(v, x_*), v, x_*, 0)]\big|_{v = \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)}, \tag{65}$$

где

$$G(v, x) := \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(v, x) g_1(v, x) + 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2}(v, x) \int\limits_{v_1(x)}^{v} g_1(s, x)\, ds.$$

Из уравнения (60) следует, что для разрешимости системы (60), (61) необходимо выполнение условия

$$B(\tau) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \tau \leqslant 0. \tag{66}$$

Учитывая вид (65) функции $B(\tau)$ и то, что $(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)} v(\tau)) \in (\bar{v}_0^{(-)}(x_*), v_*] = (v_1(x_*), v_*]$ при $\tau \leqslant 0,$ введём требование, обеспечивающее выполнение неравенства (66).

Условие A9. При $v \in [v_1(\bar{x}_0), \bar{v}_0]$ выполняется неравенство

$$G(v, \bar{x}_0) + F_1(\varphi_1(v, \bar{x}_0), v, \bar{x}_0, 0) > 0.$$

Тогда $B(\tau) > 0$ при $\tau \leqslant 0$ (для v_* и $x_*,$ достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно), и из уравнения (60) получаем

$$Q_2^{(-)} u = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau) Q_2^{(-)} v + b(\tau) - \psi_2(\tau), \tag{67}$$

где

$$b(\tau) := (\hat{h}^{-1}(x_*, \tau) B(\tau))^{1/2} \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad \tau \leqslant 0, \tag{68}$$

берём положительное значение корня из $\hat{h}^{-1}(x_*, \tau) B(\tau),$ что будет важно при определении функций $R_i^{(-)} u(\sigma),$ $R_i^{(-)} v(\sigma).$

Из определения (63) для $B(\tau),$ используя экспоненциальные оценки функций $Q_0^{(-)} u,$ $Q_0^{(-)} v,$ $d^2 Q_0^{(-)} u / d\tau^2,$ а также равенства (34) для корня $a(x),$ получаем $\hat{h}(x_*, -\infty) = \bar{h}(x_*),$

$$b(-\infty) = (\bar{h}^{-1}(x_*) B(-\infty))^{1/2} = (\bar{h}^{-1}(x_*) \bar{F}_1(x_*))^{1/2} = a(x_*). \tag{69}$$

Кроме того, из выражения для $\psi_2(\tau)$ следует, что $\psi_2(-\infty)=a(x_*)$, а $r_2(\tau):=b(\tau)-\psi_2(\tau)$ имеет экспоненциальную оценку вида (57):

$$|r_2(\tau)|\leqslant c\exp(\kappa\tau),\quad \tau\leqslant 0.$$

Такую же оценку имеет функция $\chi_2(\tau)$.

Подставляя выражение (67) для $Q_2^{(-)}u$ в уравнение (61) и учитывая, что

$$\hat f_u(x_*,\tau)\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)+\hat f_v(x_*,\tau)=\hat g_{1v}(x_*,\tau):=\frac{\partial g_1}{\partial v}(\bar v_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v(\tau),x_*),$$

приходим к следующему уравнению для функции $Q_2^{(-)}v(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_2^{(-)}v}{d\tau^2}=\hat g_{1v}(x_*,\tau)Q_2^{(-)}v+q_2(\tau),\quad \tau\leqslant 0, \tag{70}$$

где $q_2(\tau)=\chi_2(\tau)+\hat f_u(x_*,\tau)r_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ имеет оценку вида (57).

Граничные условия для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ следуют из (53) и (55):

$$Q_2^{(-)}v(0)=-\bar v_1^{(-)}(x_*)-R_0^{(-)}v(0),\quad Q_2^{(-)}v(-\infty)=0. \tag{71}$$

Мы видим, что первое граничное условие содержит неизвестную пока величину $R_0^{(-)}v(0)$.

Обратимся поэтому к построению рядов для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$. В отличие от рядов для $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ ряды для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ будут построены не стандартным способом, а с помощью алгоритма, разработанного для сингулярно возмущённых задач с кратным корнем вырожденного уравнения [3–6], в которых стандартный алгоритм не применим. С этой целью введём ещё одну внутрислойную переменную $\eta=(x-x_*)/\varepsilon^{3/4}$ и, используя равенства $x=x_*+\varepsilon^{3/4}\eta$, $\tau=\varepsilon^{1/4}\eta$, запишем систему уравнений для $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ в виде

$$\frac{d^2R^{(-)}u}{d\sigma^2}=RF,\quad \frac{d^2R^{(-)}v}{d\sigma^2}=\varepsilon Rf, \tag{72}$$

где

$$RF:=[F(\bar u^{(-)}+Q^{(-)}u+R^{(-)}u,\bar v^{(-)}+Q^{(-)}v+R^{(-)}v,x,\varepsilon)-$$
$$-F(\bar u^{(-)}+Q^{(-)}u,\bar v^{(-)}+Q^{(-)}v,x,\varepsilon)]\Big|_{\substack{x=x_*+\varepsilon^{3/4}\eta\\ \tau=\varepsilon^{1/4}\eta}},$$

функция Rf имеет аналогичное выражение. Разложив правые части уравнений в ряды по степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, будем последовательно для $i=0,1,2,\ldots$ извлекать из системы (72) уравнения для $R_i^{(-)}u$, $R_i^{(-)}v$ нестандартным способом.

Уравнения для $R_0^{(-)}u$, $R_0^{(-)}v$ возьмём в виде (для упрощения записи используем равенства $\bar v_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v(0)=v_*$, $\bar u_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}u(0)=\varphi_1(v_*,x_*)$)

$$\frac{d^2R_0^{(-)}u}{d\sigma^2}=h^{(-)}(\varphi_1(v_*,x_*)+R_0^{(-)}u,v_*,x_*)[(R_0^{(-)}u)^2+2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u], \tag{73}$$

$$\frac{d^2R_0^{(-)}v}{d\sigma^2}=\sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(\sigma),\quad \sigma\leqslant 0, \tag{74}$$

где $R_0^{(-)}f(\sigma):=f(\varphi_1(v_*,x_*)+R_0^{(-)}u,v_*,x_*,0)-f(\varphi_1(v_*,x_*),v_*,x_*,0)$, величина $b(0)$ определена в (68), $b(0)>0$ (это существенно для поведения функции $R_0^{(-)}u(\sigma)$).

Чтобы получить граничное условие для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ при $\sigma = 0$, подставим выражение (26) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ в третье краевое условие из (11). Получим равенство, аналогичное (53):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(-)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}u(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} R_i^{(-)}u(0) = \varphi_2(v_*, x_*), \tag{75}$$

откуда имеем $\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) + R_0^{(-)}u(0) = \varphi_2(v_*, x_*)$. Из этого равенства находим $R_0^{(-)}u(0)$. Так как $\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) = \varphi_1(v_*, x_*)$ (см. (51) и (54)), то

$$R_0^{(-)}u(0) = \varphi_2(v_*, x_*) - \varphi_1(v_*, x_*). \tag{76}$$

В качестве второго граничного условия для функции $R_0^{(-)}u(\sigma)$ и также для остальных функций $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots$, возьмём стандартное условие на бесконечности:

$$R_i^{(-)}u(-\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{77}$$

Задача (73), (76), (77) для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma} = \left(2 \int\limits_0^{R_0^{(-)}u} h^{(-)}(\varphi_1(v_*, x_*) + s, v_*, x_*)(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b(0)s)ds\right)^{1/2}, \quad \sigma \leqslant 0, \tag{78}$$

с начальным условием (76). Уравнение (78) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (76) является возрастающей функцией (от нуля при $\sigma = -\infty$ до величины $(\varphi_2(v_*, x_*) - \varphi_1(v_*, x_*))$ при $\sigma = 0$) и имеет двустороннюю оценку (см. [5]):

$$c_1 R_{\kappa_1}(\sigma, \varepsilon) \leqslant R_0^{(-)}u(\sigma) \leqslant c_2 R_{\kappa_2}(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{79}$$

где c_1, c_2, κ_1, κ_2 – не зависящие от ε постоянные, $c_2 \geqslant c_1 > 0$, $\kappa_1 \geqslant \kappa_2 > 0$, а

$$R_\kappa(\sigma, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)[1 + \varepsilon^{1/4} - \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)]^{-2}, \quad \kappa > 0, \quad \sigma \leqslant 0, \tag{80}$$

– функция, которая будет эталонной (оценочной) функцией для всех функций $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. каждая из этих функций будет иметь оценку вида

$$|R_i^{(-)}u(\sigma)| \leqslant cR_\kappa(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{81}$$

с различными, вообще говоря, числами c и κ для различных i. Для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ эта оценка следует из (79).

Несложный анализ выражения (80) показывает, что функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ монотонно стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$, причём убывание носит различный характер на трёх промежутках (в трёх зонах) полупрямой $\sigma \leqslant 0$.

Первая зона – отрезок $[-\varepsilon^{-\gamma} \leqslant \sigma \leqslant 0]$, где в качестве γ можно взять любое число из интервала $(0, 1/4)$, сколь угодно близкое к $1/4$. В этой зоне функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ убывает с уменьшением σ (т.е. с ростом $|\sigma|$) степенным образом: $R_\kappa(\sigma, \varepsilon) = O(1/(1 + \sigma^2))$ при фиксированном ε.

Вторая (переходная) зона – отрезок $[-\varepsilon^{-1/4} \leqslant \sigma \leqslant -\varepsilon^{-\gamma}]$. Здесь происходит постепенное изменение масштаба внутрислойной переменной и характера убывания функции $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ от степенного убывания по отношению к σ до экспоненциального по отношению к новой внутрислойной переменной $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$.

Третья зона – полупрямая $\sigma \leqslant -\varepsilon^{-1/4}$. Здесь функция $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ убывает экспоненциально по отношению к внутрислойной переменной η, именно: $R_\kappa(\sigma,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\exp(\kappa\eta))$, $\eta \leqslant -1$.

Отметим, что если формировать уравнение для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ стандартным способом, то в правой части уравнения (73) не будет слагаемого $2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u$, и тогда на всей полупрямой $\sigma \leqslant 0$ функция $R_0^{(-)}u(\sigma)$ будет иметь оценку $R_0^{(-)}u(\sigma) = O(1/(1+\sigma^2))$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (10), (11) в окрестности точки $x = x_*$.

Отметим также, что функция $R_0^{(-)}u$ зависит не только от σ, но и от ε, и то же самое имеет место для всех других внутрислойных функций, но для упрощения записи их зависимость от ε указывать не будем, т.е. будем писать $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$ вместо $R_i^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R_i^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$.

Итак, функция $R_0^{(-)}u(\sigma)$ определена, и, значит, правая часть в уравнении (74) для $R_0^{(-)}v(\sigma)$ является теперь известной функцией, имеющей, очевидно, оценку

$$|\sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(\sigma)| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}R_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0. \tag{82}$$

Для однозначного определения функции $R_0^{(-)}v(\sigma)$ (и так же будет для остальных функций $R_i^{(-)}v(\sigma)$) достаточно задать стандартное условие на бесконечности:

$$R_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{83}$$

Решение уравнения (74) с условием $R_0^{(-)}v(-\infty) = 0$ имеет вид

$$R_0^{(-)}v(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{s} \sqrt{\varepsilon}R_0^{(-)}f(t)\,dt\,ds, \tag{84}$$

откуда в силу (82) следует оценка

$$|R_0^{(-)}v(\sigma)| \leqslant cR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0. \tag{85}$$

Отметим, что нестандартность формирования уравнения (74) для функции $R_0^{(-)}v(\sigma)$, состоящая в том, что правая часть в (74) содержит множитель $\sqrt{\varepsilon}$, имела целью получить для $R_0^{(-)}v(\sigma)$ оценку (85). Кроме того, из (84) следует, что

$$\frac{dR_0^{(-)}v}{d\sigma}(0) = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{86}$$

Эта оценка понадобится в п. 4.

Так как функция $R_0^{(-)}v(\sigma)$ найдена, то известно число $R_0^{(-)}v(0)$, входящее в граничное условие для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ (см. (71)). Это даёт возможность определить функцию $Q_2^{(-)}v(\tau)$. Она выражается формулой

$$Q_2^{(-)}v(\tau) = \Phi(\tau)\biggl(\Phi^{-1}(0)Q_2^{(-)}v(0) + \int\limits_0^{\tau}\Phi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^{s}\Phi(t)q_2(t)\,dt\,ds\biggr),$$

где $\Phi(\tau) := dQ_0^{(-)}v(\tau)/d\tau$, $Q_2^{(-)}v(0) = -\bar{v}_1^{(-)}(x_*) - R_0^{(-)}v(0)$ (см. (71)). Отсюда для $Q_2^{(-)}v(\tau)$ следует экспоненциальная оценка вида (57). Зная $Q_2^{(-)}v(\tau)$, по формуле (67) находим функцию $Q_2^{(-)}u(\tau)$, для которой, очевидно, также справедлива оценка вида (57).

Таким образом, на данном этапе определены все главные члены внутрислойных рядов (48) и (49), причём они находились в следующем порядке: $Q_0^{(-)}v \to Q_0^{(-)}u \to R_0^{(-)}u \to R_0^{(-)}v$, и, кроме того, найдены функции $Q_1^{(-)}v$, $Q_1^{(-)}u$ (см. (59)) и $Q_2^{(-)}v$, $Q_2^{(-)}u$.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ внутрислойные функции определяются в таком же порядке, как и для $i = 0$. При $i = 3, 4, \ldots$ для $Q_i^{(-)}u(\tau)$, $Q_i^{(-)}v(\tau)$ получается линейная система уравнений, которая приводится к виду, аналогичному (67), (70):

$$Q_i^{(-)}u = \hat{\varphi}_{1v}(x_*, \tau)Q_i^{(-)}v + \psi_i(\tau), \tag{87}$$

$$\frac{d^2Q_i^{(-)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_{1v}(x_*, \tau)Q_i^{(-)}v + q_i(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{88}$$

где функции $\psi_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(-)}u(\tau)$, $Q_j^{(-)}v(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (57).

Граничные условия для функции $Q_i^{(-)}v(\tau)$ извлекаются из (53), (55):

$$Q_i^{(-)}v(0) = -(\bar{v}_{i/2}^{(-)}(x_*) + R_{i-2}^{(-)}v(0)), \quad Q_i^{(-)}v(-\infty) = 0, \tag{89}$$

где $\bar{v}_{i/2}^{(-)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число.

Решение задачи (88), (89) задаётся формулой, аналогичной выражению для $Q_2^{(-)}v(\tau)$, а функция $Q_i^{(-)}u(\tau)$ определяется после этого формулой (87). Из этих формул для функций $Q_i^{(-)}v(\tau)$, $Q_i^{(-)}u(\tau)$ получаются оценки вида (57).

Для $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$ при $i = 1, 2, \ldots$ из системы (72) извлекается нестандартным способом линейная система уравнений

$$\frac{d^2R_i^{(-)}u}{d\sigma^2} = K(\sigma, \varepsilon)R_i^{(-)}u + r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon), \tag{90}$$

$$\frac{d^2R_i^{(-)}v}{d\sigma^2} = \sqrt{\varepsilon}\tilde{f}_u(\sigma)R_i^{(-)}u(\sigma) + \rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{91}$$

где

$$K(\sigma, \varepsilon) := 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}b(0)) + \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + 2\sqrt{\varepsilon}b(0))R_0^{(-)}u(\sigma), \tag{92}$$

$$\tilde{h}^{(-)}(\sigma) := h^{(-)}(\varphi_1(v_*, x_*) + R_0^{(-)}u(\sigma), v_*, x_*),$$

$$\tilde{h}_u^{(-)}(\sigma) := \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(\varphi_1(v_*, x_*) + R_0^{(-)}u(\sigma), v_*, x_*),$$

обозначения $\tilde{h}_v^{(-)}(\sigma)$, $\tilde{f}_u(\sigma)$, $\tilde{f}_v(\sigma)$ имеют аналогичный смысл, а функции $r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ выражаются рекуррентно через $R_j^{(-)}u(\sigma)$, $R_j^{(-)}v(\sigma)$ с номерами $j < i$ и формируются с помощью нестандартного алгоритма так, чтобы они имели оценку

$$|r_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)| + |\rho_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon)| \leqslant c(R_\kappa^2(\sigma, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}R_\kappa(\sigma, \varepsilon)), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{93}$$

функция $R_\kappa(\sigma, \varepsilon)$ в которой определена в (80). При этом в процессе формирования этих функций используется переменная $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$, а в уравнениях (90) и (91) она заменяется на $\varepsilon^{1/4}\sigma$ (более детальное описание нестандартного алгоритма см. в [3–6]).

Запишем, например, выражения для $r_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\rho_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$:

$$r_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \left(\tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}(0) + \tilde{h}_v^{(-)}(\sigma)\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0)\right)\varepsilon^{1/4}\sigma[(R_0^{(-)}u(\sigma))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b(0)R_0^{(-)}u(\sigma)],$$

$$\rho_1^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \left\{(\tilde{f}_u(\sigma) - \hat{f}_u(x_*, 0))\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}(0) + (\tilde{f}_v(\sigma) - \hat{f}_v(x_*, 0))\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0)\right\}\varepsilon^{3/4}\sigma.$$

Эти функции имеют, очевидно, оценку вида (93).

Граничные условия для функции $R_i^{(-)}u(\sigma)$ следуют из (75) и (77):

$$R_i^{(-)}u(0) = -(\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*) + Q_i^{(-)}u(0)), \quad R_i^{(-)}u(-\infty) = 0, \tag{94}$$

где $\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число, а для функции $R_i^{(-)}v(\sigma)$ имеем граничное условие (83).

Решение задачи (90), (94) выражается формулой

$$R_i^{(-)}u(\sigma) = \Psi(\sigma)\biggl(\Psi^{-1}(0)R_i^{(-)}u(0) + \int\limits_0^\sigma \Psi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s \Psi(t)r_i^{(-)}(t,\varepsilon)\,dt\,ds\biggr), \tag{95}$$

где $\Psi(\sigma) := dR_0^{(-)}u(\sigma)/d\sigma$, значение $R_i^{(-)}u(0)$ определено в (94). Из представления (95) для $R_i^{(-)}u(\sigma)$ следует оценка (81).

Так как функция $R_i^{(-)}u(\sigma)$ найдена, то правая часть в уравнении (91) является теперь известной функцией, имеющей оценку вида (93). Решение задачи (91), (83) выражается формулой, аналогичной (84):

$$R_i^{(-)}v(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^\sigma\int\limits_{-\infty}^s (\sqrt{\varepsilon}\tilde{f}_u(t)R_i^{(-)}u(t) + \rho_i^{(-)}(t,\varepsilon))dt\,ds,$$

откуда следует оценка $|R_i^{(-)}v(\sigma)| \leqslant cR_\kappa(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma \leqslant 0$.

Итак, внутрислойные ряды (48) и (49) построены, и их коэффициенты имеют оценки вида (57) и (81). Из этих оценок следует, что внутренний слой в левой полуокрестности точки x_* является четырёхзонным. Первые две зоны определены при описании поведения эталонной функции $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ – это отрезки $[-\varepsilon^{-\gamma} \leqslant \sigma \leqslant 0]$ и $[-\varepsilon^{-1/4} \leqslant \sigma \leqslant -\varepsilon^{-\gamma}]$, т.е. $[x_* - \varepsilon^{1-\gamma} \leqslant x \leqslant x_*]$ и $[x_* - \varepsilon^{3/4} \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{1-\gamma}]$, где $0 < \gamma < 1/4$. В качестве третьей зоны можно взять отрезок $[x_* - \varepsilon^{5/8} \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{3/4}]$. На этом отрезке происходит экспоненциальное убывание $R^{(-)}$-функций по отношению к внутрислойной переменной η, изменяющейся от -1 до $-\varepsilon^{-1/8}$, а $Q^{(-)}$-функции почти не изменяются, так как на этом отрезке $\tau \in [-\varepsilon^{1/8}, -\varepsilon^{1/4}]$. И, наконец, в четвёртой зоне $[x_* - \delta \leqslant x \leqslant x_* - \varepsilon^{5/8}]$ $R^{(-)}$-функции являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$, а $Q^{(-)}$-функции экспоненциально убывают.

Замечание. При построении рядов $\Pi^{(-)}u$, $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}u$, $P^{(-)}v$ утверждалось, что производные всех членов внутрислойных рядов $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ и $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ будут равны нулю в точке $x = 0$. Это свойство является результатом стандартной процедуры умножения внутрислойных функций на бесконечно дифференцируемые срезающие функции (см. [2, с. 82]). Аналогичное умножение на срезающие функции произведём для членов погранслойных рядов $\Pi^{(-)}u$, $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}u$, $P^{(-)}v$, а также для погранслойных и внутрислойных функций во второй вспомогательной задаче.

3.4. Обоснование асимптотики.

3.4.1. Теорема об асимптотике решения первой вспомогательной задачи. Для обоснования построенной асимптотики нам понадобятся ещё два условия, связанные с производными функций φ, F и f.

Условие A10. Справедливы неравенства

$$\bar{\varphi}_{1v}(x) > 0 \;\text{ при }\; x \in [0,\bar{x}_0] \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(v,\bar{x}_0) > 0 \;\text{ при }\; v \in [v_1(\bar{x}_0),\bar{v}_0].$$

Чтобы сформулировать условие A11, определим кривые l_4, l_5, l_6 в пространстве переменных (u,v,x), аналогичные кривым l_1, l_2, l_3 из условия A6:

$$l_4 = \{(u,v,x)\colon \varphi_1(\bar{v}_0,\bar{x}_0) \leqslant u \leqslant \varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0), \;\; v = \bar{v}_0, \;\; x = \bar{x}_0\},$$

$$l_5 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_1(v,\bar{x}_0), \quad v_1(\bar{x}_0) \leqslant v \leqslant \bar{v}_0, \quad x = \bar{x}_0\},$$
$$l_6 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_1(v_1(x),x), \quad v = v_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_0\}.$$

Условие A11. Имеют место неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,\bar{v}_0,\bar{x}_0,0) < 0 \ \text{ при } \ \varphi_1(\bar{v}_0,\bar{x}_0) < u \leqslant \varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) < 0 \ \text{ при } \ (u,v,x) \in l^{(-)} = l_4 \bigcup l_5 \bigcup l_6.$$

Отметим, что для точек v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, неравенства из условий A10 и A11 останутся верными, если в них заменить $\bar{v}_0$ на v_* и $\bar{x}_0$ на x_*.

Обозначим через $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (26) и (27):

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}u\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}u\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}u\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}u\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right), \tag{96}$$

$$V_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}v\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{2n-2}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}v\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}v\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}v\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right). \tag{97}$$

Из алгоритма построения рядов (26) и (27) следуют равенства

$$L_\varepsilon(U_n^{(-)},V_n^{(-)}) := \varepsilon^2\frac{d^2U_n^{(-)}}{dx^2} - F(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (0,x_*), \tag{98}$$

$$M_\varepsilon(V_n^{(-)},U_n^{(-)}) := \varepsilon\frac{d^2V_n^{(-)}}{dx^2} - f(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in (0,x_*), \tag{99}$$

$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon) = 0,$$
$$U_n^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(v_*,x_*), \quad V_n^{(-)}(x_*,\varepsilon) = v_* + O(\varepsilon^{(n+1)/2}).$$

Они означают, что ряды (26), (27) являются (пока) формальными асимптотическими рядами для задачи (10), (11).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A1–A4 и A7–A11. Тогда при произвольных v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, и любом натуральном n для всех достаточно малых ε существует решение $(u^{(-)}(x,\varepsilon), v^{(-)}(x,\varepsilon))$ задачи (10), (11), для компонент которого при каждом $m = \overline{0,n}$ имеют место представления*

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_m^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(m+1)/2}), \quad v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_m^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(m+1)/2}), \quad x \in [0,x_*]. \tag{100}$$

3.4.2. О методе доказательства теоремы 2. Докажем теорему 2 с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. построив верхнее и нижнее решения задачи (10), (11) на основе формальных асимптотических рядов (26), (27) [7]. Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (10), (11).

Определение. Две пары функций $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ и $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0,x_*)\bigcap C^{(1)}[0,x_*)\bigcap C[0,x_*]$, называются *упорядоченными верхним* и *нижним решениями* задачи (10), (11), если они удовлетворяют следующим условиям:

1° имеют место неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon)\quad\text{и}\quad\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon)\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant x_*;$$

2° выполняются неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},v)\leqslant 0\leqslant L_\varepsilon(\underline{U},v)\quad\text{при}\quad\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*,$$

$$M_\varepsilon(\overline{V},u)\leqslant 0\leqslant M_\varepsilon(\underline{V},u)\quad\text{при}\quad\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (98) и (99));

3° справедливы неравенства

$$\frac{d\overline{U}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon),\quad\frac{d\overline{V}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon),$$

$$\underline{U}(x_*,\varepsilon)\leqslant\varphi_2(v_*,x_*)\leqslant\overline{U}(x_*,\varepsilon),\quad\underline{V}(x_*,\varepsilon)\leqslant v_*\leqslant\overline{V}(x_*,\varepsilon).$$

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (10), (11), то эта задача имеет решение $u=u^{(-)}(x,\varepsilon)$, $v=v^{(-)}(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), для компонент которого верхнее и нижнее решения являются соответствующими оценками сверху и снизу:

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u^{(-)}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\quad\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v^{(-)}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\quad x\in[0,x_*].\tag{101}$$

Если функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ – невозрастающей функцией аргумента u в области

$$G_0=\{(u,v,x,\varepsilon)\colon\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\,\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\,0\leqslant x\leqslant x_*,\,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}\tag{102}$$

(т.е. функции F и f удовлетворяют в области G_0 условию квазимонотонности), то для выполнения условия 2° из определения достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})\leqslant 0\leqslant L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}),\quad x\in(0,x_*),\tag{103}$$

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})\leqslant 0\leqslant M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}),\quad x\in(0,x_*).\tag{104}$$

Мы будем использовать это утверждение при доказательстве теоремы 2.

3.4.3. Нижнее и верхнее решения задачи (10), (11). Определим функции $\alpha(x,\tau)$ и $\beta(x,\tau)$ как решение СЛАУ

$$\alpha-\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)\beta=A,\quad\hat{f}_u(x,\tau)\alpha+\hat{f}_v(x,\tau)\beta=A,\tag{105}$$

где функции $\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)$ и $\hat{f}_u(x,\tau)$, $\hat{f}_v(x,\tau)$ заданы равенствами (62) и (64), $A>0$ – число, которое будет выбрано ниже достаточно большим. Определитель этой системы равен

$$\hat{f}_v(x,\tau)+\hat{f}_u(x,\tau)\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)=\hat{g}_{1v}(x,\tau):=\frac{\partial g_1}{\partial v}(\bar{v}_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x).\tag{106}$$

Для входящих в равенство (106) производных имеют место при $0\leqslant x\leqslant x_*$, $\tau\leqslant 0$ представления

$$\hat{f}_u(x,\tau)=\hat{f}_u(x_*,\tau)+\bar{f}_u(x)-\bar{f}_u(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}),\tag{107}$$

$$\hat{f}_v(x,\tau)=\hat{f}_v(x_*,\tau)+\bar{f}_v(x)-\bar{f}_v(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}),\tag{108}$$

$$\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)=\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)+\bar{\varphi}_{1v}(x)-\bar{\varphi}_{1v}(x_*)+O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\hat{g}_{1v}(x,\tau) = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau) + \bar{g}_{1v}(x) - \bar{g}_{1v}(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon});$$

функции $\bar{f}_u(x)$, $\bar{f}_v(x)$, $\bar{\varphi}_{1v}(x)$, $\bar{g}_{1v}(x)$ определены равенствами (31), (32).

Из этих представлений для $\hat{f}_u(x,\tau)$ (в силу условия A11), для $\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)$ (в силу условия A10) и для $\hat{g}_{1v}(x,\tau)$ (в силу условия A8) при достаточно малых ε следуют оценки

$$\hat{f}_u(x,\tau) \leqslant c < 0, \quad \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0, \quad \hat{g}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0. \tag{109}$$

В свою очередь, из (106) и этих оценок вытекает аналогичная оценка для $\hat{f}_v(x,\tau)$:

$$\hat{f}_v(x,\tau) \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0. \tag{110}$$

Числа c в каждом из неравенств (109) и в неравенстве (110), вообще говоря, различны, но все они не зависят от ε.

Так как $\hat{g}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0$, то система (105) имеет единственное решение:

$$\alpha(x,\tau) = (\hat{f}_v(x,\tau) + \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\hat{g}_{1v}^{-1}(x,\tau)A, \quad \beta(x,\tau) = (1 - \hat{f}_u(x,\tau))\hat{g}_{1v}^{-1}(x,\tau)A, \tag{111}$$

для которого в силу (109) и (110) справедливы оценки $0 < c_1 A \leqslant \alpha(x,\tau) \leqslant c_2 A$, $0 < c_1 A \leqslant \beta(x,\tau) \leqslant c_2 A$ при $0 \leqslant x \leqslant x_*$, $\tau \leqslant 0$, где постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε.

Нам понадобятся ещё оценки производных:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\alpha\left(x, \frac{x - x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x,\tau) + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial\tau}(x,\tau) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau^2}(x,\tau) = O\left(\frac{A}{\varepsilon}\right), \tag{112}$$

$$\varepsilon\frac{d^2\beta}{dx^2} = \varepsilon\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(x,\tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial\tau}(x,\tau) + \frac{\partial^2\beta}{\partial\tau^2}(x,\tau) = Aq(\tau) + O(A)\sqrt{\varepsilon}, \tag{113}$$

где

$$|q(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad c > 0, \quad \kappa > 0, \quad \tau \leqslant 0. \tag{114}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (10), (11) построим в виде

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2}Z(x,\varepsilon), \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2}z(x,\varepsilon), \tag{115}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2}Z(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2}z(x,\varepsilon), \tag{116}$$

где $n \geqslant 2$,

$$Z(x,\varepsilon) := \alpha(x,\tau) + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau) + G(\sigma,\varepsilon) + \exp(-\xi),$$
$$z(x,\varepsilon) := \beta(x,\tau) + \gamma(\tau) - \sqrt{\varepsilon}H(\sigma,\varepsilon) + \exp(-\xi),$$

$\alpha(x,\tau)$, $\beta(x,\tau)$ – решение (111) системы (105), а функции $\gamma(\tau)$, $G(\sigma,\varepsilon)$ и $H(\sigma,\varepsilon)$, выбор которых уточним ниже, будут иметь оценки

$$0 \leqslant \gamma(\tau) \leqslant cA\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{117}$$

$$0 \leqslant G(\sigma,\varepsilon) \leqslant cAR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0, \tag{118}$$

$$0 \leqslant H(\sigma,\varepsilon) \leqslant cAR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \leqslant 0; \tag{119}$$

положительные числа c и κ не зависят от ε и, вообще говоря, различны в разных оценках.

В п. 3.4.5 мы покажем, как выбрать число A и функции γ, G, H, чтобы для всех достаточно малых ε две пары функций (115) и (116) были верхним и нижним решениями задачи (10), (11). С этой целью в следующем пункте получим некоторые представления и оценки для производных функций F и f.

3.4.4. Оценки производных функций F и f. Введём обозначения

$$\tilde{U}(x,\varepsilon) := \bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + \sqrt{\varepsilon}(\bar{u}_1^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}u(\xi) + Q_2^{(-)}u(\tau)),$$

$$\tilde{V}(x,\varepsilon) := \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + \sqrt{\varepsilon}(\bar{v}_1^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}v(\xi) + Q_2^{(-)}v(\tau)),$$

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(U_n^{(-)}(x,\varepsilon), V_n^{(-)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon), \quad n \geqslant 1, \tag{120}$$

$$\tilde{F}_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(\tilde{U}(x,\varepsilon), \tilde{V}(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

аналогичный смысл имеют обозначения $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$, $\tilde{F}_v(x,\varepsilon)$.

При оценках производных нам понадобятся равенства

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) = \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*, \quad \tau \leqslant 0, \tag{121}$$

$$\tilde{U}(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde{V}(x,\varepsilon), x) = \sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon), \tag{122}$$

где функции $a(x)$ и $b(\tau)$ определены равенствами (34) и (68).

Так как $a(x) > 0$, $b(\tau) > 0$ и $b(\tau) \to a(x_*)$ при $\tau \to -\infty$ (см. (69)), то из (122) при достаточно малых ε вытекает оценка

$$\tilde{U}(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde{V}(x,\varepsilon), x) \geqslant C\sqrt{\varepsilon} > 0. \tag{123}$$

Приступим к представлениям и оценкам производных. Начнём с очевидных равенств при $x \in [0, x_*]$:

$$f_u(x,\varepsilon) = \hat{f}_u(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{124}$$

$$f_v(x,\varepsilon) = \hat{f}_v(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{125}$$

где $\hat{f}_u(x,\tau)$ и $\hat{f}_v(x,\tau)$ определены в (64), $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ – в (80).

Рассмотрим теперь производные функции F, используя равенство (122):

$$\tilde{F}_u(x,\varepsilon) = 2h^{(-)}(\tilde{U},\tilde{V},x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V},x)) + \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(\tilde{U},\tilde{V},x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V},x))^2 - \varepsilon\frac{\partial F_1}{\partial u}(\tilde{U},\tilde{V},x,\varepsilon) =$$

$$= 2h^{(-)}(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), x) \times$$

$$\times \sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon) = 2\hat{h}(x,\tau)\sqrt{\varepsilon}(a(x) - a(x_*) + b(\tau)) + O(\varepsilon).$$

Отсюда (в силу (123)) следует оценка

$$\tilde{F}_u(x,\varepsilon) \geqslant c_0\sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [0, x_*]. \tag{126}$$

Для $\tilde{F}_v(x,\varepsilon)$ аналогичным способом получается представление

$$\tilde{F}_v(x,\varepsilon) = -\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)\tilde{F}_u(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \tag{127}$$

откуда в силу (126) и неравенства $\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau) \geqslant c > 0$ (см. (109)) вытекает оценка

$$\tilde{F}_v(x,\varepsilon) \leqslant -c_1\sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [0, x_*]. \tag{128}$$

Чтобы получить представления для производных $F_u(x,\varepsilon)$ и $F_v(x,\varepsilon)$ (обозначения см. в (120)), воспользуемся равенствами (при $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant x_*$)

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \tilde{U}(x,\varepsilon) + R_0^{(-)}u(\sigma) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}),$$

$$V_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \tilde{V}(x,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{129}$$

Используя их, получаем

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varphi_1(V_n^{(-)}(x,\varepsilon), x) = \tilde{U}(x,\varepsilon) - \varphi_1(\tilde{V}(x,\varepsilon), x) +$$

$$+ R_0^{(-)}u(\sigma) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{130}$$

Отсюда с учётом (122) получается более грубая оценка для этой разности:

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) - \varphi_1(V_n^{(-)}(x,\varepsilon),x) = O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{131}$$

С помощью равенств (129)–(131) оценим разность $F_u(x,\varepsilon) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon) = 2h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V},x) + R_0^{(-)}u + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4})) +$$

$$+ \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)(O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon}))^2 - 2h^{(-)}(\tilde{U},\tilde{V},x)(\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V},x)) + O(\varepsilon) =$$

$$= 2[h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x) - h^{(-)}(\tilde{U},\tilde{V},x)](\tilde{U} - \varphi_1(\tilde{V},x)) +$$

$$+ 2h^{(-)}(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}, x)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}) =$$

$$= 2[O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4})]O(\sqrt{\varepsilon}) + 2[\hat{h}(x,\tau) + O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon})]R_0^{(-)}u +$$

$$+ O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}) = 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}).$$

Отсюда следует, что

$$F_u(x,\varepsilon) = \tilde{F}_u(x,\varepsilon) + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{132}$$

Аналогично получается равенство

$$F_v(x,\varepsilon) = \tilde{F}_v(x,\varepsilon) - 2\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}). \tag{133}$$

Сравнивая равенства (132) и (133) и учитывая представление (127), приходим к равенству

$$F_v(x,\varepsilon) = -\hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)F_u(x,\varepsilon) + O(R_\kappa^2) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{134}$$

Запишем также более грубую оценку, которая следует из (132):

$$F_u(x,\varepsilon) = O(R_\kappa) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{135}$$

Наряду с полученными представлениями и оценками, нам понадобится ещё одно представление для производной $F_u(x,\varepsilon)$. Оно связано с функцией $K(\sigma,\varepsilon)$ (см. (92)). Преобразуем разность $F_u(x,\varepsilon) - K(\sigma,\varepsilon)$ следующим образом:

$$F_u(x,\varepsilon) - K(\sigma,\varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) + O(\varepsilon^{1/4}), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), x, \varepsilon) -$$

$$- 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}b(0)) - \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma) + 2\sqrt{\varepsilon}b(0))R_0^{(-)}u(\sigma) =$$

$$= 2h^{(-)}(M)(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)) +$$

$$+ \frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma) - \varphi_1(\bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x))^2 -$$

$$- 2\tilde{h}^{(-)}(\sigma)R_0^{(-)}u(\sigma) - \tilde{h}_u^{(-)}(\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma))^2 + O(\varepsilon^{1/4}),$$

где $M := (\bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\tau) + R_0^{(-)}u(\sigma), \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\tau), x)$.

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями $R_0^{(-)}u(\sigma)$:

$$F_u(x,\varepsilon)-K(\sigma,\varepsilon)=\left[\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)-\tilde h_u^{(-)}(\sigma)\right](R_0^{(-)}u(\sigma))^2+\left[2h^{(-)}(M)-2\tilde h^{(-)}(\sigma)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))\right]R_0^{(-)}u(\sigma)+$$

$$+\left[2h^{(-)}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(\bar u_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}u(\tau)-\varphi_1(\bar v_0^{(-)}(x)+Q_0^{(-)}v(\tau),x))^2\right]+O(\varepsilon^{1/4}).$$

Тогда, используя равенство (121) и заменяя x на $x_*+\varepsilon\sigma$ и τ на $\sqrt{\varepsilon}\sigma$ в координатах точки M, получаем оценку

$$F_u(x,\varepsilon)-K(\sigma,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)(R_0^{(-)}u(\sigma))^2+\left[O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)+2\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)O(\sqrt{\varepsilon})\right]R_0^{(-)}u(\sigma)+$$

$$+\left[2h^{(-)}(M)O(\sqrt{\varepsilon})+\frac{\partial h^{(-)}}{\partial u}(M)(O(\sqrt{\varepsilon}))^2\right]+O(\varepsilon^{1/4}),$$

а поскольку $O(\sqrt{\varepsilon}\sigma)R_0^{(-)}u(\sigma)=O(\varepsilon^{1/4})$ при $\sigma\leqslant 0$ (это следует из оценки (79)), то $F_u(x,\varepsilon)-$ $-K(\sigma,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/4})$ и, значит,

$$F_u(x,\varepsilon)=K(\sigma,\varepsilon)+O(\varepsilon^{1/4}),\quad x\in[0,x_*]. \tag{136}$$

3.4.5. Проверка выполнения условий 1°–3° определения. Пусть теперь в формулах (115) и (116) $n\geqslant 2$. Покажем, что число A и функции $\gamma(\tau)$, $G(\sigma,\varepsilon)$, $H(\sigma,\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам (117)–(119), можно выбрать так, что пары функций $(\overline{U},\overline{V})$ и $(\underline{U},\underline{V})$, определённые формулами (115) и (116), будут удовлетворять для достаточно малых ε условиям 1°–3° определения, т.е. будут верхним и нижним решениями задачи (10), (11).

Условие 1° (т.е. условие упорядоченности) очевидно выполнено.

Перейдём к проверке условия 2°. Заметим, что функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу условия А11) и $F(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу неравенства (128) и условия А11) удовлетворяют условию квазимонотонности для достаточно малых ε в области G_0 (см. (102), где $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ определены в (115) и (116)), поэтому для выполнения условия 2° достаточно, чтобы были выполнены неравенства (103) и (104).

Проверим выполнение неравенства (103) для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$. Используя формулы (115), получаем

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})=\varepsilon^2\frac{d^2\overline{U}}{dx^2}-F(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon)=\varepsilon^2\frac{d^2U_n^{(-)}}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2\alpha}{dx^2}+$$

$$+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2}{dx^2}(\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau))+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2G}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\xi}-$$

$$-F(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)=$$

$$=L_\varepsilon(U_n^{(-)},V_n^{(-)})+\varepsilon^{n/2+2}O(A/\varepsilon)+\varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2}{d\tau^2}(\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma(\tau))+\varepsilon^{n/2}\frac{d^2G}{d\sigma^2}+\varepsilon^{n/2+1}e^{-\xi}-$$

$$-[F(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat\varphi_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)-F(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon)]=$$

$$=O(\varepsilon^{(n+1)/2})+O(A)\varepsilon^{n/2+1}+\varepsilon^{n/2}\frac{d^2G}{d\sigma^2}-[\ldots]. \tag{137}$$

При записи этих равенств были использованы равенства (98), (112) и априорное предположение о том, что функции $|d\gamma/d\tau|$ и $|d^2\gamma/d\tau^2|$ имеют такие же оценки, как и сама функция $\gamma(\tau)$ (см. (117)). Отметим, что первое слагаемое $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$ в правой части последнего равенства в (137) не зависит от A.

Преобразуем выражение в квадратных скобках, используя равенство (134), первое равенство в (105) и учитывая, что функции α, β, γ, G и H являются величинами порядка $O(A)$ (см. (111) и (117)–(119)):

$$[\ldots] = F_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} + F_v(x,\varepsilon)(\beta + \gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} - F_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n =$$

$$= F_u(x,\varepsilon)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau)F_u(x,\varepsilon)(\beta + \gamma + e^{-\xi})\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} +$$

$$+ O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n = F_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} + F_u(x,\varepsilon)(\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\gamma\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ F_u(x,\varepsilon)(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} + F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Рассмотрим по отдельности первые четыре слагаемых в правой части последнего равенства. В первом слагаемом используем формулу (132) для $F_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} = (\tilde{F}_u(x,\varepsilon) + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma) + O(R_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)) + \varepsilon^{1/4}O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\varepsilon^{3/4}))A\varepsilon^{n/2} =$$

$$= \tilde{F}_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} + 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4}.$$

Во втором слагаемом используем формулу (135) и оценку (117):

$$F_u(x,\varepsilon)(\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))\gamma\varepsilon^{n/2} = (O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))O(\sqrt{\varepsilon}\tau)\gamma\varepsilon^{n/2} =$$

$$= O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A)\varepsilon^{n/2+1}.$$

В третьем слагаемом снова воспользуемся формулой (135) и учтём, что $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)e^{-\xi} = o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$:

$$F_u(x,\varepsilon)(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} = (O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(1 - \hat{\varphi}_{1v}(x,\tau))e^{-\xi}\varepsilon^{n/2} = O(\varepsilon^{(n+1)/2}).$$

В четвёртом слагаемом используем представление (136) для $F_u(x,\varepsilon)$:

$$F_u(x,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} = K(\sigma,\varepsilon)G\varepsilon^{n/2} + O(\varepsilon^{n/2+1/4})G.$$

Возвращаемся теперь к выражению для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$ из (137), используя полученные равенства, оценку (126) и неравенство $|O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))| \leqslant c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)$:

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \tilde{F}_u(x,\varepsilon)A\varepsilon^{n/2} - 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ \left(\frac{d^2G}{d\sigma^2} - K(\sigma,\varepsilon)G + O(AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon))\right)\varepsilon^{n/2} + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n \leqslant$$

$$\leqslant O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - c_0A\varepsilon^{(n+1)/2} - 2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2} + \left(\frac{d^2G}{d\sigma^2} - K(\sigma,\varepsilon)G + c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon)\right)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4} + O(A)\varepsilon^{n/2+3/4} + O(A^2)\varepsilon^n. \qquad (138)$$

Определим функцию $G(\sigma,\varepsilon)$ как решение краевой задачи

$$\frac{d^2G}{d\sigma^2}=K(\sigma,\varepsilon)G-c_3AR_\kappa^2(\sigma,\varepsilon),\quad \sigma<0;\quad G(0,\varepsilon)=0,\quad G(-\infty,\varepsilon)=0.$$

Тогда

$$G(\sigma,\varepsilon)=-c_3A\Psi(\sigma)\int\limits_0^\sigma\Psi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s\Psi(t)R_\kappa^2(t,\varepsilon)\,dt\,ds,$$

где $\Psi(\sigma):=dR_0^{(-)}u(\sigma)/d\sigma$. Отсюда следует оценка (118).

Из неравенства (138) следует, что

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})\leqslant O(\varepsilon^{(n+1)/2})-c_0A\varepsilon^{(n+1)/2}-2\hat{h}(x,\tau)R_0^{(-)}u(\sigma)A\varepsilon^{n/2}+$$
$$+O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2+1/4}+O(A)\varepsilon^{n/2+3/4}+O(A^2)\varepsilon^n. \tag{139}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (139) не зависит от A, поэтому сумму первых двух слагаемых можно сделать отрицательной за счёт выбора достаточно большого A. При фиксированном A сумма третьего и четвёртого слагаемых также будет отрицательной при достаточно малых ε в силу оценок (79). Так как $n\geqslant 2$, то пятое и шестое слагаемые имеют более высокий порядок малости по ε, чем первые четыре и, значит, при достаточно малых ε не изменят знака всей суммы в правой части (139), т.е. будет выполнено неравенство для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$ из (103):

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})\leqslant 0,\quad x\in(0,x_*).$$

Проверим выполнение неравенства (104) для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$:

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})=\varepsilon\frac{d^2\overline{V}}{dx^2}-f(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon)=\varepsilon\frac{d^2V_n^{(-)}}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2\beta}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2\gamma}{dx^2}-$$
$$-\varepsilon^{(n+3)/2}\frac{d^2H}{dx^2}+\varepsilon^{n/2+1}\frac{d^2}{dx^2}e^{-\xi}-f(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),$$
$$V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)=M_\varepsilon(V_n^{(-)},U_n^{(-)})+\varepsilon^{n/2}(Aq(\tau)+O(A)\sqrt{\varepsilon})+$$
$$+\varepsilon^{n/2}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}-\varepsilon^{(n-1)/2}\frac{d^2H}{d\sigma^2}+\varepsilon^{n/2}e^{-\xi}-[f(U_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\alpha+\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi}),$$
$$V_n^{(-)}+\varepsilon^{n/2}(\beta+\gamma-\sqrt{\varepsilon}H+e^{-\xi}),x,\varepsilon)-f(U_n^{(-)},V_n^{(-)},x,\varepsilon)]=$$
$$=O(\varepsilon^{n/2})+\varepsilon^{n/2}\left(Aq(\tau)+\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}\right)-\varepsilon^{(n-1)/2}\frac{d^2H}{d\sigma^2}+O(A)\varepsilon^{(n+1)/2}-[\ldots]. \tag{140}$$

При записи этих равенств были использованы равенства (99) и (113). Отметим, что первое слагаемое $O(\varepsilon^{n/2})$ в правой части последнего равенства в (140) не зависит от A.

Преобразуем выражение в квадратных скобках, используя полученную оценку

$$G=O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))$$

и априорную оценку $H=O(A)$, которая следует из (119). Имеем

$$[\ldots]=f_u(x,\varepsilon)(\alpha+\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma+G+e^{-\xi})\varepsilon^{n/2}+f_v(x,\varepsilon)(\beta+\gamma+e^{-\xi})\varepsilon^{n/2}-$$
$$-f_v(x,\varepsilon)H\varepsilon^{(n+1)/2}+O(A^2)\varepsilon^n=$$
$$=f_u(x,\varepsilon)(\alpha+\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2}+f_v(x,\varepsilon)(\beta+\gamma)\varepsilon^{n/2}+$$
$$+O(\varepsilon^{n/2})+O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2}+O(A)\varepsilon^{(n+1)/2}+O(A^2)\varepsilon^n.$$

Продолжим преобразование этого выражения, используя формулы (124) и (125):

$$[\ldots] = (\hat{f}_u(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ (\hat{f}_v(x,\tau) + O(R_\kappa(\sigma,\varepsilon)) + O(\sqrt{\varepsilon}))(\beta + \gamma)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n =$$

$$= \hat{f}_u(x,\tau)(\alpha + \hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau)\gamma)\varepsilon^{n/2} + \hat{f}_v(x,\tau)(\beta+\gamma)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n =$$

$$= A\varepsilon^{n/2} + \{\hat{f}_u(x,\tau)\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) + \hat{f}_v(x,\tau)\}\gamma\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ O(\varepsilon^{n/2}) + O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Выражение в фигурных скобках преобразуем, используя формулы (106)–(108):

$$\{\ldots\} = (\hat{f}_u(x_*,\tau) + \bar{f}_u(x) - \bar{f}_u(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon}))\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) + \hat{f}_v(x_*,\tau) + \bar{f}_v(x) - \bar{f}_v(x_*) +$$

$$+ O(\sqrt{\varepsilon}) = \hat{f}_u(x_*,\tau)\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) + \hat{f}_v(x_*,\tau) + (\bar{f}_u(x) - \bar{f}_u(x_*))\hat{\varphi}_{1v}(x_*,\tau) +$$

$$+ \bar{f}_v(x) - \bar{f}_v(x_*) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Воспользовавшись оценкой (117), заключаем, что

$$\{\hat{g}_{1v}(x_*,\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau) + O(\sqrt{\varepsilon})\}\gamma\varepsilon^{n/2} = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau)\gamma\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2}.$$

Возвращаемся теперь к выражению (140) для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$, используя полученные равенства, оценку $|q(\tau)| \leqslant c_4\exp(\kappa\tau)$ (см. (114)) и неравенство $|O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon))| \leqslant c_5 AR_\kappa(\sigma,\varepsilon)$:

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) = O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + \left(Aq(\tau) + \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \hat{g}_{1v}(x_*,\tau)\gamma\right)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ \left(\sqrt{\varepsilon}O(AR_\kappa(\sigma,\varepsilon)) - \frac{d^2H}{d\sigma^2}\right)\varepsilon^{(n-1)/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n \leqslant$$

$$\leqslant O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + \left(c_4A\exp(\kappa\tau) + \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \hat{g}_{1v}(x_*,\tau)\gamma\right)\varepsilon^{n/2} +$$

$$+ \left(\sqrt{\varepsilon}c_5AR_\kappa(\sigma,\varepsilon) - \frac{d^2H}{d\sigma^2}\right)\varepsilon^{(n-1)/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n. \qquad (141)$$

Определим функции $\gamma(\tau)$ и $H(\sigma,\varepsilon)$ как решения задач

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = \hat{g}_{1v}(x_*,\tau)\gamma - c_4A\exp(\kappa\tau), \quad \tau < 0; \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(-\infty) = 0$$

и

$$\frac{d^2H}{d\sigma^2} = \sqrt{\varepsilon}c_5AR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma < 0; \quad H(-\infty,\varepsilon) = 0.$$

Тогда

$$\gamma(\tau) = -c_4A\Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-2}(s)\int\limits_{-\infty}^s \Phi(t)\exp(\kappa t)\,dt\,ds,$$

где $\Phi(\tau) := dQ_0^{(-)}v(\tau)/d\tau$, и

$$H(\sigma,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}c_5 A \int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{s} R_\kappa(t,\varepsilon)\,dt\,ds,$$

откуда следуют оценки (117) и (119).

В результате из неравенства (141) следует, что

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) \leqslant O(\varepsilon^{n/2}) - A\varepsilon^{n/2} + O(A)\varepsilon^{(n+1)/2} + O(A^2)\varepsilon^n.$$

Очевидно, что при достаточно большом A и достаточно малых ε выполнено неравенство для $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$ из (104):

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) \leqslant 0, \quad x \in (0, x_*).$$

Таким же образом доказывается, что функции $\underline{U}$, $\underline{V}$, определённые в (116), при достаточно большом A и достаточно малых ε удовлетворяют неравенствам для $L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V})$ и $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ из (103) и (104). Итак, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2° из определения.

Несложно проверяется, что эти функции удовлетворяют также условию 3° из определения, и, значит, две пары функций $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ и $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, определённые формулами (115) и (116), являются для достаточно большого A и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (10), (11).

3.4.6. Завершение доказательства теоремы 2. Из существования верхнего и нижнего решений задачи (10), (11) следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $(u^{(-)}(x,\varepsilon), v^{(-)}(x,\varepsilon))$, удовлетворяющее неравенствам (101), а так как $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от $U_n^{(-)}$, $V_n^{(-)}$ на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2})$, то и решение $(u^{(-)}(x,\varepsilon), v^{(-)}(x,\varepsilon))$ отличается от $(U_n^{(-)}, V_n^{(-)})$ на величины того же порядка, т.е.

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{142}$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если записать равенства (142) для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $x \in [0, x_*]$. Тогда для $n \geqslant 1$ получим равенства

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{143}$$

Таким же способом из равенств (143) получаются аналогичные равенства для $m = \overline{0, n-1}$, и, значит, для каждого $m = \overline{0, n}$ справедливы равенства (100). Теорема 2 доказана.

Следствие 2.1. *Предельным положением при* $\varepsilon \to 0$ *кривой* $l_\varepsilon^{(-)} = \{(u,v,x)\colon u = u^{(-)}(x,\varepsilon),$ $v = v^{(-)}(x,\varepsilon),\ 0 \leqslant x \leqslant x_*\}$ *(т.е. графика решения задачи (10), (11)) является кривая* $l_*^{(-)}$, *которая определяется так же, как кривая* $l^{(-)}$ *в условии A11, с заменой* $\bar{v}_0$ *на* v_* *и* $\bar{x}_0$ *на* x_*.

Стандартным способом получается

Следствие 2.2. *Для производных решения задачи (10), (11) справедливы асимптотические представления*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n-1)/2}),$$

$$\frac{dv^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, x_*]. \tag{144}$$

4. Основная теорема. Решения $(u^{(-)},\ v^{(-)})$ и $(u^{(+)},\ v^{(+)})$ первой и второй вспомогательных задач зависят от v_* и x_* как от параметров. Введём обозначения, отражающие эту зависимость: $u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$.

Для любых v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно, решения $(u^{(-)},\ v^{(-)})$ и $(u^{(+)},\ v^{(+)})$ непрерывно сшиваются в точке x_*, так как (см. (11) и (13))

$$u^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=u^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=\varphi_2(v_*,x_*),$$

$$v^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=v^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=v_*.$$

Поэтому функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\quad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leqslant x\leqslant x_*,\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

будут решением исходной задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*, если в этой точке непрерывно сшиваются также и производные $du^{(-)}/dx$ и $du^{(+)}/dx$, $dv^{(-)}/dx$ и $dv^{(+)}/dx$, т.е. если

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)-\frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=0,\quad \frac{dv^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)-\frac{dv^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*)=0.\quad (145)$$

Докажем, что существует решение системы уравнений (145) относительно $v_*,\ x_*$, сколь угодно близкое к $\bar{v}_0,\ \bar{x}_0$ при достаточно малых ε. С этой целью построим сначала формальные асимптотические ряды для v_* и x_* следующим образом. Подставим в равенства (145) вместо $u^{(-)}$ и $v^{(-)}$ ряды (26) и (27), а вместо $u^{(+)}$ и $v^{(+)}$ – ряды (14) и (15) с учётом того, что производные $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю в точке x_* и, кроме того, $R_0^{(+)}v=R_1^{(+)}v=0$ (см. (18)). После умножения первого из полученных равенств на ε и второго на $\sqrt{\varepsilon}$ придём к равенствам

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(x_*)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*)-$$
$$-\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(x_*)-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dQ_i^{(+)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*)-\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dR_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*)=0,\quad (146)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*)-$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(x_*)-\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*)-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{dR_{i+2}^{(+)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*)=0,\quad (147)$$

в записи которых отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\pm)}$- и $R^{(\pm)}$-функции зависят от v_* и x_* как от параметров.

Асимптотические ряды для v_* и x_* будем строить в виде

$$v_*=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}v_i,\quad x_*=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}x_i.\quad (148)$$

Подставим ряды (148) в равенства (146), (147) и разложим затем левые части этих равенств в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, после чего будем приравнивать нулю коэффициенты разложений. Учитывая оценку (86), в нулевом порядке получим следующие уравнения относительно $v_0,\ x_0$:

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma}(0,v_0,x_0)=\frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma}(0,v_0,x_0),\quad \frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0,v_0,x_0)=\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0,v_0,x_0).$$

Подставляя в них выражения (19), (20), (56), (78) для производных, приходим к системе уравнений

$$\tilde{I}(v_0,x_0) := \left(2\int\limits_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du\right)^{1/2} - \left(2\int\limits_{\varphi_3(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du\right)^{1/2} = 0,$$

$$\tilde{J}(v_0,x_0) := \left(2\int\limits_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v,x_0)\,dv\right)^{1/2} - \left(2\int\limits_{v_3(x_0)}^{v_0} g_3(v,x_0)\,dv\right)^{1/2} = 0. \tag{149}$$

Эта система эквивалентна системе (5), (6), которая в силу условия A4 имеет решение $v_0 = \bar{v}_0,\ \ x_0 = \bar{x}_0$. В следующих порядках при $i \geqslant 1$ будут получаться СЛАУ вида

$$\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)v_i + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)x_i = a_i, \quad \frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)v_i + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)x_i = b_i, \tag{150}$$

где числа a_i и b_i рекуррентно выражаются через v_j и x_j с номерами $j < i$, которые на i-м шаге уже известны. Определителем этой системы является якобиан $\left.\dfrac{D(\tilde{I},\tilde{J})}{D(v_0,x_0)}\right|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}}$, равный произведению положительного множителя на якобиан $\left.\dfrac{D(I,J)}{D(v_0,x_0)}\right|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}}$, который отличен от нуля (см. (8)). Поэтому для каждого $i \geqslant 1$ СЛАУ (150) имеет единственное решение $v_i = \bar{v}_i,\ \ x_i = \bar{x}_i$. Таким образом, построены ряды (148), в которых $v_i = \bar{v}_i,\ \ x_i = \bar{x}_i$, и эти ряды удовлетворяют формально уравнениям (146), (147).

Положим теперь

$$v_* = Y_m(\delta) := \sum_{i=0}^{4m+3} \varepsilon^{i/4}\bar{v}_i + \varepsilon^{m+3/4}\delta, \quad x_* = X_m(\rho) := \sum_{i=0}^{4m+3} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i + \varepsilon^{m+3/4}\rho, \tag{151}$$

где δ и ρ – произвольные числа, которые могут зависеть от ε, но остаются ограниченными при $\varepsilon \to 0$, и рассмотрим решения $(u^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)), v^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)))$ и $(u^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)), v^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)))$ первой и второй вспомогательных задач. Для их производных по x справедливы представления (25) и (144). Возьмём представление (25) при $n = m$, представление (144) при $n = 2m+1$, положим $x = X_m(\rho)$ и, учитывая, что в точке $x = X_m(\rho)$ производные всех $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю, подставим полученные выражения для производных в уравнения (145) и разложим затем левые части этих уравнений по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Так как $(\bar{v}_0,\bar{x}_0)$ и $(\bar{v}_i,\bar{x}_i)$ удовлетворяют уравнениям (149) и (150), то левые части уравнений (145) примут вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\frac{du^{(-)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)) - \frac{du^{(+)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))\right) = \\
&= \tilde{I}(\bar{v}_0,\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{4m+3}\varepsilon^{i/4}\left(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{v}_i + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{x}_i - a_i\right) + \\
&+ \varepsilon^{m+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho\right) + O(\varepsilon^{m+1}) = \\
&= \varepsilon^{m+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho + O(\varepsilon^{1/4})\right),
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{dv^{(-)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho)) - \frac{dv^{(+)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))\right) =$$

$$= \tilde{J}(\bar{v}_0,\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{4m+3}\varepsilon^{i/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{v}_i + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{x}_i - b_i\right) +$$

$$+ \varepsilon^{m+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho\right) + O(\varepsilon^{m+1}) =$$

$$= \varepsilon^{m+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho + O(\varepsilon^{1/4})\right). \qquad (153)$$

Слагаемые $O(\varepsilon^{1/4})$ в правых частях равенств (152) и (153) зависят от δ и ρ, но являются величинами указанного порядка малости при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно δ и ρ из фиксированной окрестности точки $(\delta=0,\rho=0)$, а так как $\left.\dfrac{D(\tilde{I},\tilde{J})}{D(v_0,x_0)}\right|_{\substack{v_0=\bar{v}_0\\ x_0=\bar{x}_0}} \neq 0$, то при всех достаточно малых ε существуют такие $\delta=\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$ и $\rho=\bar{\rho}=O(\varepsilon^{1/4})$, для которых правые части в (152) и (153) равны нулю. Следовательно, $v_*=Y_m(\bar{\delta})$ и $x_*=X_m(\bar{\rho})$ являются решением системы уравнений (145), а пара функций

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon) = \begin{cases} v^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

– решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $X_m(\bar{\rho})$. Заметим, что $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ сколь угодно близки к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ для достаточно малых ε, что и требовалось при разбиении исходной задачи на две вспомогательные.

Обозначим через $U_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ и $V_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ функции, определённые формулами (22), (23) и (96), (97) при $v_*=V$, $x_*=X$. Тогда для компонент решения $(u(x,\varepsilon),v(x,\varepsilon))$ исходной задачи (1), (2) в силу представлений (24) и (100) при $m\geqslant 1$ справедливы асимптотические равенства

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_{2m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})) + O(\varepsilon^m), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ U_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})) + O(\varepsilon^m), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_{2m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})) + O(\varepsilon^m), & 0\leqslant x\leqslant X_m(\bar{\rho}),\\ V_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})) + O(\varepsilon^m), & X_m(\bar{\rho})\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \qquad (154)$$

Формулы (154) имеют тот недостаток, что величины $\bar{\delta}$ и $\bar{\rho}$, от которых зависят $U_{2m-1}^{(-)}$, $V_{2m-1}^{(-)}$ и $U_{m-1}^{(+)}$, $V_{m-1}^{(+)}$, точно не известны, известен только их порядок ($\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$, $\bar{\rho}= =O(\varepsilon^{1/4})$), и, следовательно, $Y_m(\bar{\delta})$, $X_m(\bar{\rho})$, $\tau=(x-X_m(\bar{\rho}))/\sqrt{\varepsilon}$ и $\sigma=(x-X_m(\bar{\rho}))/\varepsilon$ также не определены точно. Заменим в формулах (154) $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$, т.е. в выражениях (151) для $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ отбросим последние слагаемые $\varepsilon^{m+3/4}\bar{\delta}=O(\varepsilon^{m+1})$ и $\varepsilon^{m+3/4}\bar{\rho}=O(\varepsilon^{m+1})$. Тогда аргумент τ изменится на величину порядка $O(\varepsilon^{m+1/2})$, а аргумент σ – на величину порядка $O(\varepsilon^m)$, и, значит, $Q^{(\pm)}$-функции изменятся на величины порядка $O(\varepsilon^{m+1/2})$, а $R^{(\pm)}$-функции – на величины порядка $O(\varepsilon^m)$. Поэтому при замене $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$ формулы (154) не изменятся.

Заменив в этих формулах m на $n+1$, сформулируем полученный основной результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A1–A11. Тогда для любого целого* $n \geqslant 0$ *при всех достаточно малых* ε *существует решение* $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ *задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0,1], \tag{155}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{2n+1}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0 \leqslant x \leqslant X_{n+1}(0), \\ U^{(+)}_n(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0) \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V^{(-)}_{2n+1}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0 \leqslant x \leqslant X_{n+1}(0), \\ V^{(+)}_n(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0) \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$Y_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{v}_i$, $X_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i$, *а функции* $U^{(-)}_{2n+1}$, $V^{(-)}_{2n+1}$ *и* $U^{(+)}_n$, $V^{(+)}_n$ *определены формулами (96), (97) и (22), (23), в которых* $x_* = X_{n+1}(0)$.

Из представлений (155) вытекают утверждения.

Следствие 3.1. *Имеют место предельные равенства (9).*

Следствие 3.2. *Предельным положением при* $\varepsilon \to 0$ *кривой* $l_\varepsilon = \{(u,v,x)\colon u = u(x,\varepsilon),$ $v = v(x,\varepsilon),\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *является кривая* $l = l^{(-)} \bigcup l^{(+)}$, *где кривые* $l^{(+)}$ *и* $l^{(-)}$ *определены в условиях A6 и A11.*

Следствие 3.3. *При каждом* $m = \overline{0, n-1}$ *для решения* $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ *справедливы равенства вида (155), в которых* n *заменено на* m.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенная краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 5–22.
4. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 1. С. 68–80.
5. *Бутузов В.Ф.* Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1593–1605.
6. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. математическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89.
7. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 05.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.